

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТА ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

І. Г. Крикун

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів ступеня освіти «Бакалавр»

спеціальності 125 «Кібербезпека»

освітньої програми «Кібербезпека»

Електронне видання

Вінниця 2022

УДК 519.21 (075.8)

К 85

*Затверджено на засіданні ради ФІПТ
ДонНУ імені Василя Стуса
(протокол № 4 від 23.11.2022 р.)*

Автор:

І. Г. Крикун, кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензенти:

С. А. Кирилашук, декан факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії Вінницького Національного технічного університету, кандидат педагогічних наук, доцент;

Є. О. Севостьянов, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;

Крикун І. Г.

К 85 Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2022. 167 с.

Навчальний посібник підготовлений відповідно до програми навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 125 «Кібербезпека» ступеня освіти «Бакалавр» та містить основні теоретичні поняття, відомості та результати, приклади розв'язання типових задач, питання та задачі для самоперевірки з дисципліни.

Також цей навчальний посібник може бути використаний здобувачами вищої освіти інших спеціальностей та викладачами, які застосовують теорію ймовірностей та математичну статистику у власних курсах та дослідженнях.

УДК 519.21 (075.8)

© І. Г. Крикун, 2022 р.

© ДонНУ імені Василя Стуса, 2022 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	7
ЧАСТИНА І. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	9
Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей	9
1.1. Вступ. Основні означення. Події.....	9
1.2. Операції (дії) над подіями.....	10
1.3. Класичне означення ймовірності.....	11
1.3.1. Таблиця комбінаторних формул.....	13
1.3.2. Правила комбінаторики.....	13
Питання та задачі до теми.....	14
Тема 2. Геометрична ймовірність. Аксиоми теорії ймовірностей.	
Незалежність подій.....	16
2.1. Геометрична ймовірність	16
2.2. Аксиоматика теорії ймовірностей	17
2.3. Умовні ймовірності. Незалежні події.....	18
2.4. Незалежність подій.....	20
2.5. Теореми про додавання і множення ймовірностей.....	21
Питання та задачі до теми.....	22
Тема 3. Формули повної ймовірності та Баєса. Схема Бернуллі.	
Граничні теореми у схемі Бернуллі.....	24
3.1. Формула повної ймовірності. Формула Баєса	24
3.2. Схема Бернуллі	26
3.2.1. Граничні теореми у схемі Бернуллі	27
3.2.2. Наслідки граничних теорем у схемі Бернуллі.....	30
Питання та задачі до теми.....	31
Тема 4. Випадкові величини, їх типи. Закони розподілу	
дискретних випадкових величин	33
4.1. Випадкові величини, їх типи. Дискретні випадкові величини .	33
4.2. Закони розподілу дискретних випадкових величин	34
4.2.1. Біноміальний закон розподілу	34
4.2.2. Геометричний закон розподілу	36
4.2.3. Пуассонівський закон розподілу.....	38
4.2.4. Гіпергеометричний закон розподілу.....	38
4.2.5. Рівномірний (дискретний) закон розподілу	40
Питання та задачі до теми.....	41

Тема 5. Функція розподілу та щільність розподілу випадкових величин	43
5.1. Функція розподілу випадкових величин	43
5.2. Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу	45
5.3. Функції випадкового аргументу.....	47
Питання та задачі до теми	50
Тема 6. Числові характеристики випадкових величин	51.
6.1. Математичне сподівання	51
6.2. Дисперсія.....	53
6.3. Асиметрія. Ексцес. Мода. Медіана	56
Питання та задачі до теми	57
Тема 7. Закони розподілу неперервних випадкових величин. .	59
7.1. Рівномірний розподіл	59
7.2. Показниковий (експоненційний) розподіл.....	59
7.2.1. Елементи теорії надійності	60
7.3. Нормальний розподіл	61
Питання та задачі до теми	63
Тема 8. Випадкові вектори. Сумісні розподіли	64
8.1. Двовимірні випадкові вектори	64
8.2. Сумісна щільність. Функція розподілу та щільність компонент випадкового вектора	65
8.3. Незалежність випадкових величин	67
8.4. Розподіл суми двох випадкових величин.	67
Питання та задачі до теми	71
Тема 9. Закони розподілу, пов'язані з нормальним. Граничні теореми теорії ймовірностей	73
9.1. Гамма-функція. Гамма-розподіл	73
9.2. Розподіл хі-квадрат (Пірсона)	74
9.3. Розподіл Стюдента	77
9.4. Граничні теореми теорії ймовірностей	79
9.4.1. Результати типу закону великих чисел.....	79
9.4.2. Результати типу центральної граничної теореми	82
Питання та задачі до теми	83

ЧАСТИНА II. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА	84
Тема 1. Основні поняття математичної статистики.	
Вибірковий метод	84
1.1. Предмет та задачі математичної статистики.....	84
1.2. Базові означення математичної статистики	86
1.3. Способи формування вибірки.....	87
Питання та задачі до теми.....	90.
Тема 2. Статистичний розподіл вибірки	91
2.1. Варіаційний ряд. Таблиця частот	91
2.2. Інтервальний статистичний ряд.....	92
2.2.1. Групування даних	93
2.3. Емпірична функція розподілу.....	94
2.4. Графічне зображення статистичних даних	96
Питання та задачі до теми.....	97
Тема 3. Числові характеристики вибірки	99
3.1. Основні числові характеристики вибірки	99
3.2. Інші числові характеристики вибірки	101
Питання та задачі до теми.....	102
Тема 4. Статистичні оцінки параметрів розподілу	103
4.1. Основні означення та поняття	103
4.2. Властивості основних числових характеристик вибірки	105
4.3. Метод моментів	106
4.4. Метод максимальної вірогідності.....	108
Питання та задачі до теми.....	111
Тема 5. Довірчий інтервал. Довірчі ймовірності.....	112
5.1. Основні означення та поняття	112
5.2. Побудова довірчих інтервалів для випадкової величини X , розподіленої нормально	113
5.2.1. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомому математичному сподіванні і відомій дисперсії	114
5.2.2. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомих математичному сподіванні і дисперсії.....	116
5.2.3. Побудова довірчого інтервалу для невідомої дисперсії.....	117
5.2.4. Знаходження об'єму вибірки для знаходження оцінки математичного сподівання при відомій дисперсії	118

Питання та задачі до теми	120
Тема 6. Кореляційний аналіз	121
6.1. Основні поняття та постановка задачі	121
6.2. Вибіркова коваріація та коефіцієнт кореляції Пірсона.....	124
Питання та задачі до теми	126
Тема 7. Регресійний аналіз	127
7.1. Регресійний аналіз: основні поняття та постановка задачі.....	127
7.2. Метод найменших квадратів	128
7.3. Лінійна регресія	130
7.4. Коефіцієнт детермінації	133
Питання та задачі до теми	135
Тема 8. Статистичні гіпотези	136
8.1. Основні означення і поняття	136
8.2. Алгоритм перевірки статистичних гіпотез.....	140
8.3. Критерій χ^2 -квадрат (Пірсона).....	140
Питання та задачі до теми	144
Тема 9. Випадкові процеси. Прикладні задачі, пов'язані з кібербезпекою	145
9.1. Поняття про випадкові (ймовірнісні) процеси	145
9.2. Випадкові процеси в теорії масового обслуговування	146
9.3. Прикладні задачі на використання методів та формул теорії ймовірностей та математичної статистики.....	148
Додаток 1. Таблиці математичної статистики	152
Як працювати з таблицями математичної статистики.....	156
Додаток 2. Метод добутків вибірових середніх	158
Список рекомендованої літератури.....	164

ПЕРЕДМОВА

*У кожній науці стільки науки,
скільки в ній математики.*

Іммануїл Кант

У наш час така дисципліни як теорія ймовірностей та математична статистика є саме тими науками, з використанням яких ми зіштовхуємося в дорослому і професійному житті. Сучасне життя потребує для сучасної людини не лише **знання**, про що саме говорять ті чи інші цифри, факти, показники, а й **розуміння** того, як ці цифри було отримано, і навіть **усвідомлення** того, що цими цифрами та фактами можуть маніпулювати, приховувати ними справжній стан справ.

Курс «Теорія ймовірностей та математична статистика» покликаний сприяти формуванню у студентів спеціальності 125 «Кібербезпека» діалектико-матеріалістичного світогляду, розвитку їх розумових здібностей, прищеплювати вміння точно і логічно мислити, аргументувати свої твердження, розвивати абстрактне мислення, творчу та просторову уяву, сприяти підвищенню наукової і математичної культури.

Запропонований курс лекцій, крім теорії, містить розв'язані типові приклади, питання та задачі для самостійної роботи, таблиці математичної статистики, які допоможуть краще опанувати наукою. Для зручності орієнтування в тексті посібника в ньому подано предметний покажчик термінів, що використовуються.

Даний навчальний посібник має сприяти під час вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» здобувачами вищої освіти спеціальності 125 «Кібербезпека» у формуванні наступних компетентності здобувачів вищої освіти:

1. здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у галузі забезпечення інформаційної безпеки і\або кібербезпеки, що характеризується комплексністю та неповною визначеністю умов;
2. здатність до використання інформаційно-комунікаційних технологій, сучасних методів і моделей інформаційної та\або кібербезпеки;
3. здатність застосовувати методи та засоби криптографічного та технічного захисту інформації на об'єктах інформаційної діяльності.

Програмні результати навчання:

1. Вирішувати задачі захисту інформації, що обробляється в інформаційно-телекомунікаційних системах з використанням сучасних методів та засобів криптографічного захисту інформації.

Позначення та символи, що використовуються

- нові поняття виділяються словом **Означення** та набираються розрідженим шрифтом;
- важливі формули нумеруються з правого боку – (4.3);
- важливі результати виділяються словами **Теорема** або **Наслідок**;
- найважливіші результати та формули додатково виділяються рамкою;
- значком ● помічені різні підказки та зауваження, які будуть корисними для кращого розуміння тексту;
- значком * помічений матеріал, який є додатковим і на який не спирається подальший текст. При першому читанні його можна пропустити.

Про рекомендовану літературу

Перелік рекомендованої літератури розміщений в кінці навчального посібника. Всі ці книги доступні в електронному варіанті в мережі Інтернет.

* * *

Автор буде радий отримати відгуки та пропозиції щодо цього курсу лекцій на електронну пошту i.krykun@donnu.edu.ua

ЧАСТИНА І. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Вступ. Основні означення. Події

Усі процеси, що ми спостерігаємо в реальному житті, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Такі фактори дуже часто є випадковими, невідомими – погода, час очікування, майбутня урожайність, тривалість життя, але водночас такими, що мають певні закономірності. Такі закономірності і вивчає теорія ймовірностей.

Означення 1. Результат спостереження, досліду, експерименту називають подією. Позначають події великими латинськими буквами A, B, C , а описують їх словами в лапках “...” або фігурних дужках {...}:

A = “монета після підкидання випаде гербом”.

- Для того, щоб результат експерименту був подією, має бути можливою повторюваність експерименту при незмінних умовах.

Події називають:

- 1) достовірними – коли подія обов’язково відбувається;
- 2) неможливими – коли подія обов’язково не відбувається;
- 3) випадковими – коли подія може відбутися, а може і не відбутися.

- Надалі будемо працювати саме з випадковими подіями, тому слово «випадкова» зазвичай будемо пропускати.

Означення 2. Подія, що відбувається внаслідок проведення одного і лише одного експерименту, називається елементарною (простою) подією (коротко ЕП). Позначають малими літерами¹ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

- Елементарні події – це так події, які неможливо розкласти на простіші.

¹ ω – буква грецького алфавіту, яка вимовляється *омега* [маленьке].

Означення 3. Множина **всіх** елементарних подій, що можуть відбутися в експерименті, називається простором елементарних подій (далі по тексту ПЕП). Позначається великою літерою² Ω .

Означення 4. Якщо подію можна розкласти на елементарні події, то вона називається складеною (складною) подією. Якщо подія A складається з елементарних $\omega_1, \dots, \omega_n$, то елементарні події $\omega_1, \dots, \omega_n$ називають подіями, що сприяють події A .

Приклад 1. Монету підкидають 1 раз. Які елементарні події виникають у цьому експерименті?

Розв'язання. Це дві елементарні події: $\omega_1 = \{\text{монета випала гербом}\}$ та $\omega_2 = \{\text{монета випала цифрою}\}$. Здебільшого використовують скорочені (але зрозумілі) позначення: $\omega_1 = \{\Gamma\}$, $\omega_2 = \{\Pi\}$.

1.2. Операції (дії) над подіями

Поняття «подія» є окремим випадком такого поняття, як «множина». З множинами оперують як теорія множин, так і теорія логіки. Тому в теорії ймовірностей широко використовують позначення з обох згаданих теорій.

Отже, над множинами / подіями розглядають такі операції:

1. **Об'єднання** (додавання). Об'єднанням (сумою) подій A і B називається подія C , яка відбувається тоді, коли настає **хоча б одна** з подій A чи B , тобто відбувається або подія A , або подія B , або обидві події одночасно. Позначають: $C = A \cup B$ або $C = A + B$.

2. **Перетин** (множення). Перетином (добутком) подій A і B називають подію C , яка відбувається тоді, коли одночасно настають **обидві** події A і B . Позначають $C = A \cap B$ або $C = AB$.

3. **Різниця** (мінус). Різницею подій A і B називається подія C , яка відбувається тоді, коли подія A настане, а подія B – не настане.

Позначають $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.

² Ω – буква грецького алфавіту, вимовляється *омега* [велике].

4. **Доповнення** (заперечення). Доповненням (запереченням) події A називається така подія C , яка відбувається тоді, коли подія A не настає.

Позначають $C = \bar{A}$.

- Подію $\bar{A}$ ще називають подією, протилежною до A або не A .

Означення 5. Подію-доповнення до ПЕП Ω називають порожньою множиною. Позначають спеціальним символом: $\emptyset$.

Означення 6. Події A і B , які в одному випробуванні не можуть настати одночасно, називаються не сумісними. Це позначають так:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Інакше події називаються сумісними.

1.3. Класичне означення ймовірності

Мірою можливості настання події у випробуванні / досліді / експерименті є число, яке називається **ймовірністю** цієї події.

Зокрема часто трапляється ситуація, коли внаслідок проведення експерименту може відбутися одна із багатьох **рівноможливих** подій. У такій ситуації ймовірність будь-якої події знаходиться за наступною формулою, яка називається класичним означенням ймовірності.

Означення 7. Ймовірністю події A називається відношення кількості m елементарних подій, які сприяють події A , до загальної кількості n всіх елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

З означення випливають такі **властивості ймовірності**:

- 1) ймовірність достовірної події дорівнює одиниці;
- 2) ймовірність неможливої події дорівнює нулю;
- 3) ймовірність будь-якої випадкової події є числом між нулем і одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

● Ймовірність – це безрозмірна величина (тобто без одиниць виміру), число між 0 і 1. Часто (особливо в ЗМП) ймовірність вимірюють у відсотках, але таку ймовірність правильніше називати **шансом**.

Приклад 2. Кубик підкинули 1 раз. Яка ймовірність того, що число очок, що випало, буде кратним 3?

● У подібних задачах, виходячи із вимог здорового глузду, практичного досвіду та за відсутності іншої умови, кубик вважаємо симетричним, і події, що полягають у випадінні конкретного числа очок, вважаємо рівноможливими.

Розв’язання. На кубику може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Отже, загальне число всіх рівноможливих елементарних подій $n = 6$. Подія $A =$ «число очок, що випало, буде кратним 3» відбудеться, якщо на кубику випаде 3 або 6 очок, тобто кількість елементарних подій, які сприяють події A , $m = 2$. Звідси за формулою (1.1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Означення 8. Відносною частотою або статистичною ймовірністю події A називається відношення числа випробувань m , в яких подія настала, до загального числа n фактично виконаних випробувань:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Часто в задачах простір елементарних подій містить дуже велику кількість рівноможливих елементарних подій. У такій ситуації всі елементарні події виписувати не варто, натомість ймовірність деякої події A знаходять за формулою, аналогічній класичному означенню ймовірності (Означення 1.8):

Означення 9. (Комбінаторна ймовірність)

$$P(A) = \frac{\text{кількість сприятливих (події } A) \text{ комбінацій}}{\text{загальна кількість комбінацій}}. \quad (1.2)$$

Тому треба вміти знаходити кількість різних комбінацій. Для цього потрібно розуміти, яку саме множину шукаємо і яким саме способом.

Множини (підмножини, вибірки) бувають:

– в порядкуванні – коли важливий порядок, за яким елементи входять у множину (призери змагань);

– Невпорядковані – коли порядок, за яким елементи входять у множину, є неважливим (виграшні кульки в лотереї; збірна команда).

Операції (з побудови вибірок, підмножин) бувають:

– із повторенням (повторні) – елементи у вибірці можуть повторюватися (призери різних змагань);

– без повторення (безповторні) – елементи у вибірці не можуть повторюватися (призери одного змагання; збірна команда).

1.3.1. Таблиця комбінаторних формул

Після формалізації умови (з'ясування того, які множини нам потрібні і яким способом вони утворюються), для вибору k необхідних елементів з n наявних різних елементів потрібно скористатися однією із 4 формул:

ОПЕРАЦІЇ МНОЖИНИ	БЕЗПОВТОРНІ	ПОВТОРНІ
ВПОРЯДКОВАНІ	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
НЕВПОРЯДКОВАНІ	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

1.3.2. Правила комбінаторики

Розв'язуючи задачі комбінаторики, часто використовують певні правила (вони називаються правилами вибору).

Правило добутку. Якщо об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору інший об'єкт B може бути вибраний n способами, то вибір **пари** “ A і B ” може бути здійснений mn способами. Це правило справедливе, коли вибір A і B **незалежний**.

Аналогічно для k -об'єктів. Якщо кожен k -об'єкт можна вибрати $n_1, \dots, n_k$ способами відповідно, то всі ці k -об'єкти можна вибрати $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Правило суми. Якщо об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт B може бути вибраний n способами, то вибір **одного об'єкта** “або A , або B ” може бути здійснений $m + n$ способами. Слід мати на увазі, що вибори A і B тут є **взаємно виключними**.

Аналогічно для k -об'єктів. Якщо кожен із k -об'єктів можна вибрати $n_1, \dots, n_k$ способами, то один з цих k -об'єктів можна вибрати $n_1 + \dots + n_k$ способами.

Питання та задачі до теми

1. Що таке подія? Які події бувають?
2. Яку подію називають елементарною? Складною? Що таке простір елементарних подій?
3. Що таке події, які сприяють іншій події?
4. Які дії над подіями існують?
5. Яку множину називають порожньою множиною?
6. Наведіть основні властивості операцій над подіями.
7. Наведіть класичне означення ймовірності.
8. Які основні властивості ймовірності впливають із класичного означення ймовірності?
9. Наведіть означення статистичної ймовірності.

Задача 1. Монету підкидають 3 рази. Описати простір елементарних подій цього експерименту.

Задача 2. Маємо дві множини: $\Omega_1 = \{1; 2; 3\}$, $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4\}$. Утворюють впорядковані пари чисел так, що перше число – з множини Ω_1 , а друге – з Ω_2 . Описати простір елементарних подій цього експерименту.

Задача 3. Нехай A, B, C – довільні події. Записати символами операції над подіями подію “відбулося не більше однієї події з A, B, C ”.

Задача 4. Два стрільці стріляють по мішені. Нехай подія A полягає в тому, що перший стрілець влучив, подія B – другий стрілець влучив. Описати словами події $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Задача 5. У ящику міститься 15 деталей, з яких 6 – бракованих. Взяли навмання 1 деталь. Яка ймовірність того, що деталь стандартна?

Задача 6. Скількома способами можна скласти список із 12 учнів?

Задача 7. Маємо 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. З них утворюють чотиризначні числа без повтору цифр. Яка ймовірність того, що в підсумку вийде число 2019?

Задача 8. Маємо групу студентів із 15 осіб. За заняття кожен отримує від 1 до 5 балів. Скільки можливих варіантів розстановки оцінок у журналі групи?

Задача 9. Скількома способами з 15 осіб можна вибрати делегацію:

а) з трьох людей; б) з п'яти людей, одна з яких – голова делегації?

Задача 10. В лотереї випадає 6 виграшних кульок із 49 наявних. Можна вибрати будь-які 6 номерів. Яка ймовірність вгадати:

а) всі 6 номерів, б) 5 номерів, в) 4 номери?

Задача 11. Скільки діагоналей є у правильному N -кутнику?

а) $N = 5$; б) $N = 6$; в) $N = 10$; *г) N – довільне.

Задача 12. 10 студентів треба посадити на 10 стільців, які стоять в лінію. Скільки варіантів розміщення студентів існує, якщо:

а) немає обмежень на розташування студентів;
б) студентка Марія не хоче сидіти поруч із Олександром і Сергієм;
в) що зміниться в обчисленнях та підсумку кожного пункту, якщо стільці стоятимуть не в лінію, а навколо круглого столу?

**Задача 13.* 25 студентів треба розмістити в 3 аудиторіях. Скільки існує варіантів розміщення студентів по аудиторіях, якщо:

а) немає жодних обмежень на кількість студентів в аудиторіях;
б) у першій аудиторії має бути не менше 5 студентів;
в) у першій аудиторії має бути не більше 6 студентів?

Тема 2. Геометрична ймовірність. Аксиоми теорії ймовірностей. Незалежність подій

2.1. Геометрична ймовірність

Іноді при розв'язанні задач теорії ймовірностей будується така математична модель задачі, в якій використовуються геометричні об'єкти та їх міри – довжини, площі, об'єми. Це відбувається тоді, коли немає скінченного простору елементарних подій, а є нескінченно багато елементарних подій.

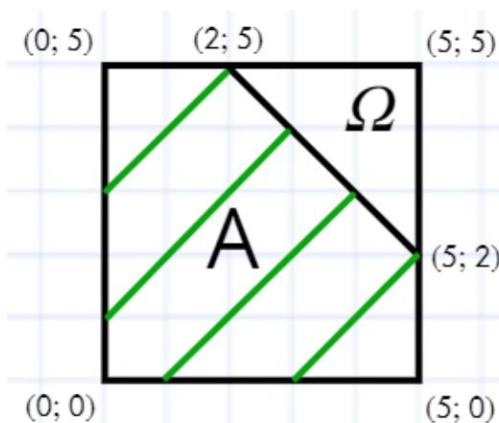
У такій ситуації ймовірність деякої події A знаходять за формулою, аналогічній класичному означенню ймовірності (див. Означення 1.8):

Означення 1. (Геометрична ймовірність)

$$P(A) = \frac{\text{геометрична міра } (A)}{\text{геометрична міра } (\Omega)} \quad (2.1)$$

- Геометричною мірою може бути довжина, відстань, площа, об'єм, кількість. Вибір конкретної геометричної міри залежить від умови задачі.

Приклад 1. Два студенти називають по одному числу між 0 і 5. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не перевищить 7.



Розв'язання. Позначимо через x число, яке назвав перший студент, а через y – число, яке назвав другий студент. Ці числа між собою незалежні. Тому весь простір елементарних подій Ω цього експерименту – це квадрат зі стороною в 5 у просторі Oxy . Тепер перепишемо в термінах координат x та y подію, ймовірність якої треба знайти:

$A = \text{“сума цих чисел не перевищить 7”}$, отже A – це множина точок $(x; y)$, таких, що $x + y \leq 7$ або $A = \{(x; y) : y \leq 7 - x\}$. Геометрично в такій інтерпретації події A відповідає частина Ω , яка лежить нижче прямої $y = 7 - x$.

Отже, геометрична міра Ω дорівнює площі всього квадрата зі стороною 5, тобто геометрична міра $\Omega = 25$ кв. одиниць, а геометрична міра події A дорівнює площі заштрихованої частини квадрата, тобто геометрична міра події $A = 25 - 3^2/2 = 21,5$ кв. одиниць.

Тому, за формулою (2.1), ймовірність того, що сума названих студентами чисел не перевищить 7 дорівнює

$$P(A) = \frac{\text{геометрична міра } (A)}{\text{геометрична міра } (\Omega)} = \frac{21,5}{25} = 0,82.$$

• В умові не було сказано, що студенти називають цілі числа. Інакше задача мала б скінченний ПЕП і простіше розв'язання.

2.2. Аксиоматика теорії ймовірностей

Якщо простір елементарних подій Ω містить багато елементів (n штук), то всі його можливі підмножини – це 2^n штук – буває дуже складно розглядати, а часто і непотрібно. Можна обійтися меншим набором підмножин.

Отже, розглядаємо простір елементарних подій Ω .

Означення 2. Система подій F , побудована з елементів Ω , називається алгеброю подій, якщо виконуються властивості:

1. $\Omega \in F$.
2. З того, що $A, B \in F$ випливає, що $A \cup B \in F$, $A \cap B \in F$, $A \setminus B \in F$.

З означення випливає, що порожня множина $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$ має обов'язково належати алгебрі F .

Для фіксованого Ω можна побудувати різні алгебри. Але завжди найменшою буде $F_{\min} = \{\emptyset; \Omega\}$; найбільшою буде $F_{\max}$, що складається з 2^n штук усіх можливих підмножин Ω .

Приклад 2. Нехай $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$. Побудувати алгебри $F_{\min}$ та $F_{\max}$.

Розв'язання. Як і завжди, $F_{\min} = \{\emptyset; \Omega\}$.

$F_{\max}$ складається з $2^4 = 16$ елементів: $F_{\max} = \{\emptyset; (1); (2); (3); (4); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4); (1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 3, 4); (2, 3, 4); \Omega\}$.

Означення 3. Нехай на просторі елементарних подій Ω задано алгебру подій F . Числова функція P , що визначена на елементах алгебри F , називається ймовірністю, якщо виконуються такі аксіоми ймовірності:

1. $P(\Omega) = 1$.

2. $0 \leq P(A) \leq 1$ для будь-якої $A \in F$.

3. Якщо $A \cap B = \emptyset$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (2.2)$$

Означення 4. Трійка об'єктів: простір елементарних подій Ω ; побудована на просторі елементарних подій Ω алгебра подій F ; визначена на елементах алгебри F ймовірність $P - (\Omega, F, P)$ – називається ймовірнісним простором.

Наслідки аксіом

1. Ймовірність протилежної події :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2.3)$$

1.1. Ймовірність порожньої множини:

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - 1 = 0.$$

2. Монотонність ймовірності :

2.1. Якщо $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

2.2. Якщо $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

2.3. Умовні ймовірності. Незалежні події

Події A і B є залежними, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої. Інакше події незалежні.

Приклад 3. Підкидаємо гральний кубик 1 раз. Результат експерименту – кількість очок, що випала. Розглянемо події: A = “випало мало очок (1 або 2 або 3)”; B = “випала парна кількість очок”. Якими є події A та B – залежними чи незалежними?

Розв'язання. Подія B = “випало 2 або 4, або 6 очок”. Тому якщо подія A відбулася (тобто на кубику випало 1 або 2 або 3 очок), то подія B відбудеться з ймовірністю $1/3$; якщо ж подія A не відбулася (тобто на кубику випало 4 або 5 або 6 очок), то подія B відбудеться з ймовірністю $2/3$.

Отже, ймовірність появи події B залежить від того, чи відбулася подія A . Отже, події A і B є залежними.

Зауважимо, що аналогічно і навпаки – ймовірність появи події A залежить від того, чи відбулася подія B : якщо подія B відбулася (тобто на кубуку випало 2 або 4, або 6 очок), то подія A відбудеться з ймовірністю $1/3$; якщо ж подія B не відбулася (тобто на кубуку випало 1 або 3, або 5 очок), то подія A відбудеться з ймовірністю $2/3$.

Означення 5. Умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, називається така ймовірність події A , яка обчислюється за умови, що подія B відбулася:

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \quad (2.4)$$

З формули (2.4) отримуємо, що (при $P(B) \neq 0$)

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \quad (2.4.1)$$

Властивості умовних ймовірностей.

1. Якщо $A \cap B = \emptyset$, то $P(A|B) = 0$.
2. Якщо $A \cap B = B$, то $P(A|B) = 1$.
3. В інших ситуаціях $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

Приклад 4. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Навмання витягають одне число із множини Ω . Розглянемо події: A = “вийняте число кратне 2”; B = “вийняте число кратне 3”:

- а) обчислити умовні ймовірності $P(A|B)$ та $P(B|A)$;
- б) чи є незалежними події A і B ?

Розв’язання. В Ω входять 6 елементарних подій – $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. З умови та властивостей дій над подіями: подія $A \cap B$ = “вийняте число кратне 2 і кратне 3” = “вийняте число кратне 6”. Події, що сприяють події A : $\{2; 4; 6\}$; події, що сприяють події B : $\{3; 6\}$; події, що сприяють події $A \cap B$: $\{6\}$.

А) Тому, за класичним означенням ймовірності (формула (1.1)):

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

А за формулою (2.4) умовні ймовірності подій:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}; \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Б) Оскільки $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, то події A і B – незалежні.

2.4. Незалежність подій

Розглянемо докладно одне із найважливіших понять теорії ймовірностей – поняття незалежності випадкових подій. Саме це поняття, що часто зустрічається в практичних задачах, виділило свого часу теорію ймовірностей із теорії міри і теорії функцій у самостійну математичну дисципліну.

Означення 6. Якщо умовна ймовірність події A за умови, що подія B відбулася, дорівнює безумовній ймовірності події A :

$$P(A|B) = P(A), \quad (2.5)$$

то говорять, що подія A не залежить від події B .

Якщо подія A не залежить від події B , тоді з формули (2.4.1) випливає, що

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (2.5.1)$$

Далі, з того, що подія A не залежить від події B , за формулою (2.4) отримуємо, що тоді³ і $P(B|A) = P(B)$, звідки маємо такі висновки:

Наслідок 1. (про взаємну незалежність подій).

Якщо подія A не залежить від події B , то і подія B не залежить від події A .

Означення 7. Події A і B називають незалежними, якщо ймовірність перетину цих подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.6)$$

Теорема 2.1. (про незалежність подій)

Для того, щоб події A і B були незалежними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна із умов:

$$P(A|B) = P(A) \text{ (якщо } P(B) > 0);$$

$$\text{або } P(B|A) = P(B) \text{ (якщо } P(A) > 0).$$

³ Для подій A і B , ймовірності яких не дорівнюють нулю.

2.5. Теорема про додавання і множення ймовірностей

Теорема 2.2. (про додавання ймовірностей довільних подій)

Для довільних подій A, B ймовірність об'єднання цих подій дорівнює

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (2.7)$$

Теорема 2.3. (про множення ймовірностей двох довільних подій)

Для довільних подій A, B ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B). \quad (2.8)$$

Теорема 2.4. (про множення ймовірностей двох незалежних подій)

Якщо події A і B незалежні, то ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.9)$$

Приклад 5. Троє студентів складають екзамен. Ймовірності скласти екзамен для кожного з них дорівнюють $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,6$ відповідно. Розглянемо події A = “всі складуть”, B = “жоден не складе”, C = “складуть точно 2 студенти”. Знайти ймовірності цих подій.

Розв'язання. Будемо позначати через ІС подію “перший студент складе екзамен” і аналогічно для інших студентів.

Тоді A = “всі складуть” = “ІС і ІС і ІС” = “ІС $\cap$ ІС $\cap$ ІС”.

Складання першим студентом екзамену не впливає на інших студентів, тобто події ІС, ІС, ІС є незалежними. Тому за теоремою про множення ймовірностей незалежних подій (тобто за формулою (2.9.1)) маємо

$$P(A) = P(\text{ІС} \cap \text{ІС} \cap \text{ІС}) = P(\text{ІС}) \cdot P(\text{ІС}) \cdot P(\text{ІС}) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,432.$$

Для події B аналогічно маємо

$$B = \text{“ніхто не складе”} = \text{“ІН і ІН і ІН”} = \text{“ІН} \cap \text{ІН} \cap \text{ІН”}.$$

Будемо використовувати формулу ймовірності протилежної події (2.3):

$$P(\text{ІН}) = 1 - P(\text{ІС}) = 1 - 0,9 = 0,1; P(\text{ІН}) = 1 - 0,8 = 0,2; P(\text{ІН}) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Тепер за теоремою про множення ймовірностей незалежних подій маємо

$$P(B) = P(IH \cap IH \cap IHH) = P(IH) \cdot P(IH) \cdot P(IHH) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,008.$$

Для події C маємо: $C =$ “складуть точно 2 студенти” =

= “точно 2 студенти складуть і точно 1 студент не складе екзамен” =

= “(IC і IC і IHH) або (IC і IH і IHC) або (IH і IC і IHC)” =

= “(IC $\cap$ IC $\cap$ IHH) $\cup$ (IC $\cap$ IH $\cap$ IHC) $\cup$ (IH $\cap$ IC $\cap$ IHC)”.

Події в круглих дужках є несумісними між собою, тому за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій (формула (2.7.1))

$$\begin{aligned} P(C) &= P((IC \cap IC \cap IHH) \cup (IC \cap IH \cap IHC) \cup (IH \cap IC \cap IHC)) = \\ &= P(IC \cap IC \cap IHH) + P(IC \cap IH \cap IHC) + P(IH \cap IC \cap IHC) = \\ &= P(IC) \cdot P(IC) \cdot P(IHH) + P(IC) \cdot P(IH) \cdot P(IHC) + P(IH) \cdot P(IC) \cdot P(IHC) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,39. \end{aligned}$$

Питання та задачі до теми

1. Коли використовується формула геометричної ймовірності?
2. Яка система подій називається алгеброю подій?
3. Сформулюйте аксіоми ймовірності.
4. Що таке ймовірнісний простір? З чого він складається?
5. Як знайти ймовірність протилежної події?
6. Які події називаються залежними?
7. Як знайти умовну ймовірність події A за умови, що подія B відбулася?
8. Сформулюйте результати теореми про додавання ймовірностей подій.
9. Сформулюйте результати теореми про множення ймовірностей подій.

Задача 1. (Задача про зустріч). Двоє людей домовилися про зустріч у певному місці на інтервалі часу $[0; T]$, причому перший, хто прийде, чекає $a < T$ хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що ці особи, які прийшли в інтервалі часу $[0; T]$, зустрінуться.

Задача 2. Мішень – це концентричні кола, радіус яких збільшується від 1 см (9 очок) до 10 см (1 очко). Ймовірність влучення в будь-яку частину мішені однакова. Яка ймовірність того, що стрілець, який влучив у мішень, вибив а) точно 8 очок; б) від 7 до 9 очок; в) парне число очок?

Задача 3. Нехай $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

А) Чи буде алгеброю система підмножин $F_1 = \{ \emptyset ; \Omega ; (1, 2); (3, 4, 5) \}$?

Б) Доповнити до алгебри систему підмножин $F_2 = \{ \emptyset ; \Omega ; (1, 2); (3, 4); (4) \}$.

Задача 4. Зі спостережень за студентами I курсу відомо, що з першого разу екзамен з математики складає 65 % із них, екзамен з історії складає 80 % із них, а хоча б один із цих предметів – 95 % із них. Знайти ймовірність того, що навмання взятий студент I курсу складе обидва екзамени з першого разу.

Задача 5. Ймовірність стрільця влучити в “десятку” становить 0,04, в “дев’ятку” – 0,11, у “вісімку” – 0,17. Зроблено один постріл. Яка ймовірність того, що вибито менше 8 очок?

Задача 6. Відомо, що $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,55$, $P(A \cap \bar{B}) = 0,25$, $P(\bar{A} \cap B) = 0,1$. Знайти $P(A \cap B)$.

Тема 3. Формули повної ймовірності та Баєса. Схема Бернуллі. Граничні теореми у схемі Бернуллі

3.1. Формула повної ймовірності. Формула Баєса

Означення 1. Нехай маємо набір з n подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ таких, що:

1. Об'єднання всіх $H_1, H_2, \dots, H_n$ дає весь простір елементарних подій Ω :

$$\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega.$$

2. Події $H_1, H_2, \dots, H_n$ – попарно несумісні:

$$H_i \cap H_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Тоді говорять, що події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій або розбиття простору елементарних подій Ω . Самі події $H_1, H_2, \dots, H_n$ називають гіпотезами.

Теорема 3.1. Формула повної ймовірності

Ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної гіпотези $H_1, H_2, \dots, H_n$ на умовну ймовірність події A за умови, що відбулася відповідна гіпотеза:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n). \quad (3.1)$$

Теорема 3.2. Формула Баєса⁴

Якщо в результаті експерименту стало відомо, що подія A настала, то ймовірність того, що це мало місце при настанні гіпотези H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) обчислюється за формулами Баєса:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)}. \quad (3.2)$$

⁴ Варіанти написання цього прізвища: Байєса, Байєса, Бейєса.

Зауваження 1. Формулу повної ймовірності використовують тоді, коли в умові йдеться про подію, яка **ще не відбулася** (ймовірності таких подій називають априорними, від лат. «a priori» = «до експерименту»), а формулу Баєса використовують тоді, коли в умові сказано, що деяка подія **вже відбулася** (ймовірності таких подій називають апостеріорними, від лат. «a posteriori» = «те, що впливає з досвіду»).

Приклад 1. На підприємство надходить програмне забезпечення від трьох постачальників: 45 % від постачальника А, 35 % – від постачальника В і 20 % – від постачальника С. Програмне забезпечення містить помилки: у постачальника А 6 % програмного забезпечення з помилками, у постачальника В – 2 % і у постачальника С – 8 %.

А) Знайти ймовірність того, що навання взята програма буде без помилок.

Б) Навання взята програма виявилася без помилок. Знайти ймовірність того, що вона від другого постачальника.

Розв'язання. Введемо події: A = “навання взята програма – без помилок”;

H_1 = “навання взята програма – від постачальника А”;

H_2 = “навання взята програма – від постачальника В”;

H_3 = “навання взята програма – від постачальника С”.

З умови маємо, що ці події утворюють повну групу подій, а їх ймовірності дорівнюють: $P(H_1)=0,45$, $P(H_2)=0,35$, $P(H_3)=0,2$.

Далі з умови можемо знайти умовні ймовірності події A :

$$P(A|H_1) = 1 - 0,06 = 0,94, P(A|H_2) = 1 - 0,02 = 0,98, P(A|H_3) = 1 - 0,08 = 0,92.$$

А) За формулою повної ймовірності (3.1) маємо:

$$P(A) = 0,45 \cdot 0,94 + 0,35 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,92 = 0,95;$$

Б) За формулою Баєса (3.2)

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,98}{0,95} \approx 0,361.$$

3.2. Схема Бернуллі

Означення 2. Проводимо серію з n незалежних експериментів. Якщо внаслідок кожного з них може статися **лише одна із двох подій** (їх зазвичай називають “успіх” / “неуспіх”) зі **сталими ймовірностями** p і q ($p + q = 1$, отже, $q = 1 - p$), то говорять про експерименти за схемою Бернуллі.

- Подію “успіх” здебільшого вибирають самостійно, виходячи з умови.

Теорема 3.3. Формула Бернуллі

Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія “успіх” з’явиться точно k разів, знаходять так:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.3)$$

Приклад 2. Ймовірність того, що протягом тижня електрична лампочка не перегорить, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом тижня із 5 лампочок не перегорить: а) 4 штуки; б) не менше 4 штук.

Розв’язання. Лампочки одна на іншу не впливають, отже, маємо 5 незалежних експериментів – наслідок роботи протягом тижня першої, другої, ..., п’ятої лампочки із двома можливими подіями, які, згідно з умовою, будемо позначати: “успіх” = “лампочка протягом тижня не перегорить”; “неуспіх” = “лампочка протягом тижня перегорить”. Отже, маємо схему Бернуллі з $n = 5$ і ймовірностями “успіху” $p = 0,9$ та “неуспіху” $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$.

а) Тут кількість “успіхів” $k = 4$, тому за (3.3) шукана ймовірність дорівнює

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^{5-4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = 5 \cdot 0,6561 \cdot 0,1 = 0,32805 \approx 0,328.$$

б) Тут кількість “успіхів” $k \geq 4$, тобто $k = 4$ або $k = 5$, причому ці події несумісні, тому за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій шукана ймовірність дорівнює сумі $P_5(4) + P_5(5)$. Ймовірність $P_5(4) \approx 0,328$ було знайдено вище, а ймовірність

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^{5-5} = 1 \cdot 0,6561 \cdot 1 = 0,59049 \approx 0,59.$$

Тому $P_5(4) + P_5(5) \approx 0,328 + 0,59 = 0,918$.

3.2.1. Граничні теореми у схемі Бернуллі

При великих значеннях n і k обчислення за формулою Бернуллі стають дуже складними. Тому використовують асимптотичні (тобто наближені, точність яких зростає зі зростанням n і k) формули.

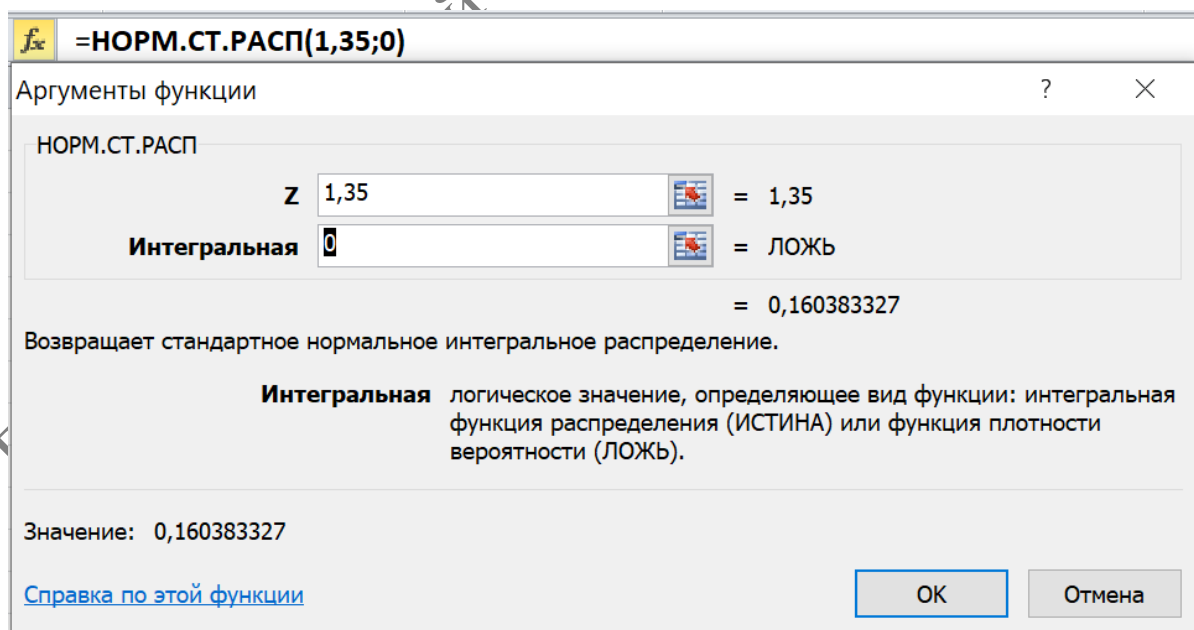
Теорема 3.4. Локальна теорема Муавра–Лапласа

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів та ймовірністю “успіху” p . Тоді при **великих**⁵ n ймовірність того, що “успіх” з’явиться точно k разів, обчислюють за асимптотичною формулою:

$$P_n(k) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (3.4)$$

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, табульована⁶.

Зауваження 2. Значення функції Гауса можна знайти за допомогою прикладних програм. Наприклад, у програмі Microsoft Excel використовується функція $\varphi(x) = \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x; 0)$:



⁵ Бажано, щоб: $n > 30$ і $npq > 20$.

⁶ Тобто її значення знаходять зі спеціальної таблиці. Див. Таблицю 1 в Додатку 1 цього посібника.

- Але при наближенні p (або q) до 0 точність формули (3.4) погіршується.

Для таких ситуацій є спеціальна асимптотична формула Пуассона:

Теорема 3.5. Формула Пуассона для малоймовірних подій

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів, причому

- кількість експериментів n є **великим**⁷ числом,
- ймовірність “успіху” дорівнює **малому**⁸ числу p ,
- але величина $\lambda = np$ є константою.

Тоді ймовірність того, що “успіх” з’явиться точно k разів, дорівнює:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (3.5)$$

Зауваження 3. Якщо близьким до 0 є ймовірність «неуспіху» q , то для використання теореми Пуассона варто перепозначити події «успіх» та «неуспіх», щоб ймовірність «успіху» p була малим числом.

- Якщо цікавить кількість “успіхів” у схемі Бернуллі з певного діапазону, то крім точної формули Бернуллі (3.3) доцільно використовувати таку:

Теорема 3.6. Інтегральна теорема Муавра–Лапласа

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів, ймовірність події “успіх” дорівнює p . Тоді при **великих**⁹ n ймовірність того, що подія “успіх” з’явиться від k_1 разів до k_2 разів обчислюють за асимптотичною формулою:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (3.6)$$

де $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – функція

Лапласа¹⁰, табульована.

⁷ Бажано: $n > 30$; $npq \leq 9$.

⁸ Бажано: $p \leq 0,1$.

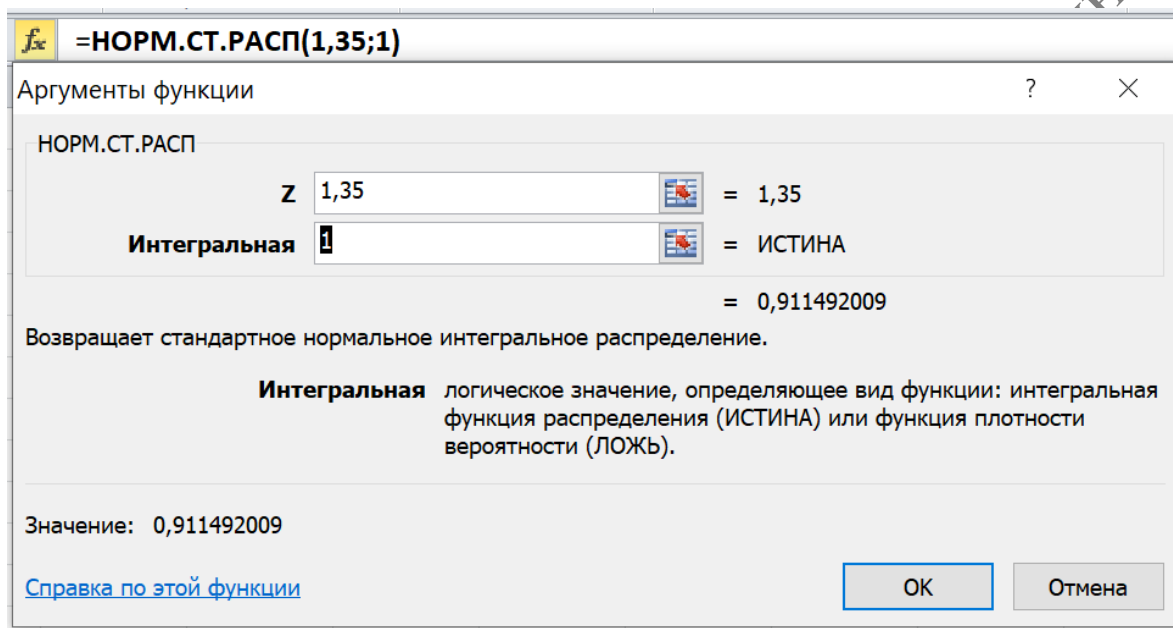
⁹ Бажано: $n > 30$ [краще $n > 50$] і $npq > 20$.

¹⁰ Її значення знаходять зі спеціальної таблиці. Див. Таблицю 2 в Додатку 1 цього посібника.

Зауваження 4. Часто розглядають так звану «розширену функцію Лапласа»

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Значення $\bar{\Phi}(x)$ можна знайти за допомогою прикладних програм. У Microsoft Excel для цього є функція НОРМ.СТ.РАСП(x ; 1):



Звідси маємо спосіб знаходження в Microsoft Excel функції Лапласа:

$$\Phi(x) = \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x; 1) - 0,5.$$

Приклад 3. У продукції фабрики 75 % деталей вищого сорту. Беруть партію в 400 деталей. Знайти ймовірність того, що в цій партії деталей вищого сорту буде: а) точно 305 шт.; б) від 280 до 330 шт.

Розв'язання. Деталі одна на іншу не впливають, отже, маємо 400 незалежних експериментів – якість першої, ..., чотирьохсотї деталі з двома можливими подіями: “успіх” = “деталь вищого сорту”; “неуспіх” = “деталь не вищого сорту”. Отже, маємо схему Бернуллі з $n = 400$ і ймовірностями “успіху” $p = 0,75$ та “неуспіху” $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$. Оскільки кількість експериментів – велике число, будемо користуватися формулами (3.4) та (3.6).

а) Тут кількість “успіхів” $k = 305$, тому за (3.4) шукана ймовірність

$$P_{400}(305) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{75}}, \text{ де } x = \frac{305 - 400 \cdot 0,75}{\sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{5}{\sqrt{75}} \approx 0,58.$$

Тоді, з використанням Таблиці 1, маємо

$$P_{400}(305) = \frac{\varphi(0,58)}{\sqrt{75}} = \frac{0,3372}{\sqrt{75}} \approx 0,039.$$

б) Тут кількість “успіхів” $280 \leq k \leq 330$, тому за (3.6) шукана ймовірність.

$$P_{400}(280 \leq k \leq 330) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{де } x_2 = \frac{330 - 400 \cdot 0,75}{\sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{30}{\sqrt{75}} \approx 3,46, \quad x_1 = \frac{280 - 400 \cdot 0,75}{\sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = -\frac{20}{\sqrt{75}} \approx -2,31,$$

тобто, за властивостями функції Лапласа,

$$\begin{aligned} P_{400}(280 \leq k \leq 330) &= \Phi(3,46) - \Phi(-2,31) = \\ &= \Phi(3,46) + \Phi(2,31) = 0,49973 + 0,4896 \approx 0,989 \end{aligned}$$

3.2.2. Наслідки граничних теорем у схемі Бернуллі

Наслідок 1. Оцінка ймовірності відхилення відносної частоти “успіху” від теоретичної ймовірності p на задану величину δ .

Нехай маємо n незалежних експериментів за схемою Бернуллі, ймовірність події “успіх” дорівнює p . Тоді для великих n

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right\} = 2\Phi\left(\delta \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наслідок 2. Кількість експериментів n , необхідних для наближення із заданою точністю δ та надійністю β теоретичної ймовірності “успіху” p відносною частотою “успіху”.

Постановка задачі. Нехай маємо послідовність експериментів за схемою Бернуллі, з ймовірністю події “успіх” рівною p . Скільки експериментів n треба провести, щоб відносна частота “успіху” $\frac{k}{n}$ з ймовірністю β відрізнялася від теоретичної ймовірності “успіху” не більше, ніж на δ ?

Це **ціле** число n знаходять як найменше число, для якого виконується:

$$\Phi(2\delta \cdot \sqrt{n}) \geq \frac{\beta}{2}.$$

Наслідок 3. Кількість експериментів n для спостереження хоча б одного “успіху” із заданою ймовірністю P .

Постановка задачі. Нехай маємо серію з n експериментів за схемою Бернуллі, з ймовірністю “успіху” p . Скільки експериментів треба провести, щоб із заданою ймовірністю P подія “успіх” відбулась хоча б один раз?

Це **ціле** число n знаходять з умови:

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \quad (3.7)$$

Наслідок 4. Найімовірніше число появи події (мода) у схемі Бернуллі

Означення 3. Найімовірніше число появи події (мода) у схемі Бернуллі з n експериментів – це така кількість “успіхів”, ймовірність якої не менша ймовірності кожного з решти можливих кількостей “успіхів” у послідовності з n експериментів.

Найімовірніше число появи події (мода) знаходиться як таке **ціле** число k_0 , що задовольняє нерівності

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (3.8)$$

Питання та задачі до теми

1. За яких умов набір подій називають повною групою подій?
2. Сформулюйте формулу повної ймовірності та формулу Баєса. Як відрізнити ситуації, в яких застосовуються ці формули?
3. За яких умов серію експериментів називають експериментами за схемою Бернуллі?
4. У чому відмінності локальної та інтегральної теорем Муавра–Лапласа?

5. В яких випадках використовують формулу Пуассона?
6. Що таке функція Гауса і функція Лапласа та як знайти їх значення?
7. Пригадайте кілька наслідків із граничних теорем у схемі Бернуллі та поясніть їх практичний сенс.

Задача 1. Двигун може працювати в нормальному і форсованому режимах. Двигун працює в нормальному режимі 80 % часу, а у форсованому – 20 %. Ймовірність поломки двигуна при нормальному режимі дорівнює 0,01, а при форсованому – 0,04. Знайти ймовірність поломки двигуна за час роботи.

Задача 2. У першій скриньці є 8 білих і 7 чорних куль, а у другій – 4 білих і 4 чорних. З першої скриньки випадково дістають 2 кулі і перекладають їх у другу скриньку. Після цього з другої скриньки дістають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі кулі, вийняті з другої скриньки, білі.

**Задача 3.* У першій урні знаходиться 4 білих куль і 6 чорних, а в другій урні – 6 білих куль і 9 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кулі і перекладають їх у третю урну. Потім із третьої урни навмання виймають одну кулю. А) Яка ймовірність того, що ця куля – біла? Б) Відомо, що з третьої урни вийняли білу кулю. Яка ймовірність того, що вона належала першій урні?

Задача 4. Ймовірність запізнення поїзда становить 0,2. Яка ймовірність того, що за 200 днів поїзд запізниться: а) 30 разів; б) від 10 до 50 разів?

Задача 5. Під час епідемії ймовірність захворіти грипом протягом 1 дня дорівнює 0,005. В установі працює 300 людей. Яка ймовірність, що протягом дня захворіє: а) точно 3 людини; б) від 1 до 5 людей; в) ніхто не захворіє?

Задача 6. В продукції фабрики 75 % деталей вищого гатунку. Беруть партію в 400 деталей. Знайти ймовірність того, що в цій партії відносна частота деталей вищого гатунку складатиме від 70 % до 80 %.

**Задача 7.* Серед продукції фабрики певний, невідомий наперед відсоток (позначимо A %) становлять деталі вищого гатунку. Скільки деталей треба взяти, щоб з ймовірністю не меншою за 0,9 відносна частота (у відсотках) деталей вищого гатунку серед них відхилялась від p не більше, ніж на 5 %?

Тема 4. Випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних випадкових величин

4.1. Випадкові величини, їх типи. Дискретні випадкові величини

Означення 1. Функція, що визначена на просторі елементарних подій Ω (тобто ставить у відповідність будь-якому елементу Ω певне число), називається випадковою величиною.

Якщо множина значень випадкової величини є скінченною, то така випадкова величина називається дискретною. Якщо ж випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку, то випадкова величина називається неперервною.

Випадкові величини зазвичай позначають великими латинськими літерами – X, Y, Z , а їх можливі значення відповідними малими: x, y, z .

Означення 2. Співвідношення між можливими значеннями дискретної випадкової величини та їх ймовірностями називається законом розподілу. Його можна задати *таблично, аналітично і графічно*. Найчастіше використовують табличний спосіб завдання закону розподілу, який називають рядом розподілу і подають у вигляді таблиці

Значення X	x_1	x_2	...	x_n
Ймовірність P	p_1	p_2	...	p_n

Тут у першому рядку записані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини X , а в другому рядку – відповідні ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення x_i : $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

• Важливо, щоб “зійшлась” контрольна сума (її називають ще умова нормування):

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (4.1)$$

Щоб надати закону розподілу більш наочного вигляду, часто вдаються до його **графічного зображення**. По осі абсцис відкладаються всі можливі значення випадкової величини, а по осі ординат відповідні ймовірності цих значень. Отримані точки сполучаються відрізками прямих. Така фігура називається **багатокутником розподілу**. Багатокутник розподілу, так само як і закон розподілу, повністю характеризує випадкову величину. Він є графічною формою закону розподілу.

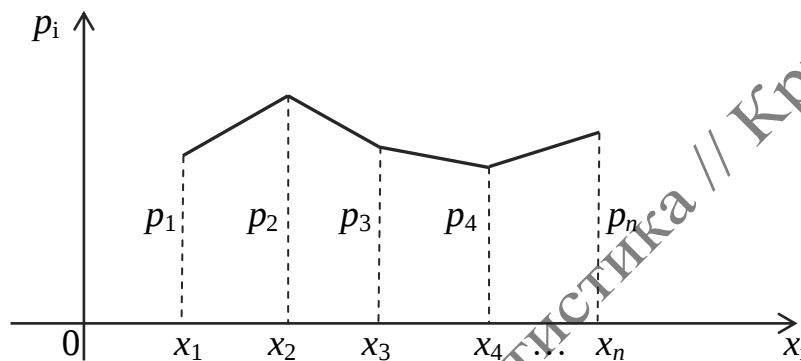


Рис. 4.1. Багатокутник розподілу

4.2. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Розглянемо основні закони розподілу дискретних випадкових величин. Найпростіші з них отримують зі схеми Бернуллі. Отже, будемо розглядати схему Бернуллі з n незалежних експериментів. Ймовірність “успіху” p , ймовірність “неуспіху” $q = 1 - p$.

Означення 3. Якщо дискретна випадкова величина набуває лише цілих невід’ємних (або натуральних) значень, то її називають **цілочисловою**.

4.2.1. Біноміальний закон розподілу

Означення 4. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний (біномний) закон розподілу з параметрами n та p , якщо вона дорівнює кількості успіхів в n експериментах за схемою Бернуллі з ймовірністю “успіху” p , тобто набуває $n + 1$ (від 0 до n) можливих значень з ймовірностями, обчисленими за формулою Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad (4.2)$$

для $i = 0, 1, \dots, n$.

- Позначають $X \sim \text{Bi}(n, p)$.

Отже, закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Числові характеристики біноміального розподілу (див. далі):

$$MX = \sum_{i=0}^n x_i p_i = np, \quad DX = \sum_{i=0}^n (x_i - MX)^2 p_i = npq. \quad (4.3)$$

- Біноміальний розподіл з параметрами $n=1$ та p називають розподілом Бернуллі і позначають $X \sim \text{Be}(p)$.

Приклад 2. Підкидають монету 3 рази. Випадкова величина X = “кількість гербів, що випало”. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X .

Розв’язання. Підкидання монети – незалежні, ймовірність “успіху” – випадіння герба – $p = 1/2$; ймовірність “неуспіху” $q = 1 - p = 1/2$; отже, випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. Зрозуміло, що випадкова величина X може набувати лише значень 0, 1, 2 або 3. Тому, за формулою Бернуллі (4.2):

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

***Зауваження 1.** Розглянемо узагальнення схеми Бернуллі – “замість монети – кубик”: нехай маємо n незалежних експериментів, у кожному з яких може настати лише одна з k подій:

подія “успіх₁” з ймовірністю p_1 ,

подія “успіх₂” з ймовірністю p_2 ,

...,

подія “успіх_k” з ймовірністю p_k ,

причому $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Тоді про випадковий вектор $X = (x_1; x_2; \dots; x_k)$, координати якого дорівнюють кількості відповідних “успіхів”, говорять, що це поліноміальний закон розподілу і ймовірності випадкового вектора X набути певного значення обчислюють так:

$$P\{X = (m_1; m_2; \dots; m_k)\} = P\{x_1 = m_1; \dots; x_k = m_k\} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \cdot p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}.$$

тут $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Зрозуміло, що біноміальний закон розподілу є окремим випадком поліноміального для кількості різних “успіхів” $k = 2$.

4.2.2. Геометричний закон розподілу

Означення 5. Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу з параметром p , якщо вона дорівнює **кількості експериментів до настання першого “успіху”** у схемі Бернуллі з ймовірністю “успіху” p , тобто набуває будь-яких натуральних значень з ймовірностями, обчисленими як наслідок формули Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = pq^{i-1}, \quad (4.4)$$

для $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

- Пояснення формули (4.4). Розглянемо подію, ймовірність якої шукаємо $\{X = i\} = \{\text{перший "успіх" відбудеться в } i\text{-му експерименті}\} = \{H \dots H Y\}$,

$$p_i = P\{X = i\} = P\{H \dots H Y\} = P\{H \dots H\} P\{Y\} = P_{i-1}(0) P_1(1) = pq^{i-1}.$$

- Позначають $X \sim \text{Ge}(p)$ або $X \sim \text{Geom}(p)$.

Отже, закон розподілу такої випадкової величини має вигляд:

X	1	2	...	k	...
P	p	pq	...	pq^{k-1}	...

Числові характеристики геометричного розподілу (див. далі):

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{1}{p}, \quad DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i = \frac{q}{p^2}. \quad (4.5)$$

Приклад 3. 3 гармати стріляють у мішень до першого влучення. Для кожного пострілу ймовірність влучення $p = 0,6$. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “кількість зроблених пострілів”. Знайти ймовірність того, що знадобиться: а) точно 3 постріли, б) не більше 3 пострілів.

Розв’язання. Результат кожного пострілу – це незалежні експерименти; в кожному експерименті подія “успіх” = “влучення в мішень”; ймовірності “успіху” $p = 0,6$, “неуспіху” $q = 1 - p = 0,4$.

Отже, маємо схему Бернуллі, і випадкова величина X = “кількість зроблених пострілів” має геометричний закон розподілу. За формулою (4.4):

X	1	2	...	k	...
P	0,6	0,24	...	$0,6 \cdot 0,4^{k-1}$	...

$$\text{а) } p_3 = P\{X = 3\} = pq^{3-1} = 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096;$$

$$\text{б) } p_1 + p_2 + p_3 = 0,6 \cdot 0,4^0 + 0,6 \cdot 0,4^1 + 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,6 + 0,24 + 0,096 = 0,936.$$

Узагальненням геометричного розподілу є такий розподіл:

***Означення 6.** Випадкова величина X має від’ємний біноміальний закон розподілу з параметрами k і p , якщо вона дорівнює **кількості експериментів до настання k -ого “успіху”** у схемі Бернуллі з ймовірністю “успіху” p , тобто набуває цілих значень з ймовірностями, обчисленими як наслідок формули Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = C_{i-1}^{k-1} p^k q^{i-k}, \quad (4.6)$$

для $i = k, k+1, \dots, n, \dots$

- Позначають $X \sim \text{NB}(k, p)$.
- Від’ємний біноміальний розподіл називають ще розподілом Паскаля.

Числові характеристики від’ємного біноміального розподілу:

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{kq}{p}, \quad DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i = \frac{kq}{p^2}. \quad (4.7)$$

4.2.3. Пуассонівський закон розподілу

Нехай ймовірність події “успіх” дорівнює **малому** числу p , а кількість експериментів n є **великим** числом: $p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, але так, що величина $\lambda = np$ є **константою**¹¹.

Означення 7. Говорять, що цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу (розподіл Пуассона) з параметром λ , якщо вона дорівнює **кількості малоїмовірних “успіхів” в n експериментах за схемою Бернуллі**, тобто ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона:

$$p_i = P\{X = i\} = P_n(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad (4.8)$$

де, повторимо, число $\lambda = n \cdot p$, а $i = 0, \dots, n, \dots$

- Позначають $X \sim \Pi(\lambda)$ або $X \sim \Pi(n, p)$.

Тобто закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	0	1	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

- Пуассонівський закон розподілу є узагальненням біноміального закону розподілу для великого числа експериментів і малоїмовірних “успіхів”.

Числові характеристики такої випадкової величини (див. далі):

$$MX = \lambda, \quad DX = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \quad (4.9)$$

4.2.4. Гіпергеометричний закон розподілу

Розглянемо таку задачу: маємо партію в N деталей, серед яких десь M мають певну ознаку (наприклад, є стандартними), а решта – не мають (відповідно, є бракованими). Вибираємо з цієї партії n деталей.

¹¹ Бажано: $p \leq 0,1$; $n > 30$; $npq \leq 9$

Означення 8. Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу з параметрами N, M та n , якщо вона дорівнює **кількості стандартних деталей з n навмання вибраних**, а тому ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_n(m) = P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad (4.10)$$

де із постановки задачі: $N > M, N > n, M \geq m, N - M \geq n - m, m \leq \min(n, M)$.

- Позначають $X \sim \text{HG}(N, M, n)$.

Пояснення формули. Формула (4.10) обчислюється за правилами комбінаторики: в чисельнику – загальна кількість комбінацій, якими можна вибрати m стандартних деталей із всіх наявних M стандартних та вибрати $n-m$ бракованих деталей із всіх наявних $N-M$ бракованих; у знаменнику – загальна кількість комбінацій, якими можна вибрати n деталей із загального числа N деталей. Тому закон розподілу такої випадкової величини має вигляд:

X	0	1	...	m	...	n
P	$\frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{M \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^n}{C_N^n}$

Числові характеристики (див. далі):

$$MX = \frac{1}{C_N^n} \sum_{m=0}^n m C_M^m C_{N-M}^{n-m}, \quad DX = \frac{1}{C_N^n} \sum_{m=0}^n m^2 C_M^m C_{N-M}^{n-m} - (MX)^2. \quad (4.11)$$

Приклад 4. В ящику 10 деталей, із яких яких 7 стандартних, а решта – браковані. Навмання беруть 3 деталі. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “кількість стандартних деталей із трьох взятих”.

Розв’язання. Отже, випадкова величина $X \sim \text{HG}(9, 7, 3)$. Можливих значень випадкової величини X є 4 штуки: 0, 1, 2, 3. Тому за формулою (4.10) маємо такий ряд розподілу:

X	0	1	2	3
P	$\frac{C_{10-7}^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$	$\frac{7 \cdot C_{10-7}^{3-1}}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}$	$\frac{C_7^2 \cdot C_{10-7}^{3-2}}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}$	$\frac{C_7^3 \cdot C_{10-7}^{3-3}}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}$

Зауваження 2. Для випадкової величини $X \sim \text{HG}(N, M, n)$ не працює схема Бернуллі: n деталей витягаються без повернення, і для кожної наступної деталі змінюється ймовірність “успіху”. Проте для великого N і малої вибірки (такої, що $n < N/10$, $n < M/10$, $n < (N-M)/10$) зміна цих ймовірностей досить незначна, тож ймовірності, обчислені за гіпергеометричним законом, дуже близькі до відповідних ймовірностей, обчислених для біноміального закону з параметрами n і $p = \frac{M}{N}$.

Зауваження 3. У гіпергеометричний закон розподілу входять три параметри: N , M та n . У практичних задачах часто вводять параметр “ ρ ” $\rho = \frac{M}{N}$ і розглядають задачу лише з двома параметрами: ρ та n .

Проте для обчислень за наведеними вище формулами необхідно знати числа N та M . Для цього вводять довільне велике число N , а потім обчислюють значення $M = \rho N$, причому введене N має бути настільки великим, щоб виконувалися нерівності: $N > n$, $M \geq n$, $N - M \geq n$.

4.2.5. Рівномірний (дискретний) закон розподілу

Означення 9. Дискретна випадкова величина X має рівномірний (дискретний) закон розподілу з параметром k , якщо вона набуває k штук можливих значень з однаковими ймовірностями:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.12)$$

Тобто закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
P	$1/k$	$1/k$	$\dots$	$1/k$

Числові характеристики (див. далі):

$$MX = \sum_{i=1}^k x_i p_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \quad DX = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2 - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \right)^2. \quad (4.13)$$

Приклад 5. Кубик підкидають 1 раз. Випадкова величина X = “кількість очок, що випало”. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X .

Розв’язання. Отже, випадкова величина X має рівномірний закон розподілу. Можливих значень випадкової величини X є 6 шт.: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тому за (4.10) маємо такий ряд розподілу:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Питання та задачі до теми

1. Що називають випадковою величиною?
2. Які види випадкових величин бувають?
3. Яку випадкову величину називають цілочисловою?
4. Що таке закон розподілу дискретної випадкової величини? Які способи завдання закону розподілу бувають?
5. Що називають рядом розподілу і як його будують?
6. Що таке умова нормування? З яких причин вона виникає?
7. Як будують багатокутник розподілу?
8. У чому полягають відмінності між біноміальним, геометричним та пуассонівським законом розподілу?

9. В яких практичних задачах виникають випадкові величини, розподілені за гіпергеометричним законом розподілу?
10. Що таке потік подій і які властивості він може мати?

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	1	2	5	9
P	0,2	0,5	p	0,2

Знайти невідому ймовірність p . Побудувати багатокутник розподілу.

Задача 2. Два стрільці роблять по одному пострілу. Ймовірність влучити для першого стрільця становить 0,6, для другого – 0,8. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “число влучень у мішень”.

Задача 3. Гральний кубик підкидається доти, доки не випаде 6 очок. Знайти закон розподілу випадкової величини X = “кількість підкидань”.

Задача 4. Перевірити для ряду розподілу геометрично розподіленої випадкової величини умову нормування $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Задача 5.* 3 гармати стріляють до двох підряд влучень. Для кожного пострілу ймовірність влучення $p = 0,6$. Знайти ймовірність того, що знадобиться: а) точно 3 постріли; б) не більше 3 пострілів.

Задача 6. Завод відправив замовнику 5 000 виробів. Ймовірність виробу розбитися в дорозі становить 0,0002. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “кількість виробів, що розбилися в дорозі” (обмежитися кількістю від 0 до 5).

Задача 7. Ймовірність того, що платіж поступить від клієнта вчасно, становить 0,92. Знайдіть ймовірність, того, що із 50 платежів прострочених буде а) 3 шт.; б) від 2 до 5 шт.; в) не більше 4 шт.

Тема 5. Функція розподілу та щільність розподілу випадкових величин

5.1. Функція розподілу випадкових величин

Зауваження 1. Пригадаємо, що випадкова величина – це функція, що визначена на просторі елементарних подій Ω , тобто $X = X(\omega)$.

Тому надалі, коли буде йтися про ймовірність, що пов'язана з деякою випадковою величиною X , буде йтися про ймовірність відповідних елементарних подій ω :

$$P\{X \leq a\} = P\{\omega : X(\omega) \leq a\}.$$

Означення 1. Випадкова величина X називається дискретною, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Приклади дискретних випадкових величин.

1. Кількість бракованих деталей в партії.
2. Кількість пострілів до першого влучення.

Означення 2. Випадкова величина X називається неперервною, якщо множина її можливих значень є деяким інтервалом (скінченним або нескінченним) числової прямої.

Приклади неперервних випадкових величин.

1. Час безвідмовної роботи обладнання.
2. Відхилення розмірів деталі від стандарту.

Означення 3. Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F_X(x)$, що при кожному значенні x дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуде значень, менших або рівних за x :

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad (5.1)$$

$F_X(x)$ ще називають інтегральною функцією розподілу.

• Функція розподілу – це універсальний спосіб визначення випадкової величини: як дискретної, так і неперервної.

Властивості функції розподілу

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

2. $F_X(x)$ – неспадна функція на $(-\infty; +\infty)$, тобто при $x_1 < x_2$ маємо

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

3. $F_X(x)$ – неперервна справа функція, тобто

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x).$$

4. $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$,

$$F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

5. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал $(a; b]$ (набуде значень з цього інтервалу), дорівнює (при $a < b$):

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).} \quad (5.2)$$

5.1. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать лише інтервалу $(a; b)$, то $F_X(x) = 0$ при $x \leq a$ і $F_X(x) = 1$ при $x \geq b$.

5.2. Для неперервної випадкової величини X включення або невключення точки не впливає на результат:

$$P\{X < a\} = P\{X \leq a\} = F_X(a).$$

5.3. Для неперервної випадкової величини X і для довільного числа a

$$P\{X = a\} = P\{X \leq a\} - P\{X < a\} = 0.$$

6. Ймовірність протилежної події

$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

7. Для дискретної випадкової величини X такої, що $p_i = P\{X = a_i\}$

$$F_X(x) = \sum_{i: a_i \leq x} p_i.$$

8. Залежно від закону розподілу графік $F_X(x)$ може бути ступінчастим (східчастим), неперервним або неперервним зі стрибком (стрибками).

5.2. Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу

Використовуючи поняття функції розподілу, можемо уточнити означення.

Означення 2.1. Випадкова величина називається неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною функцією.

Неперервні випадкові величини поділяються на два класи: сингулярні¹² випадкові величини та абсолютно неперервні випадкові величини.

Означення 4. Випадкова величина X називається абсолютно неперервною, якщо існує борелева інтегрована функція $f_X(x)$, така, що функція розподілу $F_X(x)$ для будь-якого x дорівнює

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy. \quad (5.3)$$

Функцію $f_X(x)$ називають щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X .

Поняття щільності часто формують у спрощеному (проте зручнішому для використання) вигляді.

Означення 4.1. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X – це похідна від її функції розподілу:

$$f_X(x) = (F_X(x))'. \quad (5.3.1)$$

$f_X(x)$ ще називають диференціальною функцією розподілу.

Графік щільності $f_X(x)$ називають кривою розподілу X .

- Якщо немає двозначності, індекс X у щільності не пишуть: $f(x)$.

Властивості щільності

1. $f_X(x) \geq 0$.

2. Умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (5.4)$$

¹² Досить рідкісний клас випадкових величин

- Зверніть увагу, що в умові нормування – невласний інтеграл.

2.1. Якщо випадкова величина X визначена лише на інтервалі $(a; b)$,

то умова нормування:
$$\int_a^b f_X(x) dx = 1. \quad (5.4.1)$$

3. Функція розподілу випадкової величини X виражається через щільність

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy.$$

4. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал $(a; b)$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx. \quad (5.5)$$

5. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать лише інтервалу $(a; b)$, то $f_X(x) = 0$ при $x \leq a$ і при $x \geq b$.

Приклад 2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+2}, & \text{при } -2 < x \leq 7 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

Знайти: а) величину a та функцію розподілу $F_X(x)$; б) $P(-1 < X < 2)$;

Розв'язання. а) Величину a знайдемо з умови нормування (5.4.1):

$$a \int_{-2}^7 \sqrt{x+2} dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{18}.$$

За властивостями щільності знаходимо функцію розподілу $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \frac{1}{18} \int_{-\infty}^x \sqrt{y+2} dy = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2 \\ \frac{1}{27} (x+2)^{\frac{3}{2}} & \text{при } -2 \leq x \leq 7; \\ 1 & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

б) За знайденою функцією розподілу та формулою (5.2)

$$P(-1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-1) = \frac{1}{27} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{27} (8 - 1) = \frac{7}{27} \approx 0,26.$$

5.3. Функції випадкового аргументу

Постановка задачі. Маємо випадкову величину X з функцією розподілу $F_X(x)$ або щільністю $f_X(x)$, та задану не випадкову функцію $g(x)$. Розглянемо випадкову величину $Y: Y = g(X)$. Як знайти розподіл випадкової величини Y – функцію розподілу $F_Y(x)$ або щільність розподілу $f_Y(x)$?

Означення 5. Функцією випадкового аргументу X називають таку випадкову величину Y , яка набуває значення $y = g(x)$ щоразу, коли $X = x$, де $g = g(\cdot)$ є не випадковою функцією. Позначають $Y = g(X)$.

Якщо X є дискретною випадковою величиною, то і функція випадкового аргументу $Y = g(X)$ буде дискретною випадковою величиною; якщо X є неперервною випадковою величиною, то і $Y = g(X)$ буде неперервною.

а) Якщо **дискретну** випадкову величину X задано рядом розподілу,

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

то випадкова величина $Y = g(X)$ теж буде задана рядом розподілу (згадаємо, що для дискретної випадкової величини цього достатньо для отримання $F_Y(x)$).

Для отримання цього ряду розподілу побудуємо таку допоміжну таблицю:

$g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	...	$g(x_n)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Потім потрібно впорядкувати перший рядок за зростанням та врахувати можливість того, що співпадуть значення функції $g(x)$ для різних x (тобто коли $g(x_i) = g(x_j)$), тоді треба в таблиці для цього значення Y додати всі відповідні ймовірності: $p_i + p_j$.

Приклад 3. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу.

Знайти ряд розподілу та функцію розподілу випадкової величини $Y = 3X^2$.

X	-3	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Розв'язання. З умови будемо мати таку таблицю:

$3X^2$	27	3	0	3	12	27
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Тому отримаємо такий ряд розподілу випадкової величини $Y = 3X^2$:

Y	0	3	12	27
P	0,2	0,3	0,3	0,2

б) Для **неперервної** випадкової величини X можливі різні ситуації, залежно від властивостей функції $g(x)$.

Нехай випадкову величину X задано функцією розподілу $F_X(x)$ (або щільністю $f_X(x)$). Розглянемо випадкову величину $Y = g(X)$, де $g(x)$ – деяка задана функція.

Теорема 5.1. (для монотонної функції $g(x)$)

Якщо $g(x)$ – монотонна функція, для якої існує обернена $g^{-1}(x)$, то функція розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ випадкової величини Y будуть такими:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(g(X) \leq x) = P(X \leq g^{-1}(x)) = F_X(g^{-1}(x)), \quad (5.6)$$

$$f_Y(x) = (F_Y(x))' = (F_X(g^{-1}(x)))' = f_X(g^{-1}(x)) \cdot |(g^{-1}(x))'|. \quad (5.7)$$

Зауваження 2. (для довільної функції $g(x)$)

Якщо $g(x)$ – довільна функція, для якої існує обернена $g^{-1}(x)$, то функцію розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ випадкової величини $Y = g(X)$ знаходять так: $F_Y(x) = P(Y \in (-\infty; x)) = P(g(X) \in (-\infty; x)) = P(X \in g^{-1}(-\infty; x))$,

$$f_Y(x) = (F_Y(x))'.$$

Тепер пояснимо ідею знаходження функції розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ функції випадкового аргументу $Y = g(X)$ для неперервної випадкової величини X на прикладах.

Зауваження 3. Зверніть увагу, що для неперервної випадкової величини завжди **спочатку** знаходять функцію розподілу $F_Y(x)$, а **потім** за знайденою функцією розподілу – щільність $f_Y(x)$.

Приклад 4. Розглянемо неперервну випадкову величину X , що задана своєю щільністю $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Розглянемо випадкову величину $Y = X^2$ та знайдемо її щільність $f_Y(x)$.

Розв'язання. Дослухаємося до Зауваження 3 і знайдемо спочатку функцію розподілу $F_Y(x)$. Отже, за означенням функції розподілу

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \leq x\} = P\{X^2 \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\}, & x \geq 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x} + 0), & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, тепер можемо знайти щільність $f_Y(x)$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= (F_Y(x))' = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (F_X(y))' \Big|_{y=\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' - (F_X(y))' \Big|_{y=-\sqrt{x}} \cdot (-\sqrt{x})', & x \geq 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f_X(-\sqrt{x}), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})), & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

З умови нам відоме $f_X(x)$, тепер можемо знайти значення $f_X(\sqrt{x})$ і $f_X(-\sqrt{x})$ та підставити їх. Отримаємо:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Питання та задачі до теми

1. Що називають функцією розподілу? Для яких випадкових величин її розглядають?
2. Як знайти функцію розподілу для дискретної випадкової величини?
3. Дайте означення щільності розподілу. Для яких випадкових величин її розглядають?
4. У чому полягає сенс умови нормування?
5. Чи можна за щільністю знайти функцію розподілу? Як це зробити?
6. Як знайти ймовірність протилежної події за допомогою щільності?
7. Як знайти щільність функції випадкового аргументу?

Задача 1. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

X	-4	2	6	13
P	0,3	0,1	0,4	p

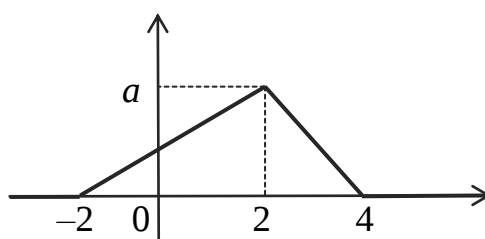
Знайти величину p . Знайти функцію розподілу $F_X(x)$. Побудувати її графік.

Задача 2. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -3 \\ \frac{(x+3)^2}{49}, & \text{при } -3 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

Необхідно: а) побудувати графік функції розподілу $F_X(x)$; б) знайти $P(-1 < X < 2)$; в) знайти рівняння щільності $f_X(x)$ та побудувати її графік.

Задача 3. Неперервну випадкову величину X задано щільністю. Знайти значення параметру a та $P(-1 < X < 3)$, виходячи з геометричних міркувань.



Тема 6. Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу дає повну інформацію про випадкову величину, але на практиці зручніше користуватися лише певними числовими характеристиками випадкової величини.

6.1. Математичне сподівання

Означення 1. Математичне сподівання випадкової величини X позначається¹³ MX і обчислюється за формулою:

а) для **дискретної** випадкової величини X , що задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (6.1)$$

б) для **неперервної** випадкової величини X , заданою щільністю $f_X(x)$,

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (6.2)$$

б.1) якщо **всі можливі** значення випадкової величини X належать **лише** інтервалу $(a; b)$ ¹⁴, то

$$MX = \int_a^b x f_X(x) dx. \quad (6.2.1)$$

• Математичне сподівання – синонім “середнє значення”.

Властивості математичного сподівання :

1. $MC = C$, де $C - \text{Const.}$
2. $M(CX) = C \cdot MX$, де $C - \text{Const.}$
3. $M(X \pm C) = MX \pm C$, де $C - \text{Const.}$

¹³ Математичне сподівання ще може позначатися $M(X)$, $M[X]$ або, в іншомовній літературі, EX , $E(X)$.

¹⁴ У такій ситуації цей інтервал $(a; b)$ називають носієм випадкової величини.

4. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$.

5. Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

6. Для невідомої функції $g(x)$

$$Mg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (6.3)$$

Приклад 1. Знайти математичне сподівання MX дискретної випадкової величини X , що задана рядом розподілу:

X	-4	2	6	13
P	0,3	0,1	0,4	p

Розв'язання. Спочатку знайдемо невідомий параметр p . Знаходимо його з умови нормування для дискретних випадкових величин (4.1):

$$0,3 + 0,1 + 0,4 + p = 1, \text{ отже, } p = 1 - 0,3 - 0,1 - 0,4 = 0,2.$$

Далі для дискретної випадкової величини користуємося (6.1):

$$MX = -4 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,4 + 13 \cdot 0,2 = 4$$

Приклад 2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+2}, & \text{при } -2 < x \leq 7 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

Знайти математичне сподівання MX .

Розв'язання. У Прикладі 2 попередньої теми було знайдено значення

$$a = \frac{1}{18}, \text{ і } \int_{-2}^7 \sqrt{x+2} dx = \int_0^9 \sqrt{y} dy = 18. \text{ Тоді, аналогічно, за (6.2.1)}$$

$$MX = \int_a^b x f_X(x) dx = \frac{1}{18} \int_{-2}^7 x \sqrt{x+2} dx = \left| \begin{matrix} y = x+2 \\ dy = dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{18} \int_0^9 (y-2) \sqrt{y} dy = \frac{61,2}{18},$$

оскільки

$$\int_0^9 y \sqrt{y} dy = \int_0^9 y^{\frac{3}{2}} dy = 97,2 \quad \text{і} \quad \int_0^9 (y-2) \sqrt{y} dy = \int_0^9 y \sqrt{y} dy - 2 \int_0^9 \sqrt{y} dy = 61,2.$$

6.2. Дисперсія

Математичне сподівання дає мало інформації про випадкову величину. Тому розглядають й інші характеристики.

Означення 2. Дисперсія¹⁵ випадкової величини X позначається DX і дорівнює математичному сподіванню квадрату відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX :

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (6.4)$$

а) для **дискретної** випадкової величини X , заданої рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 p_i. \quad (6.5)$$

б) для **неперервної** випадкової величини X , заданої щільністю $f_X(x)$,

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f_X(x) dx. \quad (6.6)$$

б.1) якщо ж **усі можливі** значення неперервної випадкової величини X належать **лише** інтервалу $(a; b)$, то

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f_X(x) dx. \quad (6.6.1)$$

На практиці **важливою** для обчислень дисперсії є така **формула**:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \quad (6.7)$$

• Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно її середнього значення.

• В англomовних джерелах дисперсію DX називають словом «variance» (яке іноді перекладають як «варіація») і позначають: $\text{Var}(X)$; $\text{Var } X$ або $\text{var } X$.

¹⁵ Від грецького слова «розсіювання».

Властивості дисперсії

1. $DX \geq 0$; $DX = 0$, тоді і лише тоді, коли $X = \text{Const}$.
2. $D(CX) = C^2 \cdot DX$, де $C - \text{Const}$.
3. $D(X \pm C) = DX$, де $C - \text{Const}$.
4. Якщо випадкові величини X та Y незалежні¹⁶, то

$$D(X \pm Y) = DX + DY.$$

5. Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то

$$D(X \cdot Y) = DX \cdot DY + DX \cdot (MY)^2 + DY \cdot (MX)^2. \quad (6.8)$$

Ця формула може бути подана у вигляді, аналогічному до (6.7):

$$D(X \cdot Y) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2. \quad (6.8.1)$$

Дисперсія має розмірність квадрату одиниць виміру випадкової величини X , що незручно. Тому часто використовують таку числову характеристику:

Означення 3. Середнім квадратичним (або стандартним) відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії випадкової величини X :

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX}. \quad (6.9)$$

Приклад 3. Знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X з Прикладу 1.

Розв'язання. Знайдемо двома способами. За формулою (6.4) отримуємо:

$$DX = M(X - MX)^2 = (-4 - 4)^2 \cdot 0,3 + (2 - 4)^2 \cdot 0,1 + (6 - 4)^2 \cdot 0,4 + (13 - 4)^2 \cdot 0,2 = 64 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 81 \cdot 0,2 = 37,4$$

За формулою (6.7) отримуємо:

$$MX^2 = (-4)^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,1 + 6^2 \cdot 0,4 + 13^2 \cdot 0,2 = 16 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,4 + 169 \cdot 0,2 = 53,4;$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 53,4 - 4^2 = 53,4 - 16 = 37,4.$$

Значення співпали. Знайдемо $\sigma(X)$: $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{37,4} \approx 6,1$.

¹⁶ Насправді достатньо лише некорельованості випадкових величин (див. далі.)

Приклад 4. Знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X з Прикладу 2.

Розв'язання. Знайдемо за формулою (6.7). Використовуючи (6.3):

$$\begin{aligned} MX^2 &= \int_a^b x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{18} \int_{-2}^7 x^2 \sqrt{x+2} dx = \left| \begin{matrix} y = x+2 \\ dy = dx \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{18} \int_0^9 (y-2)^2 \sqrt{y} dy = \frac{1}{18} \int_0^9 (y^2 - 2y + 1) \sqrt{y} dy = \\ &= \frac{1}{18} \left(\underbrace{\int_0^9 y^2 \sqrt{y} dy}_{624,86} - 2 \underbrace{\int_0^9 y \sqrt{y} dy}_{97,2} + \underbrace{\int_0^9 \sqrt{y} dy}_{18} \right) = \frac{1}{18} \cdot 448,46 \approx 24,91, \end{aligned}$$

оскільки $\int_0^9 y^2 \sqrt{y} dy = \int_0^9 y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{2}{7} \cdot 2187 = \frac{4374}{7} \approx 624,86.$

Тоді дисперсія $DX = MX^2 - (MX)^2 = 24,91 - (3,4)^2 = 24,91 - 11,56 = 13,35$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{13,35} \approx 3,65$.

Означення 4. Для довільної неперервної випадкової величини X можна розглянути випадкову величину

$$Z = \frac{X - MX}{\sigma(X)}, \quad (6.10)$$

яку називають стандартною випадковою величиною. Про перехід від випадкової величини X до випадкової величини Z говорять “перейти в Z -шкалу”.

Важливою властивістю отриманої випадкової величини Z є те, що вона є безрозмірною, що дає можливість порівнювати випадкові величини, що мали різні одиниці вимірювання. Тому перехід в Z -шкалу часто використовують у практичних задачах контролю якості, надійності тощо, де

варто очікувати, що спостерігаємо реалізацію випадкових величин, розподілених за нормальним законом. Отримані випадкові величини Z теж є нормально розподіленими.

6.3. Асиметрія. Ексцес. Мода. Медіана

Узагальнимо поняття математичного сподівання і дисперсії.

Означення 5. Коефіцієнт асиметрії або просто асиметрія випадкової величини X – це число, що позначають і знаходять за формулою

$$As = AsX = As(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}. \quad (6.13)$$

Зауваження 2. Асиметрія характеризує те, наскільки симетрично випадкова величина X розподілена відносно свого середнього значення MX :

- якщо $AsX = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно свого математичного сподівання MX ;
- якщо $AsX > 0$, то випадкова величина X несиметрично розподілена відносно свого середнього значення MX , а далеко відхиляється від MX у додатній бік набагато частіше, ніж далеко відхиляється від MX у від’ємний бік.

Означення 6. Коефіцієнт ексцесу або просто ексцес випадкової величини X – це число, що позначається й обчислюється так:

$$Es = EsX = Es(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3. \quad (6.14)$$

- Це безрозмірні величини, тому їх називають словом “коефіцієнт”.

Зауваження 3. Ексцес характеризує плосковершинність або гостровершинність графіка щільності випадкової величини X , порівняно з кривою розподілу стандартної нормально розподіленої випадкової величини:

- якщо $EsX = 0$, то випадкова величина X має дзвіноподібну криву розподілу, як у кривій розподілу стандартної нормальної випадкової величини;

• якщо $EsX > 0$, то випадкова величина X має гостровершинну криву розподілу – набагато частіше приймає значення, близькі до свого середнього значення MX , ніж значення, що помітно відрізняються від MX .

Зауваження 4. У стандартної нормальної випадкової величини X відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} = 3$, тому у правій частині формули (6.13) віднімається 3, щоб тоді $EsX = 0$ і саме з кривою розподілу стандартної нормальної випадкової X величини можна було б порівнювати задану.

Означення 7. Мода дискретної випадкової величини – це те її значення, яке має найбільшу ймовірність появи. Для неперервної випадкової величини мода – це точка максимуму щільності. Позначається MoX .

Означення 8. Медіана неперервної випадкової величини X – це таке її значення, яке поділяє навпіл розподіл випадкової величини X , тобто те значення MeX , для якого $P(X < MeX) = P(X > MeX) = 0,5$.

Зауваження 5. Геометрично медіана – це абсциса точки, в якій площа, що обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, ділиться навпіл.

Питання та задачі до теми

1. Що називають математичним сподіванням випадкової величини X ?
2. Які основні властивості математичного сподівання? Поясніть їх.
3. Що таке дисперсія випадкової величини X і що вона характеризує?
4. Які формули знаходження дисперсії існують?
5. Що таке середнє квадратичне відхилення і через що воно вводиться?

Задача 1. Стрілець стріляє 3 рази. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,8. Для випадкової величини X = “число влучень” знайти математичне сподівання MX та дисперсію DX .

Задача 2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x) = \begin{cases} a \sqrt[3]{x+1}, & \text{при } -1 < x \leq 7 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

Знайти величину a , $F_X(x)$, MX , DX та $\sigma(X)$.

Задача 3. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \text{ і } x > 2 \\ \frac{3}{4}x(2-x), & \text{при } 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Обчислити MX , DX , $\sigma(X)$, AsX , EsX .

Теорія ймовірностей та мат. статистика // Крикун І.Г.

Тема 7. Закони розподілу неперервних випадкових величин.

7.1. Рівномірний розподіл

Означення 1. Рівномірним на відрізьку $[a; b]$ називається розподіл такої неперервної випадкової величини X , всі значення якої лежать на відрізьку (або інтервалі)¹⁷ $[a; b]$ і щільність якої всюди на $[a; b]$ однакова.

- Позначають $X \sim U(a; b)$ або $X \sim \text{Uni}(a; b)$.

Отже, щільність та функція розподілу такої випадкової величини

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a; b] \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases} \quad (7.1)$$

Числові характеристики:

$$MX = \frac{a+b}{2}; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (7.2)$$

7.2. Показниковий (експоненційний) розподіл

Означення 2. Неперервна випадкова величина X має показниковий (експоненційний) розподіл, якщо її щільність має вигляд (для $\lambda > 0$)¹⁸

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

Константа λ називається параметром показникового розподілу.

- Позначають $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Функція розподілу:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

¹⁷ Пригадаймо, що для неперервної випадкової величини включення чи ні окремої точки несуттєве.

¹⁸ λ – буква грецького алфавіту, вимовляється лямбда.

Числові характеристики:

$$MX = \frac{1}{\lambda}; \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (7.4)$$

7.2.1. Елементи теорії надійності

Розглянемо певний елемент. Нехай він починає роботу в момент часу $t_0 = 0$, а в момент t відбувається відмова в його роботі. Позначимо через T неперервну випадкову величину – час безвідмовної роботи елемента, а через $\lambda > 0$ – інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу).

Означення 3. Функцією надійності $R(t)$ називають функцію, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента протягом часу t :

$$R(t) = P(T > t).$$

Часто (зазвичай) тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, з функцією розподілу

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Означення 4. Показниковим законом надійності називають таку функцію надійності $R(t)$, яка відповідає показниковому розподілу безвідмовної роботи елемента протягом часу t :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}.$$

Приклад 1. Час безвідмовної роботи приладу задано щільністю $f(t) = 0,02e^{-0,02t}$. Знайти $P\{\text{прилад працюватиме без відмов 100 годин}\}$.

Розв'язання. Щільність задає показниковий розподіл, тому маємо показниковий закон надійності $R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,02t}$. Тому шукана ймовірність дорівнює:

$$R(100) = P(T > 100) = e^{-0,02 \cdot 100} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135.$$

7.3. Нормальний розподіл

Нормальний закон розподілу відіграє найважливішу роль у теорії ймовірностей, він найчастіше зустрічається на практиці. Головна його особливість полягає в тому, що він є граничним законом, тобто таким законом, до якого часто наближаються інші закони розподілу при типових умовах.

Означення 5. Нормальний розподіл (або розподіл Гауса) з параметрами a і σ^2 – це розподіл випадкової величини X , щільність якої

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.5)$$

- Позначають $X \sim N(a; \sigma^2)$. Входить два параметри: a та σ^2 .

Функція розподілу:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Числові характеристики¹⁹:

$$MX = a; \quad DX = \sigma^2; \quad \sigma(X) = \sigma. \quad (7.6)$$

Тобто параметри нормального закону a і σ^2 – це його математичне сподівання MX і дисперсія DX відповідно. Як параметри a і σ^2 впливають на вигляд нормального розподілу?

Означення 6. Графік щільності нормального розподілу (7.5) називається нормальною кривою (або кривою Гауса).

Ескіз графіка нормальної кривої наведено на рисунку 8.1 нижче. Це характерна дзвіноподібна крива. Вона симетрична відносно значення $x = a$, а її

вершина має координати $\left(a; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, тому зміна параметра a призводить до

зміщення нормальної кривої вправо чи вліво, а зміна параметра σ^2 призводить до її притискання або відтискання відносно осі OX .

¹⁹ Їх можна знайти за допомогою так званої характеристичної функції.

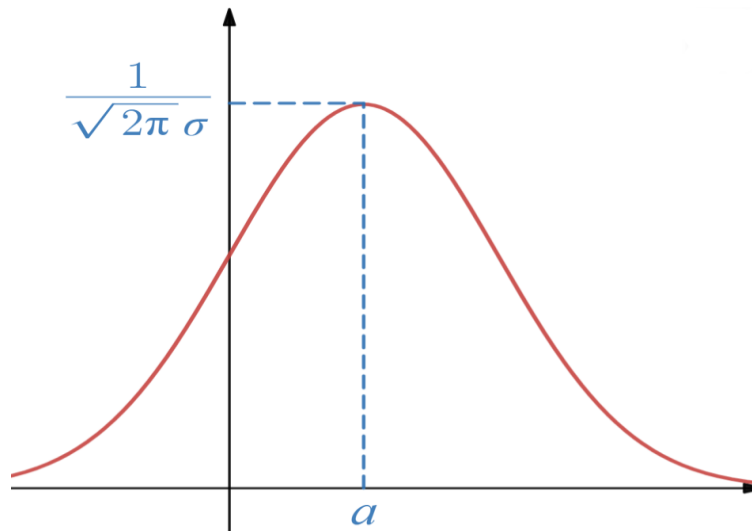


Рис. 8.1. Крива Гауса²⁰

Означення 7. Якщо випадкова величина $X \sim N(0; 1)$, то вона називається стандартною нормальною. Тоді її щільністю $f_X(x)$ буде функція Гауса, а функцією розподілу $F_X(x)$ буде так звана розширена функція Лапласа:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \bar{\Phi}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Зауваження 2. Для стандартної нормальної випадкової величини $X \sim N(0; 1)$ спостерігається рівність $AsX = EsX = MoX = MeX = 0$.

Теорема 7.1. Для нормально розподіленої з параметрами a і σ^2 випадкової величини X (тобто $X \sim N(a; \sigma^2)$)

$$P(b_1 < X < b_2) = \Phi\left(\frac{b_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b_1 - a}{\sigma}\right). \quad (7.7)$$

(тут $\Phi(x)$ – функція Лапласа)

Наслідок 1. Для стандартної нормальної випадкової величини (тобто для $X \sim N(0; 1)$) ймовірність потрапити в інтервал

$$P(b_1 < X < b_2) = \Phi(b_2) - \Phi(b_1). \quad (7.7.1)$$

²⁰ Крива Гауса визначена на $(-\infty; \infty)$, але при далеких від a значеннях вона дуже близька до осі OX .

Далі, нехай випадкова величина $X \sim N(a; \sigma^2)$. Тоді з формули (7.7)

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(-\delta < X - a < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \\ &= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Наслідок 2. Отже, маємо такі ймовірності відхилення від середнього

- для випадкової величини $X \sim N(a; \sigma^2)$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right); \quad (7.8)$$

- для випадкової величини $X \sim N(0; 1)$

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta). \quad (7.8.1)$$

Наслідок 3. “Правило трьох сигм” (“правило 3σ ”)

Підставимо в отриману формулу (7.8) значення $\delta = 3\sigma$. Будемо мати:

- для випадкової величини $X \sim N(a; \sigma^2)$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973; \quad (7.9)$$

- для випадкової величини $X \sim N(0; 1)$

$$P(|X| < 3) = 2\Phi(3) = 0,9973. \quad (7.9.1)$$

Тобто внаслідок проведення експерименту значення випадкової величини $X \sim N(a; \sigma^2)$ з ймовірністю понад 0,997 потрапить у проміжок $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Питання та задачі до теми

1. Скільки параметрів у показникового закону розподілу? В якому вигляді вони входять у щільність та у функцію розподілу?
2. Сформулюйте, яку випадкову величину називають розподіленою за нормальним законом розподілу. Наведіть приклади.
3. Як параметри нормального закону впливають на криву розподілу?
4. Про що йдеться у правилі трьох сигм?

Задача 1. Для випадкової величини, розподіленої за вказаним законом розподілу, знайти: а) MX і DX ; б) $P(1 \leq X \leq 3)$; в) MoX , MeX ; г) AsX , EsX .

- 1) $X \sim \text{Uni}(1; 5)$; 2) $X \sim \text{Exp}(2)$; 3) $X \sim \Pi(90; 0,1)$; 4) $X \sim N(0; 1)$; 5) $X \sim N(1; 4)$.

Тема 8. Випадкові вектори. Сумісні розподіли

8.1. Двовимірні випадкові вектори

Для кращого розуміння розглянемо двовимірний випадковий вектор. Отже, нехай X, Y – випадкові величини, що визначені на одному ймовірнісному просторі (Ω, F, P) .

Означення 1. Випадковим вектором або двовимірною випадковою величиною називають вектор $Z = (X, Y)$.

Розподіл випадкового вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ задається залежно від того, чи є випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ дискретними або неперервними.

Означення 2. Сумісна функція розподілу двох випадкових величин X та Y або двовимірний розподіл випадкового вектора Z – це:

а) для дискретних випадкових величин X, Y – функція

$$p(x, y) = P\{X = x, Y = y\}; \quad (8.1)$$

б) для неперервних випадкових величин X, Y – функція

$$F_Z(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}. \quad (8.2)$$

• Замість “сумісна функція розподілу” говорять “сумісний розподіл”.

Властивості сумісної функції розподілу

1. $0 \leq F_Z(x, y) \leq 1$; $F_Z(-\infty, y) = F_Z(x, -\infty) = 0$; $F_Z(+\infty, +\infty) = 1$.

2. $F_Z(x, y)$ монотонно неспадна та неперервна зліва за кожною координатою;

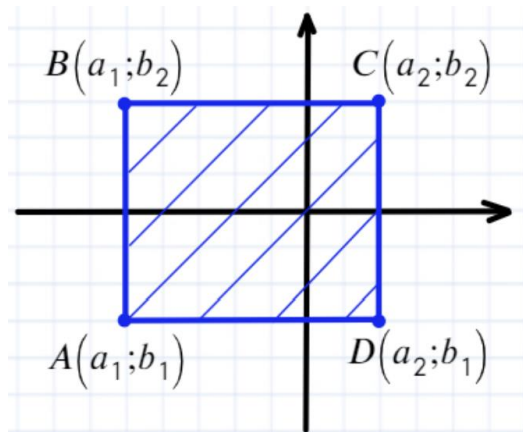
3. Із сумісної функції розподілу можемо отримати функції розподілу окремих координат випадкового вектора:

$$\begin{aligned} F_Z(x, +\infty) &= P\{X \leq x\} = F_X(x); \\ F_Z(+\infty, y) &= P\{Y \leq y\} = F_Y(y). \end{aligned} \quad (8.3)$$

4. Значення функції $F_Z(x, y)$ дорівнює ймовірності того, що випадкова точка, що відповідає кінцю випадкового вектора Z , потрапить у напіввідкритий квадрат із вершиною в точці $(x; y)$.

Приклад 1. Нехай для випадкового вектора $Z = (X, Y)$ відома сумісна функція розподілу $F_Z(x, y)$. Знайти ймовірність того, що випадковий вектор $Z = (X, Y)$ потрапить у прямокутник $ABCD$, тобто $P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\}$.

Розв'язання. Використаємо геометричне тлумачення двовимірного розподілу. Тоді прямокутник $ABCD$ утворюється, якщо від відкритого квадрата з вершиною в точці C відняти відкриті квадрати з вершинами в точках B і D та додати відкритий квадрат із вершиною в точці A :



Тому ймовірність того, що випадковий вектор $Z = (X, Y)$ потрапить у заданий прямокутник $ABCD$, дорівнює сумі відповідних значень $F_Z(x, y)$:

$$P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} = F_Z(a_2, b_2) - F_Z(a_1, b_2) - F_Z(a_2, b_1) + F_Z(a_1, b_1).$$

8.2. Сумісна щільність. Функція розподілу та щільність компонент випадкового вектора

Означення 3. Випадковий вектор $Z = (X, Y)$ називають абсолютно неперервним, якщо існує функція $f_Z(x, y) \geq 0$, така, що

$$F_Z(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_Z(s, t) ds dt. \quad (8.4)$$

Функція $f_Z(x, y)$ називається сумісною щільністю розподілу випадкового вектора $Z = (X, Y)$ (або випадкових величин X та Y).

Зауваження 2. Якщо сумісна функція розподілу $F_Z(x, y)$ є двічі диференційованою в точці (x, y) , то сумісну щільність знаходять так:

$$f_Z(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_Z(x, y). \quad (8.5)$$

Теорема 8.1. (ймовірність випадкового вектора потрапити в область)

Нехай випадковий вектор $Z = (X, Y)$ має сумісну щільність $f_Z(x, y)$. Тоді ймовірність того, що випадковий вектор $Z = (X, Y)$ потрапить у деяку область D , знаходять за формулою:

$$P\{Z \in D\} = \iint_D f_Z(x, y) dx dy. \quad (8.6)$$

Нехай випадковий вектор $Z = (X, Y)$ має сумісну щільність $f_Z(x, y)$.

Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s, t) ds dt = F_Z(x, +\infty) = F_X(x).$$

Отримали функцію розподілу випадкової величини X . Далі отримуємо

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s, t) ds dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x, t) dt \quad (8.7.1)$$

– щільність випадкової величини X .

Аналогічно можемо отримати функцію розподілу $F_Y(y)$ та щільність розподілу $f_Y(y)$ випадкової величини Y :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f_Z(s, t) ds dt = F_Z(+\infty, y) = F_Y(y),$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s, y) ds. \quad (8.7.2)$$

Означення 4. Функції розподілу $F_X(x)$, $F_Y(y)$ та щільності розподілу $f_X(x)$, $f_Y(y)$ окремих компонент випадкового вектора $Z = (X, Y)$, що визначені за (8.3), (8.7) відповідно, називаються маржинальними (маргінальними) функціями розподілу та щільностями розподілу відносно відповідно сумісної функції розподілу $F_Z(x, y)$ та сумісної щільності розподілу $f_Z(x, y)$.

8.3. Незалежність випадкових величин

Для випадкових подій важливу роль відігравало поняття незалежності. Введемо тепер означення незалежності випадкових величин.

Означення 5. Випадкові величини X та Y , що визначені на одному й тому ж ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , називають незалежними, якщо для будь-яких x та y виконуються рівності:

а) для дискретних випадкових величин X та Y :

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\}; \quad (8.8)$$

б) для неперервних випадкових величин X та Y :

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} \cdot P\{Y \leq y\}, \quad (8.9)$$

або ж, використовуючи сумісну та маржинальні функції розподілу:

$$F_Z(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y). \quad (8.10)$$

Тоді з формул (8.5) та (8.10) маємо:

Теорема 8.2. (критерій незалежності)

Нехай $Z = (X, Y)$ – абсолютно неперервний випадковий вектор, з сумісною щільністю розподілу випадкових величин $f_Z(x, y)$.

Випадкові величини X та Y є незалежними тоді і лише тоді, коли для майже всіх²¹ точок площини (x, y) спостерігається рівність:

$$f_Z(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y). \quad (8.11)$$

8.4. Розподіл суми двох випадкових величин.

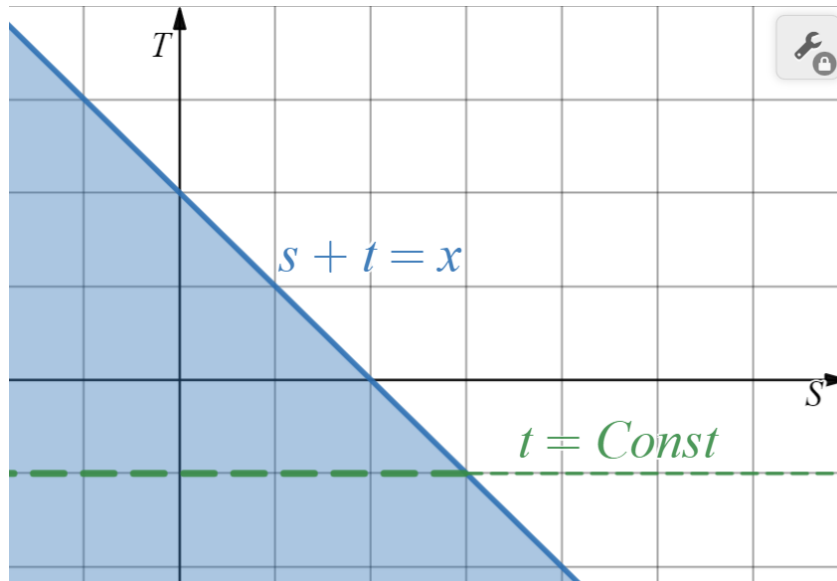
Розподіл суми двох довільних випадкових величин

Нехай існує сумісна щільність $f_Z(x, y)$ випадкового вектора $Z = (X, Y)$. Розглянемо випадкову величину $V = X + Y$. Знайдемо її функцію розподілу:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P\{V \leq x\} = P\{X + Y \leq x\} = P\{Z \in \{(s, t): s + t \leq x\}\} = \\ &= \left| \text{за формулою (8.6)} \right| = \iint_{s+t \leq x} f_Z(s, t) ds dt = \end{aligned}$$

²¹ Тобто: міра тих точок (x, y) , для яких не виконується вказана рівність, дорівнює 0.

Перейдемо від подвійного інтегралу до повторних. Для цього зобразимо область інтегрування та продовжимо інтегрування:



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-t} f_Z(s, t) ds \right) dt = \left| \begin{array}{l} u = s + t \Rightarrow du = ds \\ s = -\infty \Rightarrow u = -\infty \\ s = x - t \Rightarrow u = x \end{array} \right| = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^x f_Z(u - t, t) du \right) dt = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u - t, t) dt \right) du.
 \end{aligned}$$

Тепер знайдемо щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$:

$$f_V(x) = \frac{d}{dx} F_V(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u - t, t) dt \right) du \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x - t, t) dt,$$

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x - t, t) dt. \quad (8.12.1)$$

Щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$ можна знайти так:

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s, x - s) ds. \quad (8.12.2)$$

Розподіл суми двох незалежних випадкових величин

Тепер припустимо, що випадкові величини X та Y є незалежними і мають щільності $f_X(x)$, $f_Y(y)$ та функції розподілу $F_X(x)$, $F_Y(y)$. Знайдемо

щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$.

З формули (8.11) маємо: $f_Z(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Далі з формул (8.12.1) та (8.12.2) маємо формулу для щільності розподілу випадкової величини $V = X + Y$:

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt. \quad (8.13)$$

Зауваження 3. Якщо випадкові величини X та Y є невід'ємними, тоді формула для знаходження щільності їх суми (8.13) набуває вигляду:

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_0^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt. \quad (8.13.1)$$

Зауваження 4. Якщо X та Y є незалежними дискретними випадковими величинами, то для них формула для знаходження ймовірностей конкретних значень їх суми має вигляд:

$$p_{X+Y}(k) = P\{X + Y = k\} = \sum_i P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = k - x_i\}. \quad (8.13.2)$$

Приклад 2. Нехай X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на відрізках $[0; 2]$ та $[0; 3]$ відповідно, тобто зі щільностями

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } t \in [0; 2], \\ 0, & \text{при інших } t \end{cases}; \quad f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{при } t \in [0; 3], \\ 0, & \text{при інших } t \end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$.

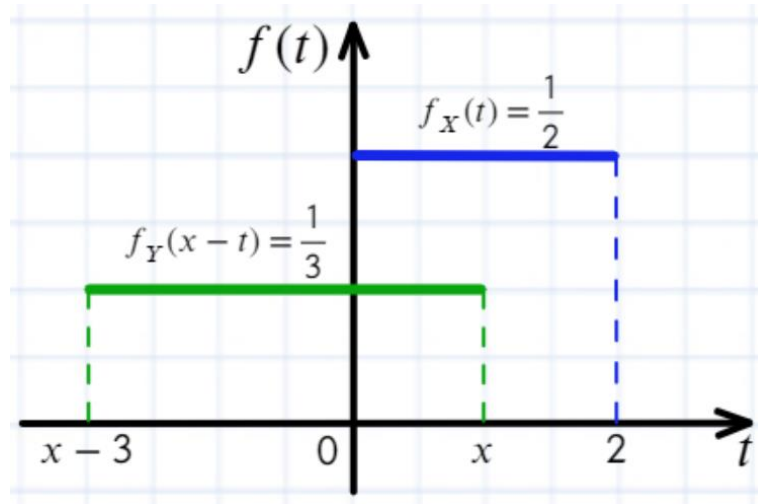
Розв'язання. Випадкова величина V не може набувати від'ємних значень (бо і X , і Y – невід'ємні), та не може бути більшою за 5 (сума максимальних значень X та Y) тобто, щільність випадкової величини $V = X + Y$ має вигляд

$$f_V(x) = f_{X+Y}(x) = 0, \quad \text{при } x \notin [0; 5].$$

При $x \in [0; 5]$ щільність будемо знаходити за формулою (8.13) або (8.13.1):

$f_{X+Y}(x) = \int_0^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$. Тому розглянемо кілька випадків.

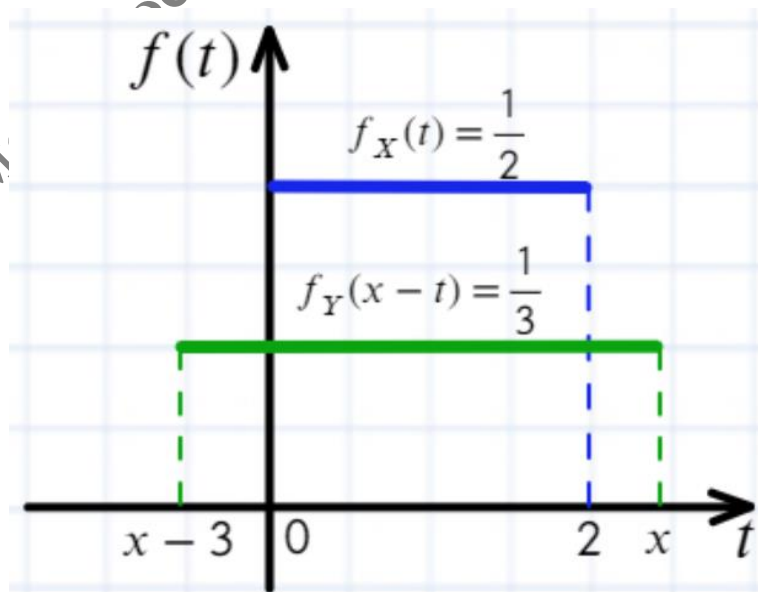
Випадок 1. При $0 \leq x < 2$ маємо такі графіки підінтегральних функцій:



За графіками бачимо, що добуток підінтегральних функцій відмінний від нуля лише при $t \in [0; x]$, тому в цьому випадку

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{x}{6}.$$

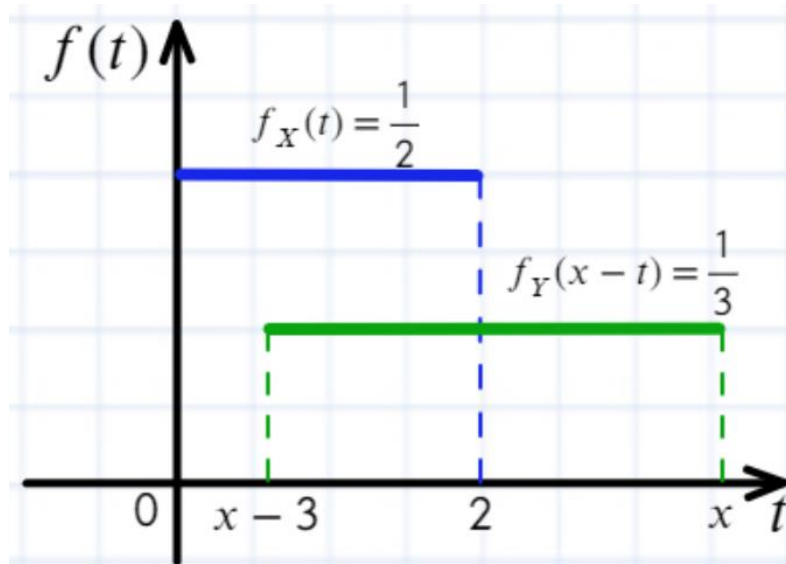
Випадок 2. При $2 \leq x < 3$ маємо такі графіки підінтегральних функцій:



Відповідно, їхній добуток відмінний від нуля при $t \in [0; 2]$, тому

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^2 f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Випадок 3. При $2 \leq x \leq 5$ маємо такі графіки підінтегральних функцій:



Відповідно, їхній добуток відмінний від нуля при $t \in [x-3; 2]$, тому

$$f_{X+Y}(x) = \int_{x-3}^2 f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_{x-3}^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{6} (2 - x + 3) = \frac{5-x}{6}.$$

У підсумку маємо таку щільність випадкової величини $V = X + Y$:

$$f_V(x) = f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin [0; 5] \\ \frac{x}{6}, & \text{при } x \in [0; 2] \\ \frac{1}{3}, & \text{при } x \in [2; 3] \\ \frac{5-x}{6}, & \text{при } x \in [3; 5] \end{cases}.$$

Питання та задачі до теми

1. Наведіть означення випадкового вектора та сумісної функції розподілу кількох випадкових величин.
2. Які основні властивості сумісної функції розподілу? Поясніть їх.
3. Яку функцію називають сумісною щільністю розподілу випадкового вектора? Які властивості вона має?

4. Що таке маржинальні функція розподілу та щільність?
5. Наведіть означення незалежних випадкових величин.
6. Сформулюйте критерій незалежності випадкових величин.
7. Як знайти щільність суми випадкових величин, якщо відома їхня сумісна щільність? А якщо випадкові величини незалежні?

Задача 1. Нехай X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на відрізках $[0; 5]$ та $[-3; 3]$ відповідно. Знайти щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$. Обчислити MV та DV .

Задача 2. Нехай X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом із параметрами 2 та 5 відповідно: $X \sim \text{Exp}(2)$; $Y \sim \text{Exp}(4)$. Якою є щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$? Знайти MV , DV .

Задача 3. Нехай X , Y , Z – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметрами 2, 5, 7 відповідно, тобто $X \sim \text{Exp}(2)$; $Y \sim \text{Exp}(5)$, $Z \sim \text{Exp}(7)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y + Z$ та обчислити її числові характеристики MV , DV .

Порада: скористайтесь результатом Задачі 2 та формулою (8.6).

Тема 9. Закони розподілу, пов'язані з нормальним.

Граничні теореми теорії ймовірностей

9.1. Гамма-функція. Гамма-розподіл

Означення 1. Гамма-функція²² – це інтеграл від параметра α :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (9.1)$$

Властивості гамма-функції

- 1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.
- 2) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$.
- 3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- 4) Якщо α кратне $1/2$, то значення $\Gamma(\alpha)$ можна обчислити:

4.1) Якщо n – ціле додатне число, то

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (9.1.1)$$

4.2) Якщо $\alpha = n + 1/2$, де n – ціле додатне число, то

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}. \quad (9.1.2)$$

Означення 2. Неперервна випадкова величини X має гамма-розподіл, якщо її щільність ($\alpha > 0, \lambda > 0$)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ Cx^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}.$$

- Позначають $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

Константа C в означенні знаходиться з умови нормування (5.4):

$$C = \frac{1}{\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx} = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.$$

²² Або інтеграл Ейлера II роду.

Звідки: при $\alpha = 1$ константа $C = \lambda$; при $\alpha = 2$ константа $C = \lambda^2$.

Функція розподілу гамма-розподілу $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Числові характеристики гамма-розподілу $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$MX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$$

Зауваження 1. Параметр α часто позначають літерою k , а параметр $1/\lambda$ позначають літерою θ і розглядають гамма-розподіл з параметрами k і θ .

Зауваження 2. При цілих значеннях параметра $k = \alpha$ (і при $\theta = 1/\lambda$) гамма-розподіл з параметрами α і λ називають розподілом Ерланга з параметрами k і θ .

Зауваження 3. При $\alpha = 1$ гамма-розподіл стає показниковим розподілом із параметром λ : $\Gamma(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$.

Зауваження 4. Якщо $X_1, \dots, X_k$ – незалежні випадкові величини з однаковим показниковим розподілом з одним і тим же параметром λ , тобто $X_1, \dots, X_k \sim \text{Exp}(\lambda)$, тоді їх сума $X_1 + \dots + X_k$ розподілена за гамма-розподілом з параметрами $\alpha = k$ та λ .

9.2. Розподіл хі-квадрат (Пірсона)

Означення 3. Нехай є k незалежних випадкових величин $Y_1, \dots, Y_k$, кожна з яких розподілена нормально з параметрами 0 і 1. Тоді розподіл випадкової величини

$$X = \sum_{i=1}^k Y_i^2 \quad (9.2)$$

називають розподілом χ^2 (або Пірсона) з k ступенями свободи (вільності).

- Позначають $X \sim \chi^2(k)$ або $X \sim \chi_k^2$.
- Розподіл $\chi^2(k)$ має один параметр k – число ступенів свободи.

Зауваження 5. Число ступенів свободи k є абстрактним поняттям, що визначає в умови незалежності величин Y_i . Наявність будь-якої залежності між випадковими величинами Y_i зменшує число ступенів свободи k . Якщо k випадкових величин Y_i пов'язані одним співвідношенням, наприклад,

$$\sum_{i=1}^k Y_i = n\bar{Y}, \text{ то число ступенів свободи зменшиться на одиницю: } k-1.$$

Щільність розподілу випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$ та її графік:

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

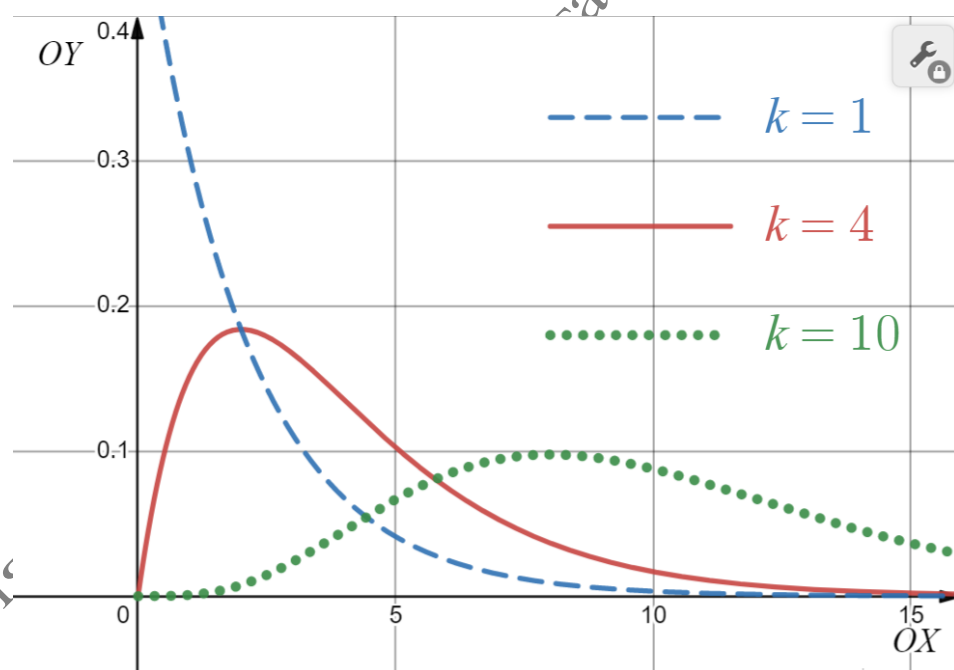


Рис. 9.1. Крива розподілу $\chi^2(k)$ для різного числа ступенів свободи k

Константа C в означенні щільності знаходиться з умови нормування (5.4):

$$C = \frac{1}{\int_0^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Числові характеристики випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$:

$$MX = k, \quad DX = 2k, \quad \sigma(X) = \sqrt{2k}. \quad (9.3)$$

Зауваження 6. Розподіл хі-квадрат є окремим випадком гамма-розподілу:

$$\chi^2(k) = \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Зауваження 7. При $k = 2$, тобто для випадкової величини $X = Y_1^2 + Y_2^2$, де незалежні випадкові величини $Y_1, Y_2 \sim N(0; 1)$, отримуємо показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1/2$, тобто $\chi^2(2) = \text{Exp}(0,5)$.

Зауваження 8. Зі збільшенням числа ступенів свободи розподіл $\chi^2(k)$ наближається до нормального $N(k; 2k)$. При $k > 30$ практично не відрізняється.

Означення 4. α -квантиль розподілу $\chi^2(k)$ (або квантиль рівня α) – це таке значення $\chi_{\alpha,k}^2$, що для випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$ виконується:

$$P(X \leq \chi_{\alpha,k}^2) = \int_0^{\chi_{\alpha,k}^2} f_X(y) dy = \alpha. \quad (9.4)$$

Геометрично α -квантиль $\chi_{\alpha,k}^2$ – це таке значення x , для якого площа заштрихованої криволінійної трапеції дорівнює α :

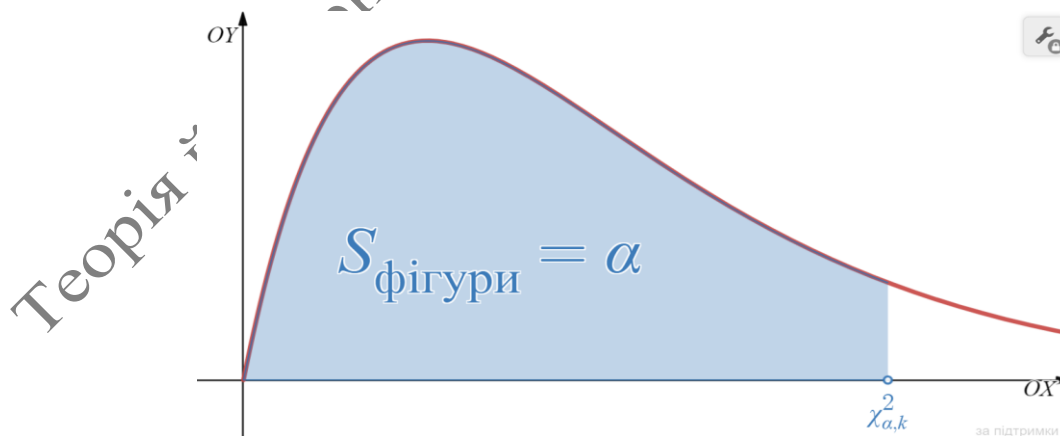


Рис. 9.2. Геометрична інтерпретація α -квантиля розподілу хі-квадрат

- Квантилі розподілу $\chi^2(k)$ залежать від 2 параметрів: рівня значущості α і числа ступенів свободи k ; ці квантилі є табульованими.

9.3. Розподіл Стюдента

Означення 5. Розглянемо $k + 1$ незалежну випадкову величину $Y_0, \dots, Y_k$, розподілених нормально з параметрами 0 і 1. Тоді про випадкову величину

$$X = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i^2}} = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k} \chi^2(k)}} \quad (9.5)$$

говорять, що вона має розподіл Стюдента (або t -розподіл) з k ступенями свободи.

- Позначають $X \sim t(k)$ (або $X \sim T(k)$).
- Розподіл $t(k)$ залежить від параметра k -числа ступенів свободи.

Щільність розподілу випадкової величини $X \sim t(k)$ та її графік:

$$f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

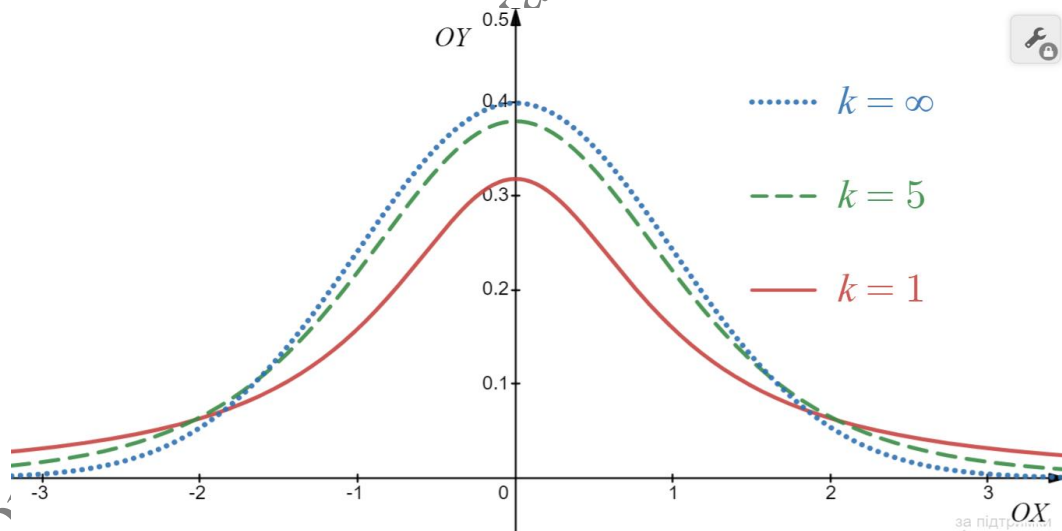


Рис. 9.3. Крива розподілу Стюдента при різних k

Числові характеристики випадкової величини $X \sim t(k)$:

$$MX = 0, \quad DX = \frac{k}{k-2}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}. \quad (9.6)$$

Зауваження 9. Зі збільшенням числа ступенів свободи розподіл $t(k)$ наближається до нормального $N(0; 1)$. При $k > 30$ практично не відрізняється.

Означення 6. α -квантиль (або квантиль рівня α) розподілу Стюдента – це таке значення $t_{\alpha,k}$, що для випадкової величини $X \sim t(k)$

$$P(X \leq t_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t) dt = \alpha. \quad (9.7)$$

- Розподіл Стюдента симетричний відносно 0, тому

$$\begin{aligned} P(X < t_{\alpha,k}) &= \int_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t) dt = \alpha = \int_{-t_{\alpha,k}}^{\infty} f_X(t) dt = 1 - P(X < -t_{\alpha,k}) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(X < -t_{\alpha,k}) &= 1 - \alpha \Rightarrow -t_{\alpha,k} \text{ це } (1 - \alpha)\text{-квантиль.} \end{aligned}$$

Отже, квантилі розподілу Стюдента мають таку властивість симетрії:

$$t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}. \quad (9.7.1)$$

Зауваження 10. Використовуючи (9.7.1) для розподілу Стюдента, часто розглядають двосторонні α -квантилі: таке додатне значення t , що дорівнює **квантилю** $t_{\alpha/2,k}$, що для $X \sim t(k)$ ймовірність того, що X за модулем перевищить це значення, дорівнює α :

$$P(|X| \leq t_{\alpha/2,k}) = \int_{-t_{\alpha/2,k}}^{t_{\alpha/2,k}} f_X(t) dt = \alpha.$$

та односторонні (лівий і правий) α -квантилі – таке додатне значення t , що дорівнює **квантилю** $t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}$, що:

$$P(X < -t_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{-t_{\alpha,k}} f_X(t) dt = \alpha \quad \text{або} \quad P(X > t_{1-\alpha,k}) = \int_{t_{1-\alpha,k}}^{\infty} f_X(t) dt = \alpha.$$

Геометрично, односторонні квантилі $t_{\alpha,k}$ розподілу Стюдента – це такі значення t , для якого площа кожної заштрихованої на рисунку фігури (“хвости” розподілу) дорівнює α .

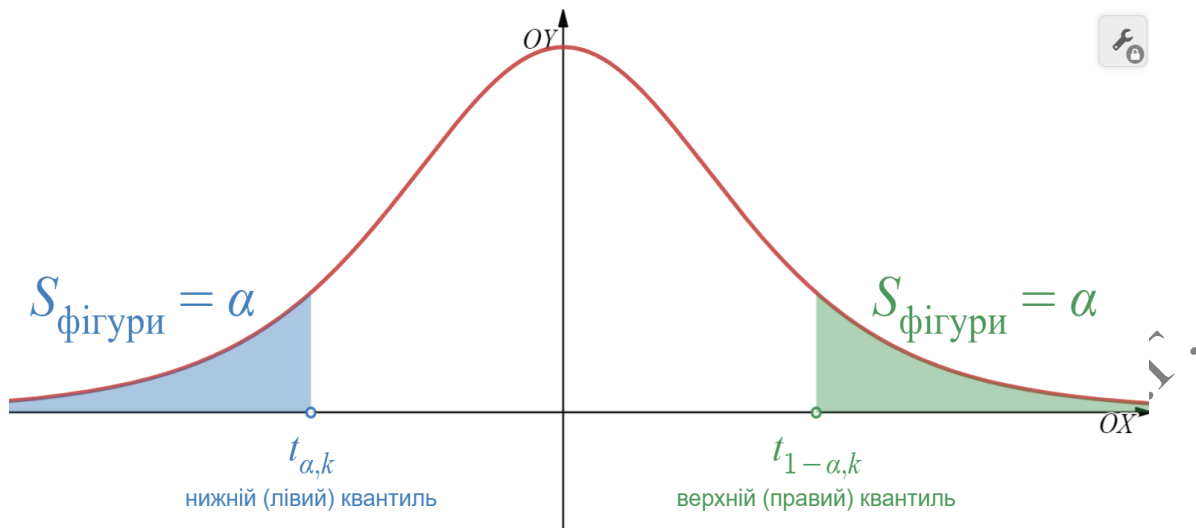


Рис. 9.4. Геометрична інтерпретація квантилів розподілу Стюдента

- Квантилі розподілу $t(k)$ залежать від 2 параметрів рівня значущості α і числа ступенів свободи k ; ці квантилі є табельованими.

Зауваження 11. Багато інформації про різні розподіли, їх означення, властивості, числові характеристики та зв'язки між собою можна знайти за цим посиланням: <http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html>

9.4. Граничні теореми теорії ймовірностей

Ці теореми поділяються на дві великі групи теорем: результати типу “закону великих чисел” та результати типу “центральної граничної теореми”.

9.4.1. Результати типу закону великих чисел

Теорія ймовірностей і математична статистика базуються на тому, що на практиці при спостереженні багатьох випадкових дослідів за певних умов простежуються певні закономірності. Теореми, пов'язані з дослідженням цих умов і закономірностей, об'єднують під назвою закон великих чисел (ЗВЧ).

Нерівність Маркова.

Для довільної випадкової величини X , що має обмежене математичне сподівання MX , для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M|X|}{\varepsilon}. \quad (9.8)$$

Нерівність Чебишева.

Якщо випадкова величина X має обмежені математичне сподівання MX і дисперсію DX , то для будь-якого $\varepsilon > 0$ (оцінка зверху)

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (9.9.1)$$

Нерівність Чебишева часто використовують для оцінки ймовірності протилежної події (оцінка знизу):

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (9.9.2)$$

Приклад 1. Для $X \sim N(a; \sigma^2)$ порівняємо оцінку відхилення від MX за нерівністю Чебишева з оцінкою за правилом трьох сигм.

Нехай $\varepsilon = 3\sigma$, тоді за нерівністю Чебишева (9.9.2) (для $X \sim N(a; \sigma^2)$)

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,89.$$

За правилом 3σ $P\{|X - a| < 3\sigma\} \approx 0,9973$. Для нормального закону розподілу “правило 3σ ” точніше. Але для інших законів розподілу нерівність Чебишева відіграє важливу роль.

Приклад 2. Середньоквадратичне відхилення помилки вимірювання курсу літака дорівнює 2. Вважаючи математичне сподівання помилки рівним нулю, оцінити ймовірність того, що помилка при цьому вимірюванні буде

а) менше 5; б) від 3 до 6.

Розв’язання. а) За умовою маємо: $MX = 0$, $DX = 4$, $\varepsilon = 5$.

Тоді за нерівністю Чебишева $P\{|X| \leq 5\} \geq 1 - \frac{4}{5^2} = 0,84$.

б) За нерівністю Чебишева, з одного боку: $P\{|X| \leq 6\} \geq 1 - \frac{4}{6^2} = 0,89$;

з іншого боку $P\{|X| \leq 3\} \geq 1 - \frac{4}{3^2} = 0,56$. Можемо оцінити шукану ймовірність:

$$P\{3 \leq |X| \leq 6\} = P\{|X| \leq 6\} - P\{|X| \leq 3\} \approx 0,89 - 0,56 \approx 0,33.$$

Теорема 9.1. Закон великих чисел у формі Чебишева

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – незалежні та існує таке число C , що $DX_i \leq C$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Наслідок до теореми 9.1. Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – незалежні, мають однакові $MX = a$ і обмежені DX_i . Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Тобто в умовах цього наслідку середнє арифметичне випадкових величин за ймовірністю збігається до математичного сподівання.

Теорема 9.2. Закон великих чисел у формі Маркова

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – попарно незалежні, а їх дисперсії задовольняють умові $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = 0$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - MX_i) \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

*Теорема 9.3. Посилений закон великих чисел у формі Колмогорова

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – незалежні, мають скінченні MX_i та DX_i . Якщо $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{DX_i}{i^2} < \infty$, то

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - MX_i) = 0 \right\} = 1.$$

9.4.2. Результати типу центральної граничної теореми

Головна особливість нормального закону розподілу полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при умовах, що дуже часто зустрічаються. Це твердження центральної граничної теореми (ЦГТ). ЦГТ доводить, що сума досить великого числа незалежних випадкових величин приблизно підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більша кількість випадкових величин додається. Більшість випадкових величин, що зустрічаються на практиці (наприклад, помилки вимірювань) можуть бути представлені як суми великої кількості порівняно малих складових – елементарних помилок, кожна з яких викликана дією окремої причини, що не залежить від інших.

Теорема 9.4. (Центральна гранична теорема у формі Ляпунова)

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ – незалежні, однаково розподілені, мають однакові скінченні $MX = a$ і $DX = \sigma^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ закон розподілу нормованої центрованої випадкової величини

$$X^H = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sqrt{n}\sigma}$$

прямує до нормального з параметрами 0 і 1:

$$X^H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0; 1). \quad (9.10)$$

- Випадкову величину X^H називають асимптотично нормальною.

Наслідок ЦГТ. Якщо незалежні випадкові величини $X_1, \dots, X_n$ однаково розподілені і мають однакові $MX = a$ і $DX = \sigma^2$, то при $n \rightarrow \infty$ закон розподілу

суми випадкових величин $X_1, \dots, X_n$, тобто випадкової величини $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

прямує до нормального закону з параметрами $MS_n = na$ і $DS_n = n\sigma^2$:

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(na; n\sigma^2). \quad (9.11)$$

- Отже, нормальний розподіл виникає тоді, коли є сума багатьох незалежних (або слабо залежних) випадкових величин, порівняних за ступенем свого впливу на розсіювання суми.

На практиці такі випадки зустрічаються дуже часто: похибки виміру параметрів, помилки спостереження розподілені за нормальним (або близьким до нормального) законом; такі помилки можуть бути представлені у вигляді суми багатьох елементарних помилок, кожна з яких пов'язана з окремою, практично незалежною від інших, причиною.

Приклад 4. Нехай маємо 100 незалежних випадкових величин $X_i \sim \text{Uni}(0; 12)$. Який наближений закон для їхньої суми $Y = X_1 + \dots + X_{100}$?

Розв'язання. Оскільки всі сто $X_i \sim \text{Uni}(0; 12)$, то за формулою (7.1)

$$MX = \frac{a+b}{2} = \frac{12+0}{2} = 6; \quad DX = \frac{(12-0)^2}{12} = 12,$$

а за наслідком ЦГТ (9.11) $Y = X_1 + \dots + X_{100} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(nMX; nDX)$, тобто

$$Y = X_1 + \dots + X_{100} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(600; 1200).$$

Зауваження 12. Теореми Муавра–Лапласа і Пуассона (див. Тему 3) – окремі випадки застосування ЦГТ.

Питання та задачі до теми

1. Який розподіл називають гамма-розподілом та які властивості він має?
2. За яких умов виникає розподіл хі-квадрат?
3. Що таке квантиль розподілу? У чому його геометричний сенс?
4. За яких умов виникає розподіл Стюдента?
5. У чому сенс тверджень типу закону великих чисел?
6. У чому полягає твердження центральної граничної теореми?

Задача 1. Нехай маємо 60 незалежних випадкових величин:

а) $X_i \sim \text{Bi}(20; 0,35);$

б) $X_i \sim \text{П}(30; 0,02).$

Який наближений закон розподілу для їхньої суми $Y = X_1 + \dots + X_{60}$?

ЧАСТИНА II. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Тема 1. Основні поняття математичної статистики. Вибірковий метод

1.1. Предмет та задачі математичної статистики

Означення 1. Математичною статистикою²³ називається наука, яка займається розробкою методів відбору, опису і аналізу експериментальних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ. Встановлення цих закономірностей, в свою чергу, базується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів дослідів або спостережень.

Інакше кажучи, математична статистика – це наука, що займається систематизацією, обробкою та використанням статистичних даних для наукових і практичних досліджень.

Математична статистика використовує методи теорії ймовірностей для розрахунку частоти «неправильних» рішень, або ж (більш загально) для величини середніх втрат, які невідворотно виникають в умовах випадковості, як би ми не намагались оптимізувати свою поведінку в цих умовах.

Як відомо з попереднього матеріалу, для того, щоб зробити (методами теорії ймовірностей) певні висновки стосовно деякої випадкової величини, потрібно знати її функцію розподілу та її числові характеристики. Зрозуміло, що на практиці ця інформація є невідомою, тож її отримують саме методами математичної статистики.

Означення 2. Предметом математичної статистики є розміри і кількісні співвідношення масових суспільних явищ, закономірності їх формування, розвитку та взаємозв'язку.

²³ Від лат. “status” – положення, стан явищ.

Традиційно виділяють два основні розділи математичної статистики: описова статистика і статистичні висновки.



Рис. 1.1. Основні розділи математичної статистики

Описова статистика використовується для:

- узагальнення показників однієї змінної (статистика випадкової вибірки, статистичні ряди розподілу, емпірична функція розподілу);
- виявлення взаємозв'язків між двома і більше змінними (кореляційно-регресійний аналіз, дисперсійний аналіз, а також факторний аналіз та кластерний аналіз).

Описова статистика дає можливість отримати нову інформацію, швидше зрозуміти і оцінити її, тобто виконує функцію опису об'єктів дослідження, чим і виправдовує свою назву. Методи описової статистики покликані перетворити сукупність окремих емпіричних даних на систему наочних для сприйняття форм і чисел: розподіли частот; показники тенденцій, варіативності, зв'язку. Цими методами розраховуються статистики випадкової вибірки, які є підставою для здійснення статистичних висновків.

Статистичні висновки надають можливість:

- оцінити точність, надійність і ефективність вибірових статистик, виявити похибки, які виникають у процесі статистичних досліджень (статистичне оцінювання параметрів розподілу);

- узагальнити параметри генеральної сукупності, отримані на підставі вибірових статистик (перевірка статистичних гіпотез про параметри розподілу та про закон розподілу).

1.2. Базові означення математичної статистики

Означення 3. В основі математичної статистики лежить вибіровий метод, згідно з яким за характеристиками частини загальної сукупності об'єктів (вибірки) роблять висновки про характеристики всієї сукупності.

Означення 4. Генеральна сукупність – задана/вихідна сукупність об'єктів однієї природи; множина значень спостережуваної випадкової величини X (зріст людини; брак/якість деталі).

Означення 5. Вибірка (вибірова сукупність) – сукупність як правило випадково відібраних з генеральної сукупності об'єктів однієї природи, при дослідженні деякої якісної (брак чи стандарт) або кількісної (вага, довжина, площа) ознаки.

З означення випливає, що методи математичної статистики застосовуються при дослідженні деякої якісної/кількісної ознаки, тому при такому дослідженні є необхідною підготовча робота – проведення статистичного спостереження: вивчення/вимірювання наявних об'єктів однієї природи щодо досліджуваної якісної/кількісної ознаки.

Статистичні спостереження бувають

– суцільними: досліджуються **всі** об'єкти генеральної сукупності

– вибіровими: досліджується лише **вибірка** з генеральної сукупності; за результатами дослідження робиться висновок про властивості всієї генеральної сукупності.

Означення 6. Обсяг (або об'єм) сукупності – це кількість об'єктів в сукупності. Обсяг генеральної сукупності, як правило, позначається літерою N , а обсяг вибірки позначається літерою n .

1.3. Способи формування вибірки

Існує 2 способи формування вибірки: випадковий і невипадковий (наприклад, серійний – кожен десятий). На практиці зазвичай застосовують випадковий спосіб. Він може бути відбором з поверненням або без повернення. На практиці як правило використовують відбір без повернення.

Означення 7. Повторна вибірка – це вибірка, в якій відібраний об'єкт перед вибором наступного повертається в генеральну сукупність.

Означення 8. Безповторна вибірка – це вибірка, в якій відібраний об'єкт перед вибором наступного не повертається в генеральну сукупність. Цей спосіб – те ж саме, що і одразу вибирати всю вибірку.

При безповторному відборі кожного разу змінюється генеральна сукупність і ймовірності (наприклад витягти брак або стандарт); але якщо об'єм генеральної сукупності достатньо великий, а об'єм вибірки – малий (порівняно з об'ємом генеральної сукупності), то цими відмінностями нехтують. На практиці для уникнення можливих проблем використовують вибірку, об'єм якої становить менше 10% (а краще – менше 1%) від об'єму генеральної сукупності.

Інформація щодо генеральної сукупності, отримана на основі вивчення вибірки, буде випадковою величиною. І може статися так, що вибірка неадекватно відображає характеристики генеральної сукупності.

Означення 9. ("Правило трьох П") Важливо, щоб вибірка була представницькою (репрезентативною), тобто вибірка має правильно представляти пропорції генеральної сукупності.

• Вибірка буде представницькою (репрезентативною), якщо її здійснюють з виконанням таких умов:

- кожен об'єкт генеральної сукупності має однакову ймовірність потрапити у вибірку та всі елементи вибірки вибрані випадково (так звана рандомізована вибірка);
- достатня кількість відібраних одиниць вибіркової сукупності.

Способи утворення вибірки

1. Генеральна сукупність не ділиться на групи.

а) **простий випадковий безповторний відбір** (об'єкти генеральної сукупності нумерують і відбирають якусь частину, використовуючи генератор випадкових чисел, в якому випадкові числа не повторюються);

б) **простий випадковий повторний відбір** (так само, але номери, згенеровані генератором випадкових чисел, можуть повторюватись).

2. Генеральна сукупність ділиться на групи.

а) **типовий відбір** (наприклад при дослідженні однакових деталей, випущених на кількох станках, серед яких є старі і нові, всі деталі поділяють на два типи – продукція нових станків і продукція старих станків);

б) **механічний (систематичний) відбір** – всю генеральну сукупність "механічно" ділять на кілька груп, випадково обирають одну з цих груп і досліджують (наприклад, якщо вибірка складає 10% генеральної сукупності, то всі об'єкти ділять на 10 однакових груп і випадковим чином вибирають одну з них);

в) **серійний (гніздовий) відбір** – генеральна сукупність розбивають на серії (наприклад, деталі, що були виготовлені на першому, другому, ..., десятому станках) і роблять суцільне дослідження продукції з випадково обраних серій. Як правило, цей спосіб застосовують для однотипних станків (якщо станки всі – старі або всі – нові).

На практиці часто зустрічаються **комбінований відбір** – вид відбору вибірки, при якому поєднуються два або декілька видів відбору одиниць з генеральної сукупності. Такий відбір ще називають **східчастим**, оскільки він проходить декілька кроків, стадій, рівнів – два, три і більше. Кожен крок може мати свою одиницю відбору, свою основу вибірки і свою частку відібраних одиниць.

Наприклад, при дослідженні успішності студентів університету на першому кроці відбирають (одним із способів) необхідну кількість груп, а

потім, на другому кроці, відбирають (можливо, іншим способом) необхідне число студентів з кожної групи. На першому кроці одиницею відбору буде група, а частка відбору – 10%; на другому кроці одиницею відбору буде студент, а частка відбору – 20%.

Вибір способу утворення вибірки робить дослідник виходячи з конкретної задачі і досвіду попередників.

Різновидом комбінованого відбору є побудова багатофазної вибірки – вибірки, яка характеризується тим, що на всіх її рівнях одиниця відбору залишається незмінною, але проводиться декілька стадій (фаз) вибіркового обстеження.

Обсяг вибірки на кожній фазі, як правило, різний. Особливістю багатофазної вибірки є те, що дані спостереження 1-ої фази можна використовувати для додаткової характеристики 2-ої фази і т.д. Тобто дані кожної попередньої фази використовують як додаткову інформацію на подальшій фазі, що дає точніші результати. Багатофазна вибірка може поєднуватися також з суцільним статистичним спостереженням.

Згадаємо ще порівняно новий спосіб побудови вибірки – моментне спостереження. При моментному спостереженні дослідженню піддаються всі елементи генеральної сукупності (як і при суцільному спостереженні), але в певні моменти часу (вибіркове спостереження). Тобто об'єктом вибірки при моментному спостереженні є стан генеральної сукупності в певні моменти або відрізки часу.

- При моментному спостереженні поняття генеральної сукупності і вибірки відносяться не до сукупності, що вивчається, а до часу (моменту) спостереження.

Наприклад, перевірки деканатом відвідування студентами занять охоплюють всіх студентів факультету, тому це спостереження є суцільним. Але проводяться ці перевірки в певні моменти часу, тому за часом є

вибірковими. Моментне спостереження дає можливість одержувати дані значно швидше і з меншими витратами, але з достатнім ступенем точності.

Вживання моментного спостереження дає добрий результат при вивченні частки окремих елементів якого-небудь процесу або їх тривалості в якомусь процесі. Тому спосіб моментних спостережень набув поширення при вивченні структури витрат робочого часу, використання устаткування і т.п. Він менш трудомісткий, ніж хронометраж або фотографія робочого дня, а результати при належній його організації дає достатньо точні.

Питання та задачі до теми

1. Яку науку називають математичною статистикою?
2. Який зв'язок між теорією ймовірностей і математичною статистикою?
3. В чому полягає ідея вибіркового методу? Що таке вибірка?
4. Які бувають статистичні спостереження та які їх переваги та недоліки?
5. В чому відмінність між повторними та безповторними вибірками?
6. Які проблеми виникають при використанні безповторної вибірки і як їх мінімізують на практиці?
7. Яку вибірку називають репрезентативною? Як цього досягають на практиці?
8. Наведіть приклад нерепрезентативної вибірки. Які помилки були допущені при її формуванні?
9. Випадкове опитування по телефону – це репрезентативна вибірка?
10. Які способи утворення вибірок ви знаєте?

Задача 1. Опишіть переваги і недоліки суцільного та вибіркового методів проведення статистичного спостереження.

Задача 2. З партії в 1000 деталей відібрали для дослідження на якість 25 деталей. Описати генеральну сукупність та вибірку даного експерименту.

Тема 2. Статистичний розподіл вибірки

2.1. Варіаційний ряд. Таблиця частот

Нехай з генеральної сукупності обсягу N зроблено вибірку обсягу n . Відповідно позначимо

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (2.1)$$

– спостережені значення елементів вибірки (їх значення можуть повторюватися, наприклад, зріст n людей або якість/брак n деталей).

Означення 1. Ці значення називають вибірковими значеннями або варіантами²⁴.

Означення 2. Запишемо тепер **різні** значення з послідовності варіант (2.1) у **зростаючому** порядку – отримаємо **варіаційний ряд**:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}, \quad m \leq n. \quad (2.2)$$

Кількість елементів варіаційного ряду (2.2) може бути меншою за кількість значень з послідовності варіант (2.1) в силу того, що в (2.1) могли бути однакові варіанти, а в (2.2) – вони всі різні.

Зауваження 1. Елементи варіаційного ряду (2.2) часто записують в спрощеному вигляді (без дужок в індексах):

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \quad m \leq n.$$

Як правило, плутанини з (2.1) не виникає, оскільки всюди в подальшому будемо працювати саме з (2.2), а не з (2.1).

Означення 3. Далі для кожної варіанти з (2.2) підрахуємо кількість спостережень в послідовності варіант (2.1) – будемо називати ці кількості **абсолютними частотами** (що відповідають i -ій варіанті) та позначати n_i ; та **відносні частоти**, які позначатимемо w_i і знаходитимемо так:

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

²⁴ Називний відмінок в однині: “варіанта”.

Означення 4. Отримані числа запишемо в таблицю, яка буде називатися статистичним розподілом вибірки або таблицею частот або емпіричним²⁵ законом розподілу.

Варіанта x_i	x_1	x_2	...	x_m	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	n_1	n_2	...	n_m	n
Відносна частота w_i	w_1	w_2	...	w_m	1

Контроль правильності обчислень перевіряється рівностями

$$\sum_{i=1}^m n_i = n; \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1. \quad (2.3)$$

Цей контроль записується в останній стовпчик таблиці.

Приклад 1. Вибірка: 9, 3, 6, 6, 9, 6, 9, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 6, 6.

Побудувати статистичний розподіл даної вибірки.

Розв'язання. Згідно попереднього, будемо мати $n = 20$ та

Варіанта x_i	3	6	9	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	3	10	7	20
Відносна частота w_i	0,15	0,5	0,35	1

2.2. Інтервальний статистичний ряд

Використовувати таблицю частот доцільно тоді, коли досліджується реалізація дискретної (зокрема цілочислової) випадкової величини і кількість різних значень у неї не дуже велика (значення повторюються).

Якщо це не так (коли обсяг вибірки дуже великий або при дослідженні реалізації неперервної випадкової величини), то статистичний розподіл вибірки зручно представити у вигляді таблиці, де в першому рядку замість значень варіант x_i записані інтервали $(x_{i-1}; x_i)$; а в другому і третьому

²⁵ Слово “емпіричний” – означає “спостережений”, “експериментальний”, “отриманий під час досліджу”.

рядках таблиці – так само вказані абсолютна/відносна частота потрапляння в цей інтервал.

Тобто перед побудовою таблиці потрібно зробити допоміжну роботу – знайти інтервали розбиття. Ця робота називається групуванням даних.

2.2.1. Групування даних

Для даної вибірки спочатку визначимо число k – кількість інтервалів, на яку будемо розбивати всі спостережені значення вибірки.

Це можна зробити за допомогою формули Стерджесса:

$$k \geq 1 + 3,322 \lg n \quad (2.4)$$

Зауваження 2. Зрозуміло, що кількість – це ціле число, отже число k знаходиться як таке **ціле** число, яке більше за вираз в правій частині (2.4).

Потім позначимо: $a = x_0$ – найменше спостережене значення вибірки;

$b = x_k$ – найбільше спостережене значення вибірки.

Далі, розіб'ємо отриманий відрізок зміни значень вибірки $[a; b]$ на k інтервалів однакової довжини h , тобто довжина кожного інтервалу дорівнює

$$h = \frac{b - a}{k}; \quad (2.5)$$

а межі інтервалів знаходять за формулою

$$x_i = a + ih, \quad i = 1, \dots, k - 1. \quad (2.6)$$

Обчисливши після цього абсолютні і відносні частоти потрапляння в кожен отриманий інтервал, будемо мати таблицю

Інтервал $(x_{i-1}; x_i)$	$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	n_1	n_2	...	n_k	n
Відносна частота w_i	w_1	w_2	...	w_k	1

Означення 5. Така таблиця називається інтервальним статистичним рядом.

Зауваження 3. Всі значення вибірки мають потрапити в якийсь з інтервалів і лише один раз. Тобто, хоча, як правило i -ий інтервал позначають з круглими дужками $-(x_{i-1}; x_i)$ – але мають на увазі $(x_{i-1}; x_i]$, тобто значення x_i потрапляє в лівий з двох сусідніх інтервалів.

- Може бути, що для деяких інтервалів $n_i = w_i = 0$.

2.3. Емпірична функція розподілу

Означення 6. Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що для кожного x дорівнює **відносній частоті** події $\{X < x\}$.

- Слід відрізнити емпіричну функцію розподілу від теоретичної функції розподілу²⁶ $F(x)$, яка для кожного x дорівнює **ймовірності** події $\{X < x\}$.

При великих n значення $F^*(x)$ і $F(x)$ відрізняються мало (це наслідок закону великих чисел), а оскільки теоретичну функцію розподілу ми не знаємо, то замість неї працюємо з емпіричною функцією розподілу.

Властивості емпіричної функції розподілу

1. $0 \leq F^*(x) \leq 1$.
2. $F^*(x)$ неспадна функція по x .
3. $F^*(-\infty) = 0$; $F^*(+\infty) = 1$.
4. Відносна частота потрапляння випадкової величини X в інтервал $[a; b)$ дорівнює

$$F^*(b) - F^*(a).$$

- 4.1. Відносна частота потрапляння випадкової величини X в інтервал $[a; +\infty)$ дорівнює

$$1 - F^*(a).$$

²⁶ Теоретичну функцію розподілу $F(x)$ було розглянуто раніше – в Темі 7 Частини I.

Для побудови емпіричної функції розподілу та її графіка зручно використовувати накопичені частоти $\tilde{w}_i$ – сума відносних частот тих значень варіант, які менші або дорівнюють x_i :

$$\tilde{w}_i = \tilde{w}_{i-1} + w_i = w_1 + w_2 + \dots + w_i.$$

Приклад 1. (продовження) Для даної раніше вибірки побудувати емпіричну функцію розподілу та її графік.

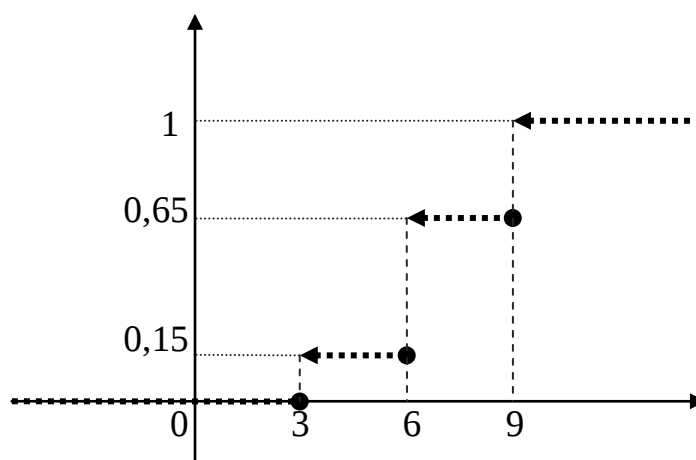
Розв'язання. Згідно попереднього матеріалу, маємо таку таблицю частот

Варіанта x_i	3	6	9	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	3	10	7	20
Відносна частота w_i	0,15	0,5	0,35	1
Накопичена частота $\tilde{w}_i$	0,15	0,65	1	

Тоді, за означенням емпіричної функції розподілу та цієї таблицю, отримуємо таку емпіричну функцію розподілу для даної вибірки:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3 \\ 0,15, & \text{при } 3 < x \leq 6 \\ 0,65, & \text{при } 6 < x \leq 9 \\ 1, & \text{при } x > 9 \end{cases}$$

а графік цієї емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ має вигляд:



2.4. Графічне зображення статистичних даних

Для наочності замість таблиць часто будують різні графіки статистичного розподілу вибірки.

Означення 7. Полігон²⁷ частот – це ламана, відрізки якої поєднують на площині точки з координатами $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_m; n_m)$.

Означення 8. Полігон відносних частот – це ламана, відрізки якої поєднують на площині точки з координатами $(x_1; w_1), (x_2; w_2), \dots, (x_m; w_m)$.

- Неважко здогадатися, що ці два види полігонів відрізняються лише масштабом по осі ординат.

Приклад 1. (продовження) Побудувати полігон частот для даної вибірки.

Розв'язання. Згідно означення полігону, будемо мати такий графік



Якщо ж маємо інтервальний ряд розподілу, то для графічного зображення замість полігону використовують гістограму.

Означення 9. Гістограма (абсолютних або відносних частот) – це східчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали

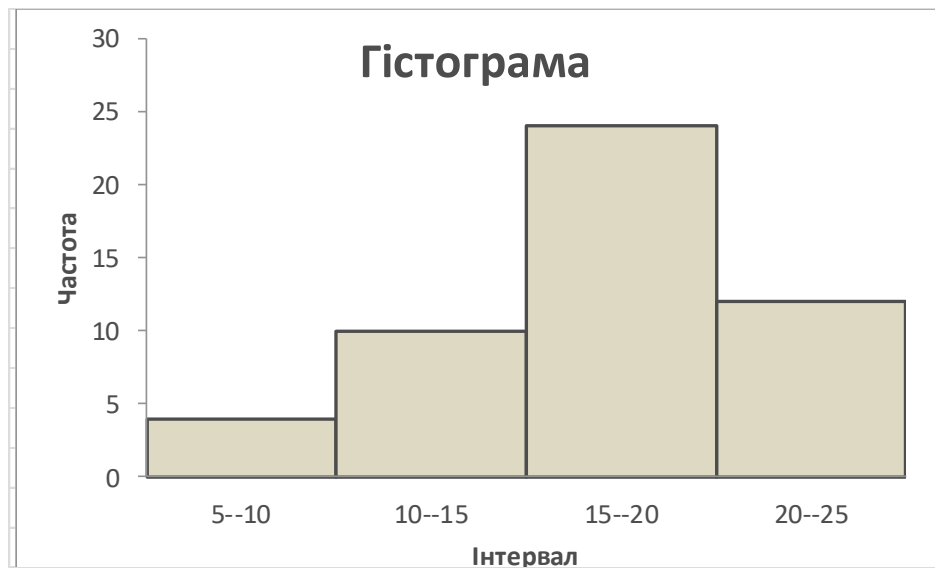
²⁷ “Багатокутник” латиною.

$(x_{i-1}; x_i)$, а висотами – відповідно абсолютні або відносні частоти потрапляння в цей інтервал.

Приклад 2. Побудувати гістограму для вибірки, заданої таблицею

Інтервал $(x_{i-1}; x_i)$	(5; 10)	(10; 15)	(15; 20)	(20; 25)	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	4	10	24	12	50

Розв'язання. Згідно Означення 9, будемо мати такий графік



Зауваження 4. Зверніть увагу, що при побудові гістограми для відносних частот висоту часто ще ділять на довжину основи так, щоб площа отриманого i -го прямокутника дорівнювала б значенню i -ої відносної частоти, отже площа всіх прямокутників гістограми дорівнювала б одиниці.

Означення 10. Кумулята – це полігон для накопичених частот. Вважається наближеною ламаною емпіричної функції розподілу для неперервних випадкових величин.

Питання та задачі до теми

1. Що таке варіанта?
2. Як із вибірки утворюють варіаційний ряд?
3. Що таке абсолютна частота і що таке відносна частота?
4. Що таке таблиця частот?

5. Які суми перевіряють для контролю правильності при побудові таблиці частот?
6. Коли використання таблиці частот є незручним? Який статистичний інструмент використовують в цьому випадку?
7. Для чого виконують групування даних?
8. Про що слід пам'ятати при використанні формули Стерджесса?
9. Чи може абсолютна частота одного з інтервалів після групування даних дорівнювати нулю? Що слід робити, якщо це сталося?
10. Що таке емпірична функція розподілу і чим вона відрізняється від теоретичної функції розподілу?
11. Які властивості емпіричної функції розподілу відрізняються від відповідних властивостей теоретичної функції розподілу?
12. Що таке накопичені частоти? Як їх знайти?
13. Дайте означення полігону, гістограми, кумуляти.
14. Як будують наближену емпіричну функцію розподілу для неперервних випадкових величин?

Задача 1. Для заданої таблицею вибірки побудувати емпіричну функцію розподілу, її графік та полігон частот.

Варіанта x_i	5	7	10	13	15	СУМА
Абсолютна частота n_i	2	3	8	7	5	??

Задача 2. Для заданої інтервальною таблицею вибірки побудувати гістограму та кумуляту як наближення емпіричної функції розподілу.

Інтервал $(x_{i-1}; x_i)$	(2; 5)	(5; 8)	(8; 11)	(11; 14)	СУМА
Абсолютна частота n_i	9	10	25	6	??

Задача 3. Для заданої вибірки побудувати інтервальний ряд розподілу, гістограму та кумуляту як наближення емпіричної функції розподілу.

1, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 14, 15, 15, 15, 16, 19, 20, 20.

Тема 3. Числові характеристики вибірки

3.1. Основні числові характеристики вибірки

Означення 1. Вибіркове середнє (вибіркове математичне сподівання; вибірковий перший момент) – це середнє арифметичне вибірки. Позначають одним з символів: $\bar{x}$; $\overline{x_B}$; $\bar{X}$ і знаходять за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}. \quad (3.1)$$

Якщо варіанти x_i мають частоти n_i (тут $i = 1, \dots, m$; $\sum_{i=1}^m n_i = n$), то вибіркове середнє знаходять за формулою середньозваженого:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i = \frac{x_1 n_1 + \dots + x_m n_m}{n} \quad (3.1.1)$$

Означення 2. Вибіркова дисперсія – це середнє арифметичне квадратів відхилень значень вибірки від вибіркового середнього:

$$D_B \equiv D_B X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad (3.2)$$

якщо ж варіанти x_i мають частоти n_i (тут $i = 1, \dots, m$; $\sum_{i=1}^m n_i = n$), то

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i \quad (3.2.1)$$

Означення 3. Другий вибірковий момент – це середнє арифметичне квадратів значень вибірки, яке знаходять за однією з формул:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}, \quad (3.3)$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i = \frac{x_1^2 n_1 + \dots + x_m^2 n_m}{n}. \quad (3.3.1)$$

Формули (3.2) або (3.2.1) можна спростити:

$$D_B = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \quad (3.4)$$

Означення 4. Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (3.5)$$

Означення 5. Виправлена вибірка дисперсія – це величина, яка знаходиться за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B \quad (3.6)$$

Зауваження 1. З (3.6) бачимо, що при великих n величини S^2 і D_B відрізняються мало. Але при $n < 30$ важливо для оцінки невідомого теоретичного параметру дисперсії використовувати саме виправлену вибіркoву дисперсію S^2 .

Означення 6. Виправлене середнє квадратичне відхилення – це число S , що обчислюється так:

$$S = \sqrt{S^2}. \quad (3.7)$$

Зауваження 2. При обчисленнях середніх величин без комп'ютера для спрощення часто є доцільним використовувати метод добутків, формули та приклад застосування якого наведені в Додатку 2.

Приклад 1. Для заданої таблицею вибірки знайти її числові характеристики $\bar{x}$, D_B , S^2 , σ_B та S .

Варіанта x_i	5	7	10	13	15	СУМА
Абсолютна частота n_i	2	3	8	7	5	??

Розв'язання. Спочатку знайдемо n – загальне число спостережень. Для цього додамо всі абсолютні частоти: $n = 2 + 3 + 8 + 7 + 5 = 25$. Далі за формулами (3.1) – (3.7):

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \frac{1}{25} (5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 8 + 13 \cdot 7 + 15 \cdot 5) = \\ &= \frac{1}{25} (10 + 21 + 80 + 91 + 75) = \frac{277}{25} = 11,08.\end{aligned}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i = \frac{1}{25} (5^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 8 + 13^2 \cdot 7 + 15^2 \cdot 5) = \frac{3305}{25} = 132,2;$$

$$D_B = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 132,2 - (11,08)^2 = 132,2 - 122,7664 \approx 9,43;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{9,43} \approx 3,07;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{25}{24} \cdot 9,43 \approx 9,82; \quad S = \sqrt{9,82} \approx 3,13.$$

3.2. Інші числові характеристики вибірки

Крім згаданих вище, ще використовують такі характеристики вибірки.

Означення 8. Розмах варіації – різниця між найбільшою і найменшою варіантами:

$$RoX = x_{\text{найб}} - x_{\text{найм}}.$$

Означення 9. Варіанта, що має найбільшу частоту, називається модою і позначається MoX .

Якщо ж маємо інтервальний ряд розподілу, то

$$MoX = x_{MoX} + h \cdot \frac{n_{MoX} - n_{MoX-1}}{2n_{MoX} - n_{MoX-1} - n_{MoX+1}},$$

де x_{MoX} – нижня межа модального інтервалу;

h – довжина модального інтервалу;

n_{MoX} – частота модального інтервалу;

n_{MoX-1} – частота передмодального інтервалу;

n_{MoX+1} – частота післямодального інтервалу.

- Мода може бути не єдиною (бімодальний / полімодальний розподіл).

Означення 10. Варіанта, що ділить варіаційний ряд на дві рівних частини, називається медіаною і позначається MeX . Для вибірки або варіаційного ряду медіану знаходять так:

$$MeX = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{якщо } n = 2k + 1 \\ \frac{x_{k+1} + x_k}{2}, & \text{якщо } n = 2k \end{cases}.$$

Якщо ж маємо інтервальний ряд розподілу, то медіана знаходиться так:

$$MeX = x_{MeX} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{MeX-1} n_i}{n_{MeX}},$$

де x_{MeX} – нижня межа медіанного інтервалу;

h – довжина медіанного інтервалу;

n_{MeX} – частота медіанного інтервалу.

Питання та задачі до теми

1. Що таке вибіркове середнє $\bar{x}$ і як воно знаходиться?
2. Що таке другий вибірковий момент $\overline{x^2}$ і як він знаходиться?
3. Що таке вибіркова дисперсія D_B і за яким формулами вона знаходиться?
4. Що таке виправлена вибіркова дисперсія S^2 і як вона знаходиться?
5. Що таке величини σ_B та S ? За якими формулами вони знаходяться?
6. Які ще числові характеристики вибірки ви знаєте?

Задача 1. Для заданої таблиці вибірки знайти її числові характеристики $\bar{x}$, D_B , S^2 , σ_B , S , а також RoX , MoX і MeX .

x_i	1	2	3	4	5	n
n_i	15	12	9	8	6	50

Тема 4. Статистичні оцінки параметрів розподілу

4.1. Основні означення та поняття

За емпіричним законом розподілу знаходять оцінки невідомих параметрів розподілу випадкової величини, що розглядається, та її числових характеристик. Оскільки ці оцінки можуть бути побудованими різними способами, то серед різних оцінок одного параметру доцільно вибрати ті, які дають гарні, *в певному сенсі*, наближення.

Отже, нехай розглядаємо вибірку об'єму n спостережень реалізації деякої випадкової величини X . Результат i -го спостереження будемо позначати x_i , тоді вся вибірка – це n -вимірний випадковий вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- Закон розподілу (і його параметри) випадкових величин x_i – один і той же – це закон розподілу випадкової величини X .

Означення 1. Статистична оцінка деякого невідомого теоретичного параметру розподілу a – позначають a^* або $\hat{a}$ – це функція від вибірових даних:

$$a^* = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Статистична оцінка – це випадкова величина, тому в подальшому будемо вести мову про закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

- Випадкову величину a^* називають просто статистика.

Статистичні оцінки можна будувати за допомогою різних функціональних залежностей. Але на практиці цікавлять ті статистичні оцінки, які дають найбільш адекватні, *в певному сенсі*, наближення.

На підставі граничних теорем теорії ймовірностей та вимог здорового глузду до статистичних оцінок висуваються такі основні вимоги: незміщеність; ефективність; слушність.

Означення 2. Незміщеною (незсуненою) називають статистичну оцінку параметра, **математичне сподівання якої дорівнює параметру**, що оцінюється, при *будь-якому об'ємі* вибірки:

$$Ma^* = a.$$

- Тобто при використанні статистичної оцінки a^* замість справжнього значення a не має бути систематичних помилок в бік заниження/завищення.

Означення 3. Ефективною називають статистичну оцінку параметра, що при *заданому об'ємі* вибірки, має **найменш можливу дисперсію**:

$$Da^* \rightarrow \min.$$

- Тобто статистична оцінка a^* має бути якомога менш випадковою.

Означення 4. Слушною (переконливою, конзистентною) називають статистичну оцінку параметра, що підкоряється закону великих чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|a - a^*| < \varepsilon\} = 1.$$

- Тобто при *збільшенні об'єму вибірки* ($n \rightarrow \infty$) статистична оцінка a^* **прямує за ймовірністю до параметру, що оцінюється.**

Теорема 4.1. (Умова слухності незміщеної оцінки)

Якщо a^* – незміщена оцінка невідомого теоретичного параметру a і $Da^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то a^* буде слушною оцінкою.

Доведення. Нерівність Чебишева:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Підставимо в цю нерівність випадкову величину a^* і використаємо те, що a^* є незміщеною оцінкою, тобто $Ma^* = a$:

$$P\{|a^* - a| < \varepsilon\} = P\{|a^* - Ma^*| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{Da^*}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Теорему доведено.

4.2. Властивості основних числових характеристик вибірки

Вище введено поняття вибіркового середнього, вибіркової дисперсії та інші. Ці величини обчислюються за вибіркою, тому є статистичними оцінками параметрів розподілу. Розглянемо їх властивості детально.

Властивості вибіркового середнього $\bar{x}$ та вибіркової дисперсії D_B

Позначимо a, σ^2 – невідомі теоретичні параметри відповідно математичного сподівання та дисперсії випадкової величини X , яку ми досліджуємо за допомогою вибірки.

1. З означення $\bar{x}$ та властивостей математичного сподівання отримуємо таке значення математичного сподівання величини $\bar{x}$:

$$M\bar{x} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Mx_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = a,$$

тобто величина $\bar{x}$ є незміщеною оцінкою невідомого теоретичного параметру математичного сподівання a .

2. Аналогічним чином, знайдемо дисперсію $\bar{x}$

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n Dx_i\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma^2\right) = \frac{1}{n} \cdot n\sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2.$$

Тоді $D\bar{x} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому за теоремою 4.1 величина $\bar{x}$ є слушною, а при достатньо великих n – ще й ефективною, оцінкою невідомого теоретичного параметру математичного сподівання a .

3. Як наслідок ЦГТ і попередніх пунктів, при достатньо великих n величина $\bar{x}$ є нормально розподіленою випадковою величиною з

параметрами $M\bar{x} = a$ і $D\bar{x} = \frac{1}{n} \sigma^2$, тобто $\bar{x} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Зауваження 1. Можемо зробити висновок, що $\bar{x}$ буде незміщеною та слушною, а при достатньо великих n – і ефективною, оцінкою невідомого теоретичного параметру математичного сподівання.

Зауваження 2. З означення D_B та властивостей математичного сподівання можемо показати, що D_B є **зміщеною**, але – при великих n – **асимптотично незміщеною, ефективною та слухною** оцінкою невідомого теоретичного параметру дисперсії σ^2 .

Але формулу (3.2) для оцінки невідомого теоретичного параметру дисперсії можна виправити, зробивши її незміщеною – з цих міркувань вводиться і тому так називається виправлена вибіркова дисперсія

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Зауваження 3. Можна довести, що S^2 – це **незміщена, ефективна та слухна** оцінка невідомого теоретичного параметру дисперсії, оскільки:

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} D_B\right) = \frac{n}{n-1} M(D_B) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

Зауваження 4. Доведено, що σ_B та S є **зміщеними** оцінками невідомого теоретичного параметру середнього квадратичного відхилення σ , проте саме σ_B та S використовують для оцінки σ – їх просто знайти, а в загальному випадку просто немає кращих оцінок.

- Крім того, можна довести, що S не є ефективною, але є **симетрично ефективною** оцінкою невідомого теоретичного параметру середнього квадратичного відхилення σ : при збільшенні n відношення дисперсії S до мінімально можливої дисперсії оцінки σ наближається до 1.

4.3. Метод моментів

Метод моментів для знаходження статистичних оцінок невідомих теоретичних параметрів розподілу (запропонований К. Пірсоном у 1894 р.) полягає в прирівнюванні теоретичних моментів розподілу відповідним вибіркоvim (емпіричним) моментам, тобто моментам, знайденим за вибіркою. Важливо, що закон розподілу, а значить і зв'язок його теоретичних параметрів розподілу з теоретичними моментами, вважаємо відомим.

Алгоритм методу моментів

1. Маємо вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$, яку вважаємо розподіленою за певним відомим (за умовою або з інших причин) законом розподілу, який залежить від одного або кількох невідомих теоретичних параметрів.

2. Згідно із властивостями закону розподілу можемо виписати рівності, які пов'язують теоретичні моменти (наприклад, MX та DX) із теоретичними параметрами розподілу. Цих рівностей має бути стільки, скільки є невідомих теоретичних параметрів розподілу. Якщо рівностей більше однієї, то записуємо їх в системі.

3. За вибіркою обчислюємо відповідні вибіркові моменти і підставляємо отриманні значення в рівності з попереднього пункту.

4. Розв'язуємо отриману систему (або рівність) відносно невідомих параметрів розподілу. Отримані числові значення і будемо називати оцінками невідомих теоретичних параметрів розподілу за методом моментів.

Приклад 1. Маємо вибірку об'єму n зі спостережень реалізації випадкової величини X , яка є розподіленою нормально з невідомими параметрами a і σ^2 . Знайти оцінки параметрів методом моментів.

Розв'язання. Маємо 2 невідомих параметра розподілу – a і σ^2 .

За властивостями нормального розподілу знаємо, що $MX = a$, $DX = \sigma^2$.

Далі за вибіркою обчислюємо відповідні вибіркові моменти $\overline{x_B}$ і $D_B X$ (формули див. нижче), підставляємо їх замість MX і DX та виражаємо невідомі теоретичні параметри a і σ^2 з отриманої системи:

$$\begin{cases} \overline{x_B} = a \\ D_B X = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^* = \overline{x_B} \\ (\sigma^2)^* = D_B X \end{cases}.$$

Отримані (для конкретної вибірки – числові) величини і є оцінками невідомих параметрів нормального розподілу методом моментів.

4.4. Метод максимальної вірогідності

Метод максимальної вірогідності або правдоподібності для знаходження статистичних оцінок невідомих теоретичних параметрів розподілу є найважливішим з теоретичної точки зору та заснований на

Означення 5. Принцип максимальної вірогідності: за заданою вибіркою вибираємо в якості оцінки невідомого теоретичного параметру розподілу a таке його значення a^* , для якого сумісна ймовірність появи даної вибірки є максимальною. Це значення a^* називається оцінкою максимальної вірогідності, скорочено ОМВ²⁸.

Для методу максимальної вірогідності, як і для методу моментів, також вважаємо відомим теоретичний закон розподілу даної вибірки.

Отже, розглядаємо вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$ з n спостережень реалізацій певної випадкової величини X , з відомим теоретичним законом розподілу, який залежить від m невідомих теоретичних параметрів розподілу $a_1, \dots, a_m$.

Означення 6. Функція вірогідності – це функція від $n + m$ змінних, яка позначається $L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ та знаходиться залежно від відомого теоретичного закону розподілу випадкової величини X :

а) для неперервної випадкової величини X зі щільністю $f(x, a_1, \dots, a_m)$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m); \quad (4.1)$$

б) для дискретної випадкової величини X , що задана рядом розподілу:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
P	$p_1(a_1, \dots, a_m)$	$p_2(a_1, \dots, a_m)$	$\dots$	$p_k(a_1, \dots, a_m)$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^n p_i(a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (4.1.1)$$

²⁸ Часто зустрічається англomовна аббревіатура MLE – “maximum likelihood estimation”.

Зверніть увагу, в пункті б) в ряді розподілу x_i – це i -те значення випадкової величини X , а в формулі (4.1.1) x_i – це i -те вибіркве значення.

Означення 7. Функція логарифмічної вірогідності – це натуральний логарифм від функції вірогідності

$$\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m). \quad (4.2)$$

Для заданої вибірки і функція вірогідності, і функція логарифмічної вірогідності стають функціями від m змінних $a_1, \dots, a_m$, які набувають екстремумів в тих самих точках $(a_1, \dots, a_m)$.

Алгоритм методу максимальної вірогідності

1. Маємо вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$, яку вважаємо розподіленою за певним відомим (за умовою або з інших причин) законом розподілу, який залежить від одного або кількох невідомих теоретичних параметрів. Будуємо для цієї вибірки функцію логарифмічної вірогідності (4.2).

2. Шукаємо максимум функції логарифмічної вірогідності

$$\max_{a_1, \dots, a_m} \Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \rightarrow ?$$

Оскільки (4.2) – це функція багатьох змінних, то згідно з теорією екстремумів функцій багатьох змінних, дана задача зводиться до пошуку стаціонарних точок, тобто розв'язків системи з m рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_m} = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

і дослідження отриманих стаціонарних точок на наявність максимуму.

Нагадаємо достатню умову наявності максимуму функції багатьох

змінних: якщо $\frac{d^2 \Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1^*, \dots, a_m^*)}{da^2} < 0$,

то $(a_1^*, \dots, a_m^*)$ – точка максимуму функції $\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$.

Також можна використовувати інші способи дослідження на екстремум (функція однієї змінної, графічний спосіб).

3. Значення параметрів $a_1^*, \dots, a_m^*$, в яких функція логарифмічної вірогідності (а значить і функція вірогідності) набуває свого максимуму, і будуть шуканими оцінками невідомих теоретичних параметрів розподілу за методом максимальної вірогідності (MLE – оцінки параметрів).

Приклад 2. Знайти методом максимальної вірогідності оцінку невідомого теоретичного параметру λ показникового розподілу.

Розв'язання. Отже, маємо вибірку об'єму n спостережень реалізації випадкової величини X , яка за умовою є розподіленою показниково з невідомим параметром λ , тобто щільність випадкової величини X має вигляд:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}.$$

Маємо неперервну випадкову величину X , задану щільністю та один невідомий теоретичний параметр λ .

Будуємо функцію вірогідності за формулою (4.1):

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Будуємо функцію логарифмічної вірогідності (4.2):

$$\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

Отримали функцію однієї змінної. Знаходимо її критичні точки:

$$\frac{d\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{d\lambda} = \frac{d\left(n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i\right)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Маємо критичну точку $\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$. Досліджуючи похідну функції

логарифмічної вірогідності на знакосталість, маємо що це точка максимуму.

Отже, $\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$ – це оцінка невідомого теоретичного параметру λ

показникового розподілу, отримана методом максимальної вірогідності.

Теорема 4.2. (Властивість оцінки максимальної вірогідності)

Якщо існує ефективна незміщена оцінка $T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ скалярного теоретичного параметру розподілу a , то оцінка максимальної вірогідності a^* існує і співпадає з T .

Питання та задачі до теми

1. Що називають статистичною оцінкою?
2. Які основні вимоги до статистичних оцінок?
3. Чому якщо дисперсія незміщеної оцінки прямує до 0, то така оцінка буде слушною?
4. Якими методами знаходять статистичні оцінки?
5. Назвіть властивості вибіркового середнього $\bar{x}$.
6. Назвіть властивості вибіркової дисперсії D_B .
7. Які властивості виправленої вибіркової дисперсії S^2 ви знаєте?
8. Що таке величини σ_B та S ? Як їх знаходять та які їх властивості?

Задача 1. Для заданої таблицею вибірки знайти її числові характеристики $\bar{x}$, D_B , S^2 , σ_B , S , а також RoX , MoX і MeX .

x_i	1	2	3	4	5	n
n_i	15	12	9	8	6	50

Задача 2. Знайти оцінку невідомого теоретичного параметру λ показникового розподілу методом моментів.

Задача 3. Знайти оцінку невідомих теоретичних параметрів a і b рівномірного неперервного розподілу методом максимальної вірогідності.

Тема 5. Довірчий інтервал. Довірчі ймовірності

5.1. Основні означення та поняття

Для оцінок невідомого теоретичного параметру розподілу випадкової величини X використовують два види оцінок:

- точкові, коли оцінка виражається **одним числом** (це матеріал попередньої теми: $\bar{x}, D_B, S^2$);
- інтервальні, кожна з яких задається **двома числами**: початком і кінцем інтервалу.

Точкові оцінки можуть бути занадто "грубими" (можуть із значною ймовірністю сильно відрізнятись від параметру, що оцінюється). Тому в практичних задачах як правило використовують інтервальні оцінки невідомих теоретичних параметрів розподілу: шукають такий інтервал (що залежить від вибірових даних), який із заданою, близькою до 1, ймовірністю накриває невідоме теоретичне значення параметру розподілу.

Для невідомого теоретичного параметру розподілу θ ²⁹ такий інтервал позначають $(\theta_1^*; \theta_2^*)$.

Для інтервальних оцінок вводять наступні поняття:

Означення 1. Надійністю або довірчою ймовірністю інтервальної оцінки $(\theta_1^*; \theta_2^*)$ справжнього значення невідомого теоретичного параметру розподілу θ називають ймовірність того, що цей інтервал **накриває** справжнє невідоме значення параметру θ :

$$P\{(\theta_1^*; \theta_2^*) \ni \theta\} = \gamma. \quad (5.1)$$

Як правило, надійність γ ³⁰ близька до одиниці: 0,9; **0,95**; 0,99; 0,999. Надійність в практичних задачах вибирають виходячи з небажаності помилитися; найчастіше беруть значення 0,95 (тобто шанс помилитися 5%).

²⁹ θ – грецька буква, вимовляється *тета*.

³⁰ γ – грецька буква, вимовляється *гамма*.

Означення 2. Інтервал $(\theta_1^*; \theta_2^*)$, що накриває справжнє значення невідомого теоретичного параметру розподілу θ із заданою ймовірністю γ називають довірчим інтервалом параметру θ надійності γ ; а його кінці θ_1^*, θ_2^* – довірчими межами.

- Означення довірчого інтервалу та ймовірності формують так:

$$P\{(\theta_1^*; \theta_2^*) \ni \theta\} \geq \gamma. \quad (5.1.1)$$

Зауваження 1. Замість γ в (5.1) може бути написано $1 - \alpha$, де α – це близьке до нуля число, яке дорівнює ймовірності того, що інтервал $(\theta_1^*; \theta_2^*)$ не накриває справжнє значення невідомого параметру θ :

$$\alpha = P\{\theta \notin (\theta_1^*; \theta_2^*)\}.$$

Величину α називають рівнем значущості довірчого інтервалу $(\theta_1^*; \theta_2^*)$.

Зауваження 2. Інтервальні оцінки, як правило, будують з використанням точкових оцінок з наступною послідовністю дій:

- знаходять точкову оцінку (бажано – з гарними властивостями) θ^* невідомого теоретичного параметру θ ;
- знаходять величину ε так, щоб отримати симетричний відносно точкової оцінки θ^* довірчий інтервал заданої надійності γ , тобто ε таке, щоб виконувалась рівність

$$P\{(\theta^* - \varepsilon; \theta^* + \varepsilon) \ni \theta\} = \gamma.$$

5.2. Побудова довірчих інтервалів для випадкової величини X , розподіленої нормально

Будемо знаходити інтервальні оцінки для двох найважливіших теоретичних параметрів розподілу – для математичного сподівання і дисперсії.

В загальному випадку довірчі інтервали знаходять за означенням, використовуючи знайдені точкові оцінки невідомих теоретичних параметрів та властивості конкретного закону розподілу.

Як наслідок центральної граничної теореми будемо вважати випадкову величину X , яку ми досліджуємо вибіркоvim методом, розподіленою нормально з параметрами a та σ^2 .

Можливі такі ситуації:

5.2.1. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомому математичному сподіванні і відомій дисперсії

Постановка задачі : маємо вибірку з n спостережень випадкової величини X , яку вважаємо розподіленою нормально з **невідомим математичним сподіванням a і відомою** (з якихось причин) **дисперсією σ^2** .

Шукаємо довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a .

В такій ситуації точковою оцінкою для невідомого параметру математичного сподівання a буде вибіркове середнє $\bar{x}$. А інтервальну оцінку отримаємо з раніше вивченого матеріалу. Пригадаємо такі факти:

1) $\bar{x}$ є незміщеною та слушною оцінкою для a .

2) $M\bar{x} = a$; $D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$.

3) $\bar{x} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

4) Для $X \sim N(a, \sigma^2)$ маємо оцінку

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Отже, підсумовуючи ці факти, будемо мати:

$$P\left(\left|\bar{x} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma. \quad (5.2)$$

Число δ ³¹ називається точністю оцінки.

Для спрощення подальших обчислень введемо позначення. Нехай

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow \delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.3)$$

Тоді з формули (5.2) будемо мати

$$P\left(\left|\bar{x} - a\right| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

звідки, розкривши модуль,

$$P\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Тобто отримали, згідно Означення 1, для невідомого параметру математичного сподівання a довірчий інтервал надійності γ .

Алгоритм побудови шуканого довірчого інтервалу

1. З таблиці функції Лапласа шукаємо таке значення t , щоб

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}. \quad (5.4)$$

2. Тоді шуканий довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a має вигляд:

$$a \in \left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (5.5)$$

Приклад 1. У вибірці об'єму $n = 156$, побудованої зі спостережень реалізації нормально розподіленої випадкової величини X , відома дисперсія $\sigma^2 = 81$ та невідоме математичне сподівання a . Відома величина $\bar{x} = 76,5$. Знайти довірчий інтервал надійності $\gamma = 0,95$ для невідомого параметру математичного сподівання a .

³¹ δ – грецька буква, вимовляється *дельта*.

Розв'язання. За таблицею функції Лапласа знайдемо t з умови (5.4)

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,475 \Rightarrow t = 1,96.$$

Тепер можемо знайти шуканий довірчий інтервал за формулою (5.5):

$$a \in \left(76,5 - 1,96 \frac{9}{\sqrt{156}}; 76,5 + 1,96 \frac{9}{\sqrt{156}} \right);$$
$$a \in (76,5 - 1,41; 76,5 + 1,41) \Rightarrow a \in (75,09; 77,91).$$

5.2.2. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомих математичному сподіванні і дисперсії

Маємо вибірку з n спостережень нормально розподіленої випадкової величини X , з **невідомими математичним сподіванням a і дисперсією σ^2** .

Шукаємо довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру a .

В цій ситуації точковою оцінкою для невідомого параметру математичного сподівання a звісно теж буде вибіркове середнє $\bar{x}$. Шуканий довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a знаходиться за формулою, майже аналогічній формулі (5.5):

$$a \in \left(\bar{x} - t_{n,\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n,\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \quad (5.6)$$

де $S = \sqrt{S^2}$ це виправлене середнє квадратичне відхилення;

$t_{n,\gamma}$ – квантиль рівня γ (або ж критична точка рівня значущості $1-\gamma$) розподілу Стюдента з $n - 1$ ступенем свободи, тобто число $t_{n,\gamma}$ знаходять за таблицею розподілу Стюдента з умови

$$P(|\tau_{n-1}| \leq t_{n,\gamma}) = \gamma. \quad (5.7)$$

Зауваження 3. При $n > 30$ в силу того, що при таких n розподіл Стюдента практично не відрізняється від нормального $N(0; 1)$, то в формулі

(5.6) замість $t_{n,\gamma}$ з формули (5.7) доцільно використовувати квантиль функції Лапласа t з формули (5.4).

- А при $n < 30$ використання в формулі (5.6) величини $t_{n,\gamma}$ з формули (5.7) дає точнішу оцінку, ніж використання величини t з формули (5.4).

5.2.3. Побудова довірчого інтервалу для невідомої дисперсії

Маємо вибірку з n спостережень випадкової величини X , яку вважаємо розподіленою нормально з **невідомою дисперсією** σ^2 .

Шукаємо довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру σ^2 .

Точковою оцінкою для невідомого параметру дисперсії σ^2 буде виправлена вибіркова дисперсія S^2 . А шуканий довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру дисперсії σ^2 знаходиться за формулою:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{nS^2}{\chi_2}, \frac{nS^2}{\chi_1} \right) \quad (5.8)$$

де величини χ_1, χ_2 – квантилі розподілу χ^2 з $n - 1$ ступенем свободи рівнів $\frac{1-\gamma}{2}$ та $\frac{1+\gamma}{2}$ відповідно. Тобто числа χ_1, χ_2 знаходяться з таблиці розподілу χ^2 з $n - 1$ ступенем свободи з умов

$$P(\chi^2(n-1) \leq \chi_1) = \frac{1-\gamma}{2}; \quad P(\chi^2(n-1) \leq \chi_2) = \frac{1+\gamma}{2}. \quad (5.9)$$

- Зверніть увагу, що $\chi_1 < \chi_2$.

Приклад 2. Для вибірки об'єму $n = 20$, побудованої зі спостережень реалізації нормально розподіленої випадкової величини X з невідомими математичним сподіванням a та дисперсією σ^2 , знайдено величини $\bar{x} = 7,22$ і $S^2 = 2,4$. Знайти довірчий інтервал надійності $\gamma_1 = 0,95$ для a та надійності $\gamma_2 = 0,9$ для σ^2 .

Розв'язання. З таблицею розподілу Стюдента (Таблиця 4 в Додатку 1) з $n - 1 = 20 - 1 = 19$ ступенями свободи знайдемо $t_{n, \gamma}$ з умови (5.7). Маємо :

$$P(|\tau_{19}| \leq t_{n, \gamma}) = \gamma_1 = 0,95 \Rightarrow t_{n, \gamma} = 2,093.$$

Тепер можемо знайти шуканий довірчий інтервал надійності $\gamma_1 = 0,95$ для невідомого параметру математичного сподівання a за формулою (5.6):

$$a \in \left(7,22 - 2,093 \cdot \frac{\sqrt{2,4}}{\sqrt{20}} ; 7,22 + 2,093 \cdot \frac{\sqrt{2,4}}{\sqrt{20}} \right);$$

$$a \in (7,22 - 0,725 ; 7,22 + 0,725) \Rightarrow a \in (6,495 ; 7,945).$$

Тепер за таблицею розподілу Пірсона χ^2 (див. Таблицю 3 в Додатку 1) з $n - 1 = 20 - 1 = 19$ ступенями свободи знайдемо χ_1, χ_2 з умови (5.9) :

$$P(\chi^2(19) \leq \chi_1) = \frac{1 - \gamma_2}{2} = 0,05 \Rightarrow \chi_1 = 10,117;$$

$$P(\chi^2(19) \leq \chi_2) = \frac{1 + \gamma_2}{2} = 0,95 \Rightarrow \chi_2 = 30,144.$$

Тоді шуканий довірчий інтервал надійності $\gamma_2 = 0,9$ для невідомого параметру дисперсії σ^2 за формулою (5.8) має вигляд:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{20 \cdot 2,4}{30,144} ; \frac{20 \cdot 2,4}{10,117} \right) \Rightarrow \sigma^2 \in \left(\frac{48}{30,144} ; \frac{48}{10,117} \right);$$

$$\sigma^2 \in (1,592 ; 4,744).$$

5.24. Знаходження об'єму вибірки для знаходження оцінки математичного сподівання при відомій дисперсії

Маємо випадкову величину $X \sim N(a; \sigma^2)$, де a – невідоме, а σ^2 – відоме.

Треба знайти такий об'єм вибірки, щоб за цією вибіркою із заданою надійністю γ можна було знайти довірчий інтервал заданої точності δ невідомого параметру математичного сподівання a .

Використаємо отримані вище формули (5.3)–(5.5). Отже, з формули (5.3)

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow \boxed{n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}} \quad (5.10)$$

де, за формулою (5.4), число t визначається заданою надійністю γ з формули:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Зауваження 4. Об'єм вибірки – ціле число, тому n слід брати цілим і більшим за число в правій частині (5.10)

Зауваження 5. Сам же довірчий інтервал надійності γ та точності δ для невідомого параметру математичного сподівання a знаходиться за формулою (5.5), тобто треба зробити вибірку об'єму, не меншого за n з (5.10), потім обчислити $\bar{x}$ цієї вибірки, а тоді використати формулу (5.5).

Зауваження 6. Формулу (5.10) для знаходження потрібного об'єму вибірки можна використовувати і при невідомій дисперсії σ^2 – тоді замість σ^2 треба брати виправлену вибірккову дисперсію S^2 (або вибірккову дисперсію D_B). Тобто треба спочатку зробити вибірку довільного об'єму, потім обчислити S^2 (або D_B) цієї вибірки, а тоді знайти потрібний об'єм вибірки за формулою (5.10).

Приклад 3. Випадкова величина $X \sim N(a; \sigma^2)$, де параметр a – невідомий, а дисперсія $\sigma^2 = 0,25$.

Який треба взяти об'єм вибірки спостережень реалізації цієї випадкової величини, щоб за цією вибіркою із надійністю $\gamma = 0,95$ можна було знайти довірчий інтервал точності $\delta = 0,1$ невідомого теоретичного параметру a ?

Розв'язання. За таблицею функції Лапласа $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475 \Rightarrow t = 1,96$

тоді за формулою (5.10) $n = \frac{1,96^2 \cdot 0,25}{0,1^2} = 96,04$, отже слід взяти вибірку

об'ємом 97 шт. і більше.

Питання та задачі до теми

1. Які види оцінок невідомих параметрів ви знаєте?
2. Що таке надійність інтервальної оцінки?
3. Що називається довірчим інтервалом заданої надійності?
4. Що таке рівень значущості інтервальної оцінки?
5. Чому як правило вибірку розглядають нормально розподіленою?
6. Як знаходять довірчий інтервал для невідомого параметру a при відомій дисперсії σ^2 ?
7. Як знаходять довірчий інтервал для невідомого параметру a при невідомій дисперсії σ^2 ?
8. Як знаходять довірчий інтервал для невідомого параметру σ^2 ?
9. Як знаходиться об'єм вибірки при заданій точності та надійності оцінки для невідомого параметру a ?

Задача 1. Для вибірки, побудованої з реалізацій нормально розподіленої випадкової величини X , з невідомим математичним сподіванням a та відомою дисперсією $\sigma^2 = 9$, знайдено величину $\bar{x} = 8,2$. Обсяг вибірки $n = 36$. Знайти довірчі інтервали заданої надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a . а) $\gamma_1 = 0,9$; б) $\gamma_2 = 0,95$; в) $\gamma_3 = 0,99$.

Задача 2. Деяке підприємство проводило контроль якості продукції. x_i – кількість бракованих виробів за i -ий день. Результати подані в таблиці:

День, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Брак, x_i	20	18	20	24	20	28	24	32	22	28	26	22

Знайти для даної вибірки $\bar{x}$, D_B , S^2 і довірчі інтервали надійності $\gamma = 0,95$ для невідомих параметрів a та σ^2 , вважаючи що випадкова величина X = “кількість бракованих виробів за день” – розподілена нормально з параметрами a та σ^2 .

Тема 6. Кореляційний аналіз

6.1. Основні поняття та постановка задачі

При розв'язанні практичних задач виникає питання про наявність залежності (або незалежності) і вид залежності досліджуваної випадкової величини X від іншої (інших) випадкової величини.

Здебільшого на практиці вибірку досліджують не за одним параметром, а за кількома. Наприклад, в економіці – залежність між обсягом виробництва і собівартістю; між капіталовкладенням і прибутком.

Можна виявити такі два типи залежності між випадковими величинами:

Функціональною називається така залежність між випадковими величинами X та Y , при якій довільна зміна значень випадкової величини X викликає однозначну зміну значень випадкової величини Y .

Тобто існує не випадкова функція f , така, що $Y = f(X)$. Наприклад, при збільшенні X в 2 рази значення Y збільшуються точно в 4 рази.

Статистичною (стохастичною) називається така залежність між випадковими величинами X та Y , при якій зміна значень однієї з випадкових величин (X) викликає зміну закону розподілу іншої (Y).

При статистичній залежності при зміні однієї випадкової величини може змінюватись або закон розподілу іншої випадкової величини, або його параметри, або і те, й інше.

Кореляційною³² називається така статистична залежність між випадковими величинами X та Y , при якій зміна значень X викликає зміну середнього значення Y .

Тобто при кореляційній залежності при зміні однієї випадкової величини закон розподілу іншої випадкової величини не змінюється, а змінюються його параметри.

³² Correlation – «взаємозв'язок» (англ.).

Кореляція³³ – це статистична залежність між випадковими величинами, що носить ймовірнісний характер.

Кореляційний аналіз – метод обробки статистичних даних, за допомогою якого вимірюється тіснота зв'язку між двома і більше змінними.

Мета кореляційного аналізу – виявити, чи існує істотна залежність однієї випадкової величини від іншої.

Кореляційний аналіз тісно пов'язаний з регресійним аналізом, тому часто говорять про кореляційно-регресійний аналіз.

Регресійний аналіз – розділ математичної статистики, присвячений методам аналізу залежності однієї випадкової величини від іншої (інших).

- На відміну від кореляційного аналізу регресійний аналіз не з'ясовує, чи істотний зв'язок, а займається пошуком моделі цього зв'язку.

Здебільшого виходячи з простоти позначень і доступності графічної інтерпретації даних, мова буде йти про двовимірну вибірку, тобто в подальшому вибіркові значення задаються точками з двох координат, тобто i -те вибіркове значення матиме вигляд $(x_i; y_i)$, де x_i – i -те спостережене значення випадкової величини X , а y_i – i -те спостережене значення випадкової величини Y .

Постановка основної задачі кореляційного аналізу.

Хочемо оцінити тісноту зв'язку між випадковими величинами X та Y .

Означення 1. Якщо нанести точки з координатами $(x_i; y_i)$ на координатну площину Oxy , то отримаємо кореляційне поле (кореляційну хмару) вибірки, за яким можемо зробити попереднє припущення про наявність або відсутність (або навіть про вид) залежності між випадковими величинами X та Y .

- Ще говорять діаграма розсіювання або точкова діаграма (англ. scatter plot).

³³ Correlatio – «співвідношення» (лат.).

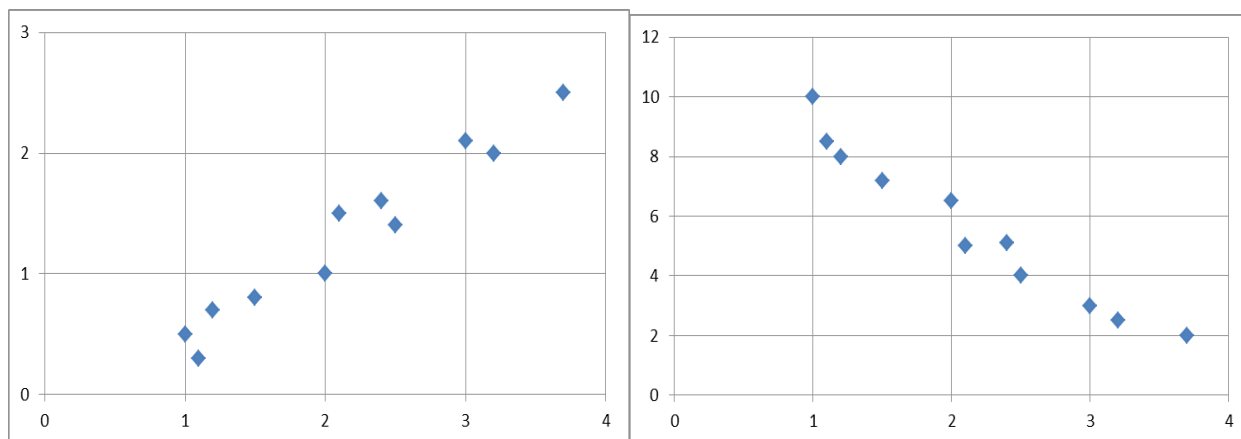


Рис. 6.1. Кореляційні хмари (кореляційні поля) двох вибірок.

Означення 2. Після первинної обробки двовимірної вибірки складають кореляційну таблицю – таблицю виду:

$\begin{matrix} Y \\ \backslash \\ X \end{matrix}$	x_1	$\dots$	x_q	Сума по рядках, k_j
y_1	n_{11}	$\dots$	n_{q1}	k_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_p	n_{1p}	$\dots$	n_{qp}	k_p
Сума по стовпцях, m_i	m_1	$\dots$	m_q	n

де $x_1, \dots, x_q$ і $y_1, \dots, y_p$ – усі різні спостережені значення випадкових величин X та Y відповідно, записані у порядку зростання;

n_{ij} – частота спостережень вибіркового значення $(x_i; y_j)$;

$k_j = \sum_{i=1}^q n_{ij}$ – кількість спостережень, у яких друга координата дорівнює y_j ;

$m_i = \sum_{j=1}^p n_{ij}$ – кількість спостережень, у яких перша координата дорівнює x_i ;

контроль:

$$\sum_{i=1, j=1}^{q, p} n_{ij} = \sum_{i=1}^q m_i = \sum_{j=1}^p k_j = n$$

Зауваження 1. Багато з n_{ij} можуть дорівнювати 0. Такі n_{ij} , як правило, в таблиці не пишуть, а залишають порожні клітинки.

6.2. Вибіркова коваріація та коефіцієнт кореляції Пірсона

Означення 4. Вибіркова коваріація між X та Y – це міра спільної мінливості двох випадкових величин X і Y , яку позначають одним із способів – $\text{cov}(X, Y)$, σ_{XY} , $\sigma(X, Y)$ – і обчислюють за формулою:

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (6.1)$$

• Говорять ще коваріаційний/кореляційний момент.

Зауваження 2. Пригадаємо, що раніше було поняття теоретичної коваріації між випадковими величинами X та Y (формула (9.15)):

$$\text{cov}(X, Y) = M((X - MX) \cdot (Y - MY)) = M(XY) - MX \cdot MY.$$

Властивості вибіркової коваріації

1. Зручніша формула для обчислення:

$$\text{cov}(X, Y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad (6.1.1)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i m_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_j y_j k_j$, $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_i y_j n_{ij}$ – вибіркові середні.

2. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$; $\text{cov}(X, X) = D_g X$.

3. Для не випадкових констант a і b :

$$\text{cov}(X, a) = 0; \quad \text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y); \quad \text{cov}(X + a, Y + b) = \text{cov}(X, Y).$$

4. $\text{cov}(X, Y)$ має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X і Y . Тому за абсолютним значенням коваріації не можна сказати, наскільки сильно величини X і Y взаємопов'язані.

5. Якщо $\text{cov}(X, Y) > 0$, то із зростанням значень однієї випадкової величини значення іншої теж мають тенденцію ³⁴ зростати; якщо ж

³⁴ Тобто – так відбувається помітно частіше, ніж навпаки.

$\text{cov}(X, Y) < 0$, то із зростанням значень однієї випадкової величини значення іншої мають тенденцію спадати.

6. Якщо теоретична або вибіркова коваріація дорівнює 0, то випадкові величини X та Y називають некорельованими.

7. Коваріацію називають мірою лінійної залежності між випадковими величинами X та Y . Однак через те, що розмірність коваріації залежить від розмірностей випадкових величин, для кращого розуміння тісноти зв'язку між випадковими величинами вводять і працюють з наступним поняттям.

Означення 5. Вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона r_{xy} – це міра **лінійної** залежності між випадковими величинами X та Y :

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (6.2)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i m_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_j y_j k_j$, $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_i y_j n_{ij}$ – вибіркові середні;

$\sigma_x = \sqrt{D_x X}$, $\sigma_y = \sqrt{D_y Y}$ – вибіркові середні квадратичні відхилення.

Властивості коефіцієнту кореляції

1. $r_{xy} = r_{yx}$; $r_{xx} = D_x X$.

2. $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

3. Якщо $|r_{xy}| \leq 0,1$, то говорять, що лінійний зв'язок між X та Y **відсутній**;

$0,1 \leq |r_{xy}| \leq 0,3$, то говорять про **слабкий** лінійний зв'язок між X та Y ;

$0,3 \leq |r_{xy}| \leq 0,7$, то говорять про **середній** лінійний зв'язок між X та Y ;

$|r_{xy}| \geq 0,7$, то говорять про **сильний/тісний** лінійний зв'язок між X та Y .

$r_{xy} \approx 1$, то говорять про прямий пропорційний зв'язок між X та Y ;

$r_{xy} \approx -1$, то говорять про зворотний пропорційний зв'язок між X та Y .

Приклад 1. Знайти коефіцієнт кореляції вибірки $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(2; 3)$, $(3; 6)$, $(5; 8)$ та оцініть міру лінійної залежності між X та Y .

Розв'язання. Отже, $n = 5$; подальші обчислення проведемо в таблиці

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	-1	-2	2	1	4
	1	0	0	1	0
	2	3	6	4	9
	3	6	18	9	36
	5	8	40	25	64
Сума	10	15	66	40	113
Середнє	2	3	13,2	8	22,6

З таблиці маємо: $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $\overline{xy} = 13,2$;

$$D_x X = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 8 - 2^2 = 4 \Rightarrow \sigma_x = 2;$$

$$D_y Y = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 22,6 - 3^2 = 13,6 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{13,6} \approx 3,7.$$

Тепер за формулою (6.2) $r_{xy} = \frac{13,2 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 3,7} = \frac{7,2}{7,4} \approx 0,973$.

Маємо сильний лінійний зв'язок між X та Y .

Питання та задачі до теми

1. Які види залежності між величинами ви знаєте? Наведіть приклади.
2. Що вивчає кореляційний аналіз? Яка його основна задача?
3. Що таке двовимірна вибірка? Як вона задається?
4. Як графічно зображають двовимірну вибірку?
5. Що таке коваріація двох випадкових величин?
6. Що таке коефіцієнт кореляції Пірсона? Як його знаходять?
7. Який і наскільки близький зв'язок між величинами має місце, залежно від значення коефіцієнта кореляції?

Задача 1. Наведіть свій приклад залежності між економічними явищами.

Задача 2. Намалюйте кореляційне поле даної вибірки $(-3; -5)$, $(-2; -2,5)$, $(-1; 0)$, $(0; 2,5)$, $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(3; 3,5)$, $(3,5; 5)$, $(4; 5)$, $(4,5; 5,5)$ та зробіть припущення про вид залежності між випадковими величинами X та Y . Знайдіть коефіцієнт кореляції цієї вибірки і зробіть висновок про міру лінійної залежності випадкової величини Y від випадкової величини X .

Тема 7. Регресійний аналіз

7.1. Регресійний аналіз: основні поняття та постановка задачі

Означення 1. Регресійний аналіз – розділ математичної статистики, присвячений методам аналізу залежності однієї [залежної] випадкової величини від іншої [незалежної] величини.

- Незалежну величину називають ще регресором (або предиктором), а залежну величину – критеріальною (або цільовою) величиною/змінною.

- Термінологія "залежні" і "незалежні" величини/змінні не відображає причинно-наслідкові зв'язки, а лише математичну залежність величин.

- На відміну від кореляційного аналізу регресійний аналіз не з'ясовує, чи істотний зв'язок, а займається пошуком моделі цього зв'язку, яка виражається у формі функції регресії.

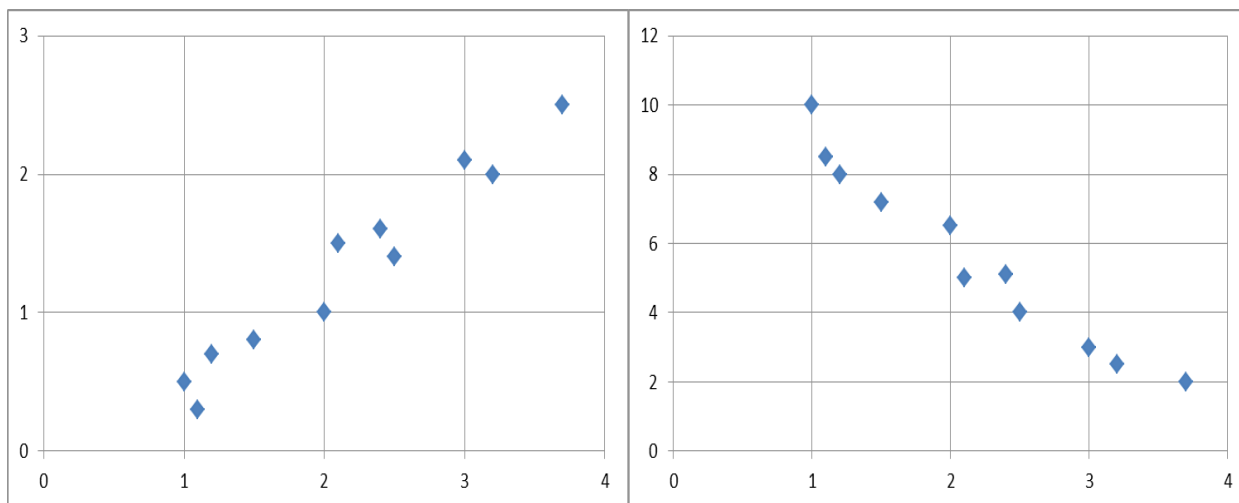
Регресійний аналіз використовується тоді, коли відношення/зв'язки між залежною і незалежними величинами можуть бути виражені кількісно у вигляді деякої комбінації незалежних величин (або у вигляді деякої комбінації функцій від незалежних величин). Отримана комбінація використовується для передбачення/прогнозування значень, яких може набувати залежна змінна.

Зауваження 1. Регресійний аналіз не можна використовувати для визначення наявності зв'язку між величинами/змінними, оскільки наявність такого зв'язку є **передумовою** для застосування регресійного аналізу.

Постановка основної задачі регресійного аналізу.

Хочемо отримати в явному вигляді залежність між незалежною величиною X та залежною величиною Y , тобто знайти деяке наближення виду $Y = f(X)$, яке в певному сенсі добре відповідає спостереженим даним.

- Яку функцію f взяти – може підказати графік двовимірної вибірки, тобто кореляційне поле (хмара) вибірки:



Приклад 1. Неважко здогадатись, що на обох кореляційних хмарах зображено залежність між випадковими величинами, схожа на лінійну. Але на лівій хмарі – з додатнім кутовим коефіцієнтом, а на правій – з від’ємним.

- Хоча на правій кореляційній хмарі може бути і гіперболічна (обернено пропорційна) залежність, тож треба досліджувати ще.

Для проведення регресійного аналізу необхідно визначити форму (тип) функції f . Іноді вибір форми функції f заснований на знаннях про взаємовідношення між Y та X і не покладається на вибіркові дані. Якщо таких знань нема, тоді обирають зручну (просту математично і правдоподібну за вибіркою) форму для f .

7.2. Метод найменших квадратів

Основним методом регресійного аналізу є метод найменших квадратів (скорочують МНК, в літературі часто можна зустріти англomовну аббревіатуру LSM – від "least-squares method").

Отже, розглядаємо двовимірну вибірку $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ і хочемо знайти таку функцію f , яка добре/найкраще описує наявний зв’язок між величинами Y та X .

- Пригадаємо, що про наявний зв’язок, про степінь тісноти зв’язку між величинами, говорить кореляційний аналіз.

Ідея МНК: шукаємо функцію $Y = f(X)$ так, щоб досягала свого мінімального значення величина

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min \quad (7.1)$$

Означення 2. Величина Δ називається середньоквадратичною похибкою наближення [випадкової величини Y функцією $Y = f(X)$]; y_i – i -те спостережене значення випадкової величини Y ; $f(x_i) = \tilde{y}_i$ – i -те розраховане значення випадкової величини Y [за формулою $Y = f(X)$].

- Величини $y_i - f(x_i) = e_i$ називають похибками наближення або нев'язками наближення.

Означення 3. Якщо для деякої функції f величина Δ досягає свого мінімуму, то цю функцію f називають найкращим в сенсі МНК (за методом найменших квадратів) наближенням випадкової величини Y через випадкову величину X .

Означення 4. Рівняння $Y = f(X)$ називається рівнянням регресії випадкової величини Y на випадкову величину X .

- Аналогічно говорять про рівняння регресії X на Y .

Можна розглядати різні функції f . Якщо f – лінійна, тобто $f(x) = Ax + B$, то рівняння $Y = f(X) = AX + B$ називають рівнянням лінійної регресії Y на X . Якщо f – квадратна, тобто $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, то рівняння $Y = f(X) = Ax^2 + Bx + C$ називають рівнянням квадратичної (параболічної) регресії Y на X .

- Таким чином, вище ми сформулювали ідею метода найменших квадратів, за допомогою якого будемо шукати функцію наближення випадкової величини Y через випадкову величину X у формі $Y = f(X)$. Тепер розглянемо рівняння деяких регресій та наведемо формули для знаходження невідомих коефіцієнтів регресії.

7.3. Лінійна регресія

Якщо кореляційне поле дає підстави вважати залежність між випадковими величинами X та Y лінійною та, особливо, якщо коефіцієнт кореляції $|r_{xy}| \geq 0,7$, то доцільно шукати рівняння лінійної регресії в формі

$$Y = AX + B, \quad (7.2)$$

де A, B – невідомі коефіцієнти лінійної регресії, оцінки яких ми і шукаємо.

Отже, в даній моделі функція f має вигляд $f(x) = Ax + B$. МНК-оцінки для невідомих A, B будемо шукати з умови (7.1), тобто для даної функції f середньоквадратична похибка наближення

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B)^2 \rightarrow \min. \quad (7.3)$$

Величина Δ з формули (7.3) є функцією від двох змінних – A та B , тому мінімум цієї функції будемо знаходити як екстремум функції двох змінних. Тому, після знаходження частинних похідних функції $\Delta(A, B)$ за змінними A та B , та прирівняння їх до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial B} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial A} = 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B) \cdot (-x_i) = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial B} = 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B) \cdot (-1) = 0, \end{cases}$$

Після нескладних перетворень маємо систему

$$\begin{cases} A \frac{1}{n} \sum x_i^2 + B \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{n} \sum x_i y_i \\ A \frac{1}{n} \sum x_i + B = \frac{1}{n} \sum y_i \end{cases}.$$

Використовуючи стандартне позначення для середніх величин, для знаходження МНК-оцінки невідомих коефіцієнтів A, B отримаємо більш просту систему:

$$\begin{cases} A\bar{x}^2 + B\bar{x} = \bar{xy} \\ A\bar{x} + B = \bar{y} \end{cases}. \quad (7.4)$$

- Система рівнянь (7.4) називається системою нормальних рівнянь для визначення оцінок параметрів моделі лінійної регресії (7.2).

Розв'язок цієї системи можна знайти, наприклад, методом Крамера, звідки будемо мати такий розв'язок (який, в даній ситуації, за теорією пошуку екстремуму функції двох змінних і буде точкою мінімуму, тобто шуканими МНК оцінками для A , B):

$$\begin{cases} A = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{D_x X} \\ B = \bar{y} - A\bar{x} \end{cases} \quad (7.5)$$

Шукане рівняння лінійної регресії знаходять, підставляючи отримані за (7.5) значення параметрів A і B в формулу (7.2).

Зауваження 2. Порівнюючи формулу (6.2) для коефіцієнта кореляції r_{xy} та формулу (7.5) для кутового коефіцієнта рівняння лінійної регресії A , бачимо, що вони досить схожі, а саме,

$$A = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = k_{YX},$$

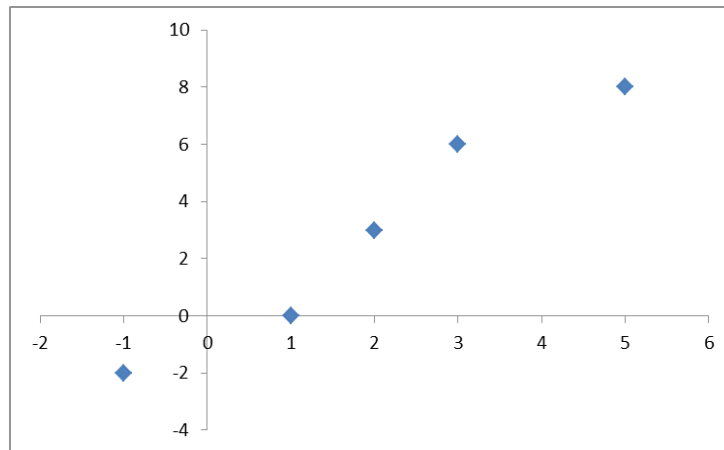
де величину k_{YX} називають вибіркоvim коефіцієнтом лінійної залежності випадкової величини Y від випадкової величини X .

Аналогічно розглядають величину $k_{XY} = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$.

Приклад 2. Вибірка складається із елементів $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(2; 3)$, $(3; 6)$, $(5; 8)$. З'ясувати, чи є підстави вважати наявною лінійну залежність між випадковими величинами X та Y . Знайти рівняння лінійної регресії між випадковими величинами X та Y .

Розв'язання. З'ясувати, чи є підстави вважати наявною лінійну залежність між випадковими величинами X та Y , можна двома способом – через кореляційне поле (попередній вид залежності) і через коефіцієнт кореляції (більш надійний спосіб).

Отже, маємо таке кореляційне поле даної вибірки:



Кореляційне поле даної вибірки дає підстави вважати залежність між випадковими величинами X та Y лінійною. Проте надійнішим показником є вибірковий коефіцієнт кореляції. Його було знайдено в Прикладі 1 попередньої теми, $r_{xy} \approx 0,973$, він є дуже близьким до 1, що свідчить про дуже сильний лінійний зв'язок між випадковими величинами X та Y .

Маємо вибірку з $n = 5$; подальші обчислення зручно провести в таблиці

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	-1	-2	2	1	4
	1	0	0	1	0
	2	3	6	4	9
	3	6	18	9	36
	5	8	40	25	64
Сума	10	15	66	40	113
Середнє	2	3	13,2	8	22,6

З таблиці маємо: $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $\overline{xy} = 13,2$;

$$D_x X = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 8 - 2^2 = 4 \Rightarrow \sigma_x = 2;$$

$$D_y Y = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 22,6 - 3^2 = 13,6 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{13,6} \approx 3,7.$$

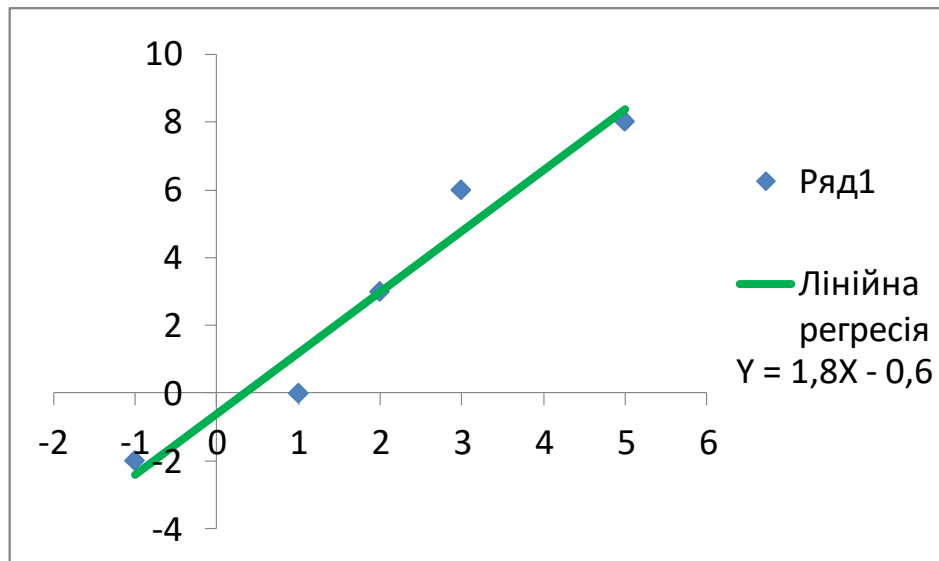
Тепер за формулами (7.5)

$$A = \frac{13,2 - 2 \cdot 3}{4} = \frac{7,2}{4} = 1,8; \quad B = 3 - 1,8 \cdot 2 = -0,6;$$

а значить шукане рівняння лінійної регресії за (7.2) має вигляд:

$$Y = 1,8X - 0,6.$$

Зобразимо отриманий графік лінійної регресії на кореляційному полі вибірки:



За отриманим графіком лінійної регресії на кореляційному полі вибірки можна зробити висновок, що, як і можна було очікувати (за дуже близьким до одиниці коефіцієнтом кореляції) лінійна регресія дуже добре узгоджується з експериментальними даними.

7.4. Коефіцієнт детермінації

Можна розглядати різні функції регресії для опису моделі залежності випадкових величин. А яка ж із моделей краще узгоджується з експериментальними даними?

Означення 5. Коефіцієнт детермінації R^2 – це частка дисперсії залежної змінної, яка пояснюється моделлю, що розглядається:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2}{D_y} = 1 - \frac{\Delta}{D_y} \quad (7.6)$$

де y_i – i -те спостережене значення випадкової величини Y ;

$\tilde{y}_i = f(x_i)$ – i -те розраховане значення Y , за формулою $Y = f(X)$;

$e_i = y_i - \tilde{y}_i$ – i -та похибка наближення (нев'язка, залишок регресії)

випадкової величини Y функцією $Y = f(X)$;

$D_e Y$ – вибіркова дисперсія випадкової величини Y ;

Δ – середньоквадратична похибка наближення випадкової величини Y функцією $Y = f(X)$.

Зауваження 3. Коефіцієнт детермінації – це універсальна міра залежності однієї випадкової величини від іншої (багатьох інших).

- Чим ближчий коефіцієнт детермінації R^2 до одиниці, тим краще теоретична модель $Y = f(X)$ узгоджується з експериментальними даними.

- Для лінійної регресії коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнту кореляції: $R^2 = r_{xy}^2$.

- Якщо $R^2 \geq 0,8$, то теоретична модель $Y = f(X)$ є досить гарною моделлю; для прийнятності моделі бажано, щоб хоча б $R^2 \geq 0,5$.

Зауваження 4. Незважаючи на позначення, коефіцієнт детермінації R^2 може бути і меншим від 0 – це означає, що відповідна модель $Y = f(X)$ є дуже неадекватною вибіркоvim даним.

Приклад 2 (продовження). Знайти коефіцієнт детермінації R^2 для отриманого рівняння лінійної регресії між випадковими величинами X та Y .

Розв'язання. Отже, вище було знайдено рівняння лінійної регресії між випадковими величинами X та Y : $Y = 1,8X - 0,6$ та величину $D_e Y = 13,6$.

Обчислимо для вибірки $\tilde{y}_i = f(x_i)$ – розраховані значення величини Y та $e_i = y_i - \tilde{y}_i$ – похибки наближення величини Y функцією $Y = 1,8X - 0,6$ та знайдемо суму квадратів e_i .

Обчислення подамо в таблиці.

	x_i	y_i	y_i_розрах	e_i	e_i^2
	-1	-2	-2,4	0,4	0,16
	1	0	1,2	-1,2	1,44
	2	3	3,0	0,0	0
	3	6	4,8	1,2	1,44
	5	8	8,4	-0,4	0,16
Сума	10	15	15,0	0,0	3,2
Середнє	2	3	3,0	0,0	0,64

Отже, за формулою (7.6) $R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2}{D_y} = 1 - \frac{0,64}{13,6} \approx 0,953$.

Оскільки коефіцієнт детермінації лінійної регресії дуже близький до одиниці, то можемо зробити висновок, що для даної вибірки теоретична модель лінійної регресії $Y = 1,8X - 0,6$ дуже добре узгоджується з експериментальними даними.

Питання та задачі до теми

1. В чому полягає ідея методу найменших квадратів?
2. Навіщо в МНК беруться квадрати відхилень, а не самі відхилення?
3. Коли варто шукати рівняння лінійної регресії?
4. За якими формулами знаходять невідомі параметри лінійної регресії?
5. Коли кажуть, що модель добре відповідає експериментальним даним?

Задача 1. Намалуйте кореляційне поле даної вибірки $(-3; -5), (-2; -2,5), (-1; 0), (0; 2,5), (1; 3), (2; 3), (3; 3,5), (3,5; 5), (4; 5), (4,5; 5,5)$ та зробіть припущення про вид залежності між випадковими величинами X та Y . Знайдіть коефіцієнт кореляції цієї вибірки і рівняння лінійної регресії між випадковими величинами X та Y .

Задача 2. Вибірка складається із елементів $(1;3), (2;4), (3;2), (5;0)$. Знайти рівняння лінійної регресії між випадковими величинами X та Y .

Задача 3. Знайти коефіцієнт детермінації для лінійної регресії, побудованої для вибірки з: а) Задачі 1; б) Задачі 2.

Тема 8. Статистичні гіпотези

8.1. Основні означення і поняття

В прикладних задачах після первинної обробки статистичної інформації постає задача – зробити з цієї інформації певні висновки. Для цього потрібно знати закон розподілу та його параметри. Отже, робимо припущення про невідомий закон розподілу або про параметри відомого розподілу. Ці припущення називаються гіпотезами.

Означення 1. Статистичними гіпотезами називаються гіпотези про невідомий закон розподілу генеральної сукупності або про параметри відомого розподілу.

Розглядаємо припущення про закон розподілу генеральної сукупності або його параметри розподілу – гіпотезу H_0 . Вона називається основною (нульовою). Альтернативною (конкуруючою) буде гіпотеза H_1 , яка заперечує H_0 .

Приклад 1. Основну гіпотезу $H_0: MX = 6$ заперечує альтернативна гіпотеза $H_1: MX \neq 6$.

- Нульова гіпотеза – це бездоказове припущення, здійснене до проведення дослідження. Поняття нульової гіпотези передбачає існування альтернативної гіпотези, що її заперечує. На практиці нульовою гіпотезою слугує відсутність статистично значущої кореляції між якимись характеристиками чи показниками, а альтернативною є гіпотеза про існування кореляції.

Для людей практично завжди характерний суб'єктивізм — існування певного упередженого ставлення до будь-яких явищ, навіть цілком абстрактних. Тому більшість досліджень проводиться з певною метою і очікується підтвердження інтуїтивних чи моральних здогадок вчених (альтернативної гіпотези) про наявність статистично значущої кореляції

поміж факторами. Нульова ж гіпотеза слугує протилежною точкою зору, яку дослідник намагається спростувати — довести, що одна характеристика таки має вплив на іншу.

Означення 2. Гіпотезу називають простою, якщо вона містить одне припущення. Інакше – називають складною.

Приклад 2. Гіпотеза $H_0 : MX = 5$ – проста; $H_1 : MX \geq 5$ – складна.

Перевірка гіпотези проводиться статистично (за вибіркою), а значить при перевірці можна зробити хибний висновок, тобто помилитися.

Означення 3. Помилка першого роду – це помилка, яка полягає в тому, що відхиляється основна гіпотеза H_0 , хоча насправді вона правильна.

Означення 4. Помилка другого роду – це помилка, яка полягає в тому, що приймається основна гіпотеза H_0 , хоча насправді правильною є конкуруюча гіпотеза H_1 .

- Якщо за результатами перевірки відхиляється правильна гіпотеза H_0 – це помилка I роду; якщо за результатами перевірки приймається неправильна гіпотеза H_0 – це помилка II роду.

В результаті перевірки основної гіпотези H_0 при конкуруючій H_1 можлива одна з 4 ситуацій:

Висновок при перевірці Насправді	За результатами перевірки приймаємо H_0	За результатами перевірки приймаємо H_1
Насправді правильна H_0	Немає помилки	Помилка I роду
Насправді правильна H_1	Помилка II роду	Немає помилки

Для перевірки гіпотези обчислюють значення деякої функції від вибірки (статистику) і обирають деяку випадкову функцію (статистичний критерій).

Означення 5. Критерієм (статистичним критерієм) називають спеціально підбрану випадкову величину з відомим (точно або наближено) розподілом, яка визначає критичну область, залежно від потрапляння туди або ні спостереженого значення критерію основна гіпотеза H_0 приймається або відхиляється.

Означення 6. Спостереженим значенням критерію (статистичною характеристикою) називають значення критерію, обчислене за вибірковими даними.

Означення 7. Ймовірність помилки першого роду позначають α і називають рівнем значущості критерію.

Означення 8. Ймовірність помилки другого роду позначають β . Величину $1 - \beta$ називають потужністю критерію.

- При, як правило, заданому рівні значущості шукають найбільш потужний критерій.

Зауваження 1. Єдиний спосіб одночасно зменшити помилки I і II роду – збільшити об'єм вибірки.

Зауваження 2. Пояснення щодо помилок I і II роду.

В практичних задачах хотілося б зменшити і ймовірність помилки I роду α , і ймовірність помилки II роду β . Якщо збільшити вибірку при цьому важко (наприклад занадто дорого), то α і β вибираються залежно від ступеня небажаності пов'язаних з ними помилкових рішень (α і β між собою пов'язані, але зв'язок різний – залежно від ситуації).

Приклад 3. Нехай маємо деяке виробництво. Виконуємо спрощену перевірку якості, тобто перевіряємо основну гіпотезу H_0 : "виріб – бракований". Конкуруючою є гіпотеза H_1 : "виріб – якісний".

З ймовірністю α бракований виріб визнається якісним (отже маємо помилку I роду); з ймовірністю β якісний виріб визнається бракованим (отже маємо помилку II роду).

Якщо споживачеві було продано бракований виріб, то за його гарантійний ремонт (або відшкодування збитків) треба заплатити P грн.; якщо якісний виріб було забраковано, то втрачається його собівартість Q грн.

Далі, нехай в партії з N виробів десь (згідно статистичних спостережень) M шт. бракованих. Тоді середні втрати при контролі якості цієї партії рівні:

$$(M\alpha) \cdot P + ((N - M)\beta) \cdot Q \xrightarrow{\text{хотілось би}} \min.$$

Величини P і Q (отже і α та β) будуть залежати від того, що саме виробляємо: телефони чи косметику.

Означення 9. Критична область – це така область, потрапляння значення статистики в яку свідчить про відхилення основної гіпотези H_0 .

Означення 10. Область прийняття гіпотези – це така множина, потрапляння значення статистики в яку свідчить про прийняття основної гіпотези H_0 .

Якщо критерій – одновимірна випадкова величина (майже завжди так), то множина її значень – деякий інтервал. Тому виникають наступні поняття.

Означення 11. Критичною точкою (критичними точками) критерію називається точка (точки) $K_{кр}$, що відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Критична область може бути двосторонньою або односторонньою (однобічною) – причому тоді або лівосторонньою, або правосторонньою:

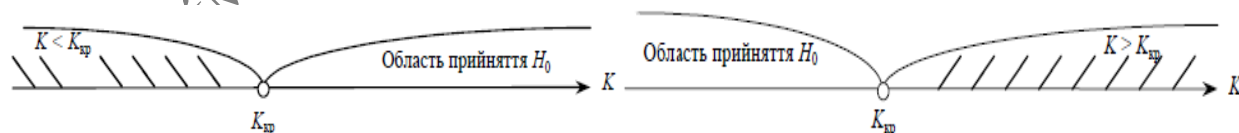


Рис. 8.1. Односторонні – лівостороння (рисунок зліва) та правостороння (рисунок справа) – критичні область

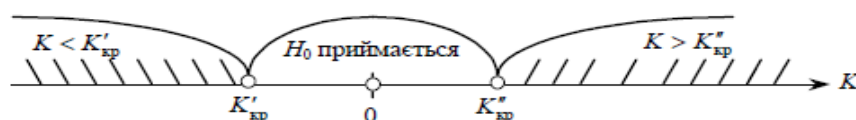


Рис. 8.2. Двостороння (двобічна) критична область

8.2. Алгоритм перевірки статистичних гіпотез

1. Сформулювати основну гіпотезу H_0 і конкуруючу H_1 ;
2. Обрати статистичний критерій перевірки і статистичну характеристику;
3. Задати рівень значущості α ;
4. Обчислити значення статистичної характеристики за вибіркою;
5. Знайти за рівнем значущості, за відповідною таблицею критичну точку (критичну область) для обраного критерію;
6. Зробити висновок:
 - а. якщо значення статистичної характеристики не потрапило в критичну область, то приймається основна гіпотеза H_0 ;
 - б. якщо значення статистичної характеристики потрапило в критичну область, то основна гіпотеза H_0 відкидається, а приймається конкуруюча гіпотеза H_1 .

Зауваження 3. Варто пам'ятати, що статистична перевірка гіпотези не дає підстав до її логічного спростування або ж доведення її справедливості.

8.3. Критерій хі-квадрат (Пірсона)

Даний критерій застосовують для перевірки гіпотез про закон розподілу генеральної сукупності. Найчастіше – для нормального закону розподілу, але і для інших законів розподілу теж широко застосовують.

Отже, розглядаємо вибірку об'ємом n з генеральної сукупності, розподіленої за невідомим законом розподілу. Будемо перевіряти гіпотезу про закон розподілу за алгоритмом перевірки статистичних гіпотез.

- 1) Сформулюємо основну гіпотезу H_0 : "генеральна сукупність розподілена за *таким* законом" і конкуруючу H_1 : "генеральна сукупність розподілена не за *таким* законом".

2) В якості статистичного критерію беремо критерій χ^2 (Пірсона); статистична характеристика буде χ^2 (введемо її пізніше).

3) Задаємо (або маємо з умов) рівень значущості α .

4) Множину значень вибірки слід розбити на M інтервалів (ціле число M знаходиться за раніше згаданою формулою Стерджеса $M \geq 1 + 3,322 \lg n$): $(x_1; x_2); (x_2; x_3); \dots; (x_M; x_{M+1})$ і для кожного з них знаходимо спочатку вибіркові частоти (число спостережень, що потрапило в даний

інтервал) n_i . Контроль правильності $\sum_{i=1}^M n_i = n$.

Далі для кожного інтервалу $(x_1; x_2); (x_2; x_3); \dots; (x_M; x_{M+1})$ за вказаним в H_0 законом розподілу знаходимо числа p_i – теоретичні ймовірності того, що випадкова величина X потрапить в i -ий інтервал:

$$p_i = P\{X \in (x_i; x_{i+1})\}, \quad \text{контроль} \quad \sum_{i=1}^M p_i = 1. \quad (8.1)$$

Тепер знаходимо статистичну характеристику $\chi^2_{\text{спостережене}}$:

$$\chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^M \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad \text{контроль} \quad \chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^M \frac{n_i^2}{np_i} - n. \quad (8.2)$$

• Величини np_i називаються теоретичними частотами. Для них

теж є контрольна сума: $\sum_{i=1}^M np_i = n$.

5) Позначимо k – число невідомих параметрів розподілу. (Для нормального розподілу $k = 2$, якщо невідомі MX і DX , або $k = 1$, якщо одна з величин MX або DX відома)

За таблицею розподілу χ^2 (Пірсона) із заданим рівнем значущості α та з

$$K = M - k - 1 \quad (8.3)$$

ступенями свободи знайдемо критичне значення $\chi^2_{\text{критичне}} = \chi^2_{\alpha, K}$, тобто $\chi^2_{\text{крит}}$ знаходять з умови

$$P(\chi^2(K) > \chi^2_{\alpha, K}) = \alpha. \quad (8.4)$$

Дане $\chi^2_{\text{крит}}$ задає правосторонню критичну область.

- б) Висновок: якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то гіпотеза H_0 приймається;
якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Зауваження 4. Бажано, щоб для кожного інтервалу $(x_i; x_{i+1})$ значення n_i було б не меншим 5. Інакше слід об'єднати інтервали (і скласти відповідні частоти).

Зауваження 5. Інтервали зазвичай позначають з круглими дужками – $(x_i; x_{i+1})$, але межі інтервалів мають точно по одному разу увійти в розгляд. Як правило, працюють з інтервалами виду $(x_i; x_{i+1}]$.

Зауваження 6. При обчисленні теоретичних ймовірностей p_i область значень вибірових даних має відповідати області значень випадкової величини, розподіленої за законом розподілу гіпотези H_0 . Тобто, для нормального закону крайні інтервали будуть $(-\infty; x_2)$ та $(x_M; +\infty)$.

Зауваження 7. Знаходження теоретичних частот / ймовірностей.

Для нормального розподілу для знаходження теоретичних ймовірностей використовують формулу, відому з попереднього матеріалу:

$$p_i = P\{x_i < X < x_{i+1}\} = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sqrt{S^2}}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{S^2}}\right), \quad (8.5)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\bar{x}$ – вибірове середнє, S^2 – виправлена вибірова дисперсія.

Для інших законів розподілу використовують формули, аналогічні (8.5).

Приклад 4. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності, якщо відомі вибіркові та теоретичні частоти.

Вибіркові частоти n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
Теоретичні частоти np_i	3	14	42	82	99	76	37	13

Розв'язання. Отже, об'єм вибірки $n = 366$, контрольні суми для вибірових і теоретичних частот співпали; кількість інтервалів $M = 8$, кількість невідомих параметрів розподілу $k = 2$, отже кількість ступенів свободи розподілу χ^2 (Пірсона) $K = M - k - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$.

З таблиці розподілу χ^2 (Пірсона) для $\alpha = 0,05$ і $K = 5$

$$\chi_{\text{крит}}^2 = \chi_{\alpha, K}^2 = \chi_{0,05; 5}^2 = 11,07.$$

Обчислення статистичної характеристики $\chi_{\text{спост}}^2$ проведемо в таблиці.

	n_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
	6	3	3	9	3
	13	14	-1	1	0,0714
	38	42	-4	16	0,3810
	74	82	-8	64	0,7805
	106	99	7	49	0,4949
	85	76	9	81	1,0658
	30	37	-7	49	1,3243
	14	13	1	1	0,0769
Сума	366	366	0	270	7,1949

Отже, $\chi_{\text{спост}}^2 = 7,1949$.

Висновок: оскільки $\chi_{\text{спост}}^2 = 7,1949 < \chi_{\text{крит}}^2 = 11,07$, то за критерієм Пірсона гіпотеза H_0 про нормальний закон розподілу даної вибірки приймається. Тобто відмінність між вибіровими і теоретичними частотами є незначною.

Питання та задачі до теми

1. Що таке статистична гіпотеза? Статистичний критерій?
2. Що таке помилка I роду і помилка II роду?
3. Як зменшити помилку I роду? Помилку II роду? Обидві помилки?
4. Що таке критична область і які вони бувають?
5. Сформулюйте послідовність дій при перевірці статистичних гіпотез.
6. Для перевірки яких гіпотез застосовують критерій χ^2 ?
7. Що таке спостережені частоти? Теоретичні частоти? Як їх знаходять?

Задача 1. Нехай маємо комп'ютерну мережу. Виконуємо перевірку якості мережі, тобто перевіряємо основну гіпотезу H_0 : "мережа – бракована". Конкуруючою є гіпотеза H_1 : "мережа – якісна".

Опишіть помилки I та II роду, які виникають при перевірці якості мережі.

Задача 2. В таблиці наведено результати спостережень за відвідуваністю сайту – відхилення кількості відвідувачів від середнього числа відвідувачів

Межі інтервалу	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	n
Кількість спостережень	10	72	100	53	15	250

На рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити за критерієм хі-квадрат гіпотезу про нормальність розподілу відхилень кількості відвідувачів від середнього числа відвідувачів.

Тема 9. Випадкові процеси. Прикладні задачі, пов'язані з кібербезпекою

9.1. Поняття про випадкові (ймовірнісні) процеси

Означення 1. Випадковою (ймовірнісною) функцією називається функція $f(\omega)$, що визначена на ПЕП і в результаті дослідження може набути того чи іншого значення (реалізація), яке наперед невідоме. Кожна реалізація не є випадковою.

Означення 2. Випадковий (ймовірнісний) процес є випадковою (ймовірнісною) функцією, що залежить і від ω , і від часу t , тобто функцією $X(\omega; t)$. Якщо параметр t набуває дискретних значень, то маємо випадковий процес з дискретним часом; якщо t набуває значень з деякого інтервалу, то маємо випадковий процес з неперервним часом.

Випадковий процес у деякий фіксований момент часу t_0 є випадковою величиною $\{X(\omega; t_0) | \omega \in \Omega\}$ (які утворюють повну групу подій). Ці випадкові величини називають станом, в якому може знаходитися процес в цей момент. Кількість станів може бути скінченною або нескінченною.

Випадковий процес для деякого фіксованого значення ω_0 є не випадковою функцією $\{X(\omega_0; t) | t \in [0; T]\}$. Ці функції називають траєкторіями випадкового процесу.

Означення 3. Випадковий процес $X(\omega; t)$ називається процесом з незалежними приростами, якщо для будь-якого числа n та довільного розбиття $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ випадкові величини $x(0); x(t_1) - x(0); x(t_2) - x(t_1); \dots x(t_n) - x(t_{n-1})$ є незалежними.

Саме з вивчення процесів з незалежними приростами виникла теорія випадкових процесів. Спочатку вивчався вінерівський процес (або процес броунівського руху), а потім і більш загальні процеси з незалежними приростами. Оскільки в силу довільності розбиття зміщення випадкового

процесу за цей час можна вважати малим, то можна вважати, що до їх суми застосовується центральна гранична теорема теорії ймовірностей, а броунівський рух розглядати як гаусовський процес.

Означення 4. Вінеровський (вінерів або гаусівський або гаусів) процес – це такий випадковий процес, вимагають, щоб випадкові величини, які їх утворюють, підкорялися нормальному закону розподілу.

Означення 5. Марковські процеси (або «процес без післядії») – це випадкові процеси, що мають таку властивість: для кожного моменту часу ймовірність будь-якого стану системи у майбутньому залежить тільки від її стану у теперішній час і не залежить від того, коли та яким чином система прийшла у цей стан (тобто від того, як поведив себе процес у минулому).

Марковські процеси знайшли дуже широке застосування у кібернетиці (особливо в теорії інформації). Оскільки даний навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти спеціальності 125 «Кібербезпека», то саме цьому класу випадкових процесів варто приділити увагу в подальшому.

9.2. Випадкові процеси в теорії масового обслуговування

Заявкою називають попит на задоволення деякої потреби.

Означення 6. Системою масового обслуговування (СМО) називається будь-яка система, що задовольняє заявки, які надходять до неї у випадкові моменти часу. Пристрій, що безпосередньо обслуговує заявку, називається каналом обслуговування.

Залежно від поведінки заявки розглядають СМО з відмовами (якщо заявка поступила в СМО в момент зайнятості усіх каналів, то вона отримує відмову і залишає систему) і СМО з чергою (заявка при відсутності вільних каналів на момент її надходження в СМО стає у чергу на обслуговування).

Послідовність подій, що полягають в надходженні заявок в СМО, називають потоком подій.

Приклади потоків подій:

- надходження викликів на АТС;
- прибуття літаків в аеропорт;
- збої в роботі обладнання;
- прихід клієнтів у магазин тощо.

Потоки подій можуть мати такі **властивості**:

Стаціонарність: ймовірність настання k подій на будь-якому інтервалі часу t залежить лише від числа k і від тривалості інтервалу t і не залежить від початку його відліку.

Відсутність післядії : ймовірність настання k подій на будь-якому інтервалі часу не залежить від того, з'являлися чи не з'являлися події в моменти часу, які передували початку інтервалу.

Ординарність: настання двох чи більше подій за малий інтервал часу практично неможливе.

Означення 7. Потік подій називається найпростішим (пуассонівським), якщо він є стаціонарним, без післядії та ординарним.

Означення 8. Інтенсивністю потоку λ називається середнє число подій, які настають за одиницю часу.

Теорема 9.1. (формула Пуассона).

Нехай маємо найпростіший потік подій з інтенсивністю λ . Тоді ймовірність того, що за час t відбудеться точно k подій, що утворюють цей потік, дорівнює

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (9.1)$$

Наслідок. Середня тривалість інтервалу часу між надходженням двох послідовних подій деякого пуассонівського потоку подій з інтенсивністю λ дорівнює $1/\lambda$.

9.3. Прикладні задачі на використання методів та формул теорії ймовірностей та математичної статистики

Задача 1. Два студента пригадують пароль від своїх електронних корпоративних пошт. Нехай подія A полягає в тому, що перший студент згадав пароль, подія B – в тому, що другий студент згадав пароль. Описати словами події $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Задача 2. У шухляді міститься 15 флешок, з яких 4 – непрацюючі. Взяли навмання 1 флешку. Яка ймовірність того, що флешка працююча?

Задача 3. Маємо 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. З них недосвічений користувач утворює пароль з 5 цифр³⁵. Хакер має програму, яка підбирає 100 паролів³⁶ на секунду. Скільки часу найбільше витратить хакер на підбір паролю?

Задача 4. Троє починаючих системних адміністраторів створюють комп'ютерні мережі. Ймовірності безпомилково створити комп'ютерну мережу для кожного з них дорівнюють $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,85$, $p_3 = 0,95$ відповідно. Розглянемо події A = “всі мережі створені безпомилково”, B = “жодна мережа не створена безпомилково”, C = “точно 2 мережі створені безпомилково”. Знайти ймовірності цих подій.

Задача 5. Скількома способами з 15 осіб, що претендують на роботу, можна вибрати команду з а) трьох осіб; б) чотирьох осіб.

Задача 6. Хакер намагається «зламати» мережу. Ймовірність того, що йому це вдасться протягом години становить $p = 0,6$. Знайти ймовірність

³⁵ Паролі лише з цифр – надто прості, не використовуйте їх!

³⁶ Сучасні програми дозволяють підбирати мільйони паролів на секунду, тож див. рядок вище.

того, що для злому системи хакеру знадобиться: а) точно 3 години; б) не більше 3 годин; в) не менше 3 годин.

Задача 7. Ймовірність того, що платіж поступить від клієнта вчасно, становить 0,94. Знайдіть ймовірність, того, що із 50 платежів прострочених буде а) 3 шт.; б) від 2 до 5 шт.; в) не більше 4 шт.

Задача 8. На АТС в середньому за хвилину надходить 2 виклики. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин на АТС надійде точно 10 викликів.

Задача 9. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прилад, дорівнює 0,01. Яка ймовірність, що при 100 вимірюваннях буде допущено більше однієї похибки?

Задача 10. Мережа може працювати в нормальному і форсованому режимах. Мережа працює в нормальному режимі 75 % часу, а у форсованому – 25 %. Ймовірність проблем з мережею при нормальному режимі дорівнює 0,02, а при форсованому – 0,05. Знайти ймовірність виникнення проблем з мережею за час роботи.

Задача 11. В одному контейнері міститься 12 радіоламп, 8 з яких стандартні, у другому контейнері 28 ламп, 20 з яких стандартні. З другого контейнера навмання взята 1 лампа і перекладена в перший контейнер. Потім з першого контейнера навмання витягають 1 лампу. Знайти ймовірність того, що ця лампа буде стандартною.

Задача 12. Під час поширення нового комп'ютерного вірусу ймовірність того, що комп'ютер «підчепить» вірус протягом 1 дня дорівнює 0,002. В установі працює 500 комп'ютерів. Яка ймовірність, що протягом 1 дня «підчеплять» вірус: а) точно 2 комп'ютера; б) від 1 до 5 комп'ютерів; в) жоден комп'ютер?

Задача 13. Мережа складається з 400 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови протягом часу t для кожного з елементів дорівнює 0,05. Знайти ймовірності того, що протягом часу t відмовлять а) точно 25 елементів; б) від 15 до 30 елементів.

Задача 14. У першій скриньці є 8 нових і 7 старих процесорів, а у другій – 4 нових і 4 старих. З першої скриньки випадково дістають 2 процесори і перекладають їх у другу скриньку. Після цього з другої скриньки дістають 3 процесори. Знайти ймовірність того, що всі процесори, вийняті з другої скриньки, нові.

Задача 15. Ймовірність хакерської атаки протягом доби становить 0,08. Яка ймовірність того, що за 1 рік відбудеться: а) 30 хакерських атак; б) від 10 до 50 хакерських атак?

Задача 16. Надійність визначення антивірусною програмою наявності вірусу в програмі складає 97% (тобто 3% вірусів лишаються невиявленими). Ймовірність того, що у звичайного файлу буде помилково виявлено вірус дорівнює 4 %. Обстежувалась група файлів із середнім процентом заражених вірусами 0,1%. Яка ймовірність того, що файл, щодо якого антивірусна програма сигналізує наявність вірусу, справді буде носієм вірусу?

Задача 17. Ймовірність того, що грошовий переказ, здійснений через мережу, дійде до адресата, становить 0,998. Знайти ймовірність того, що з 2000 переказів дійде до адресату а) точно 1995; б) не менше 1990.

Задача 18. До служби технічної підтримки в середньому за годину надходить 6 викликів. Знайти ймовірність того, що за 5 годин До служби технічної підтримки надійде а) точно 25 викликів; б) від 20 до 30 викликів.

Задача 19. Встановлено, що акаунти користувачі, які встановлюють прості паролі, хакери «ламають» у 20 разів частіше, ніж акаунти користувачів, що встановлюють складні паролі. Знаючи, що 65% користувачів встановлюють прості паролі, знайти ймовірність того, що користувач, акаунт якого зламали, встановив простий пароль.

Задача 20. Марсохід протягом доби відправив на Землю 5 000 мегабайт інформації. Ймовірність того, що мегабайт інформації буде прийнято з помилкою становить 0,0002. Побудувати ряд розподілу випадкової величини

X = “кількість мегабайтів, що було прийнято з помилкою” (обмежитися кількістю від 0 до 5) та знайти її числові характеристики.

Задача 21. Час безвідмовної роботи деякого приладу задано щільністю $f(t) = 0,05e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що прилад працюватиме без відмов 100 годин.

Задача 22. Дані дослідження 60 транзисторів щодо пропускну здатності транзистора (X , Мб/с) і собівартості (Y , грн./шт.), подані в таблиці:

№ п/п	X	Y	№ п/п	X	Y	№ п/п	X	Y	№ п/п	X	Y
01	67	291	16	68	303	31	70	258	46	96	188
02	76	278	17	67	271	32	83	167	47	68	235
03	101	342	18	96	304	33	71	185	48	54	317
04	104	239	19	67	334	34	87	244	49	77	258
05	61	243	20	86	328	35	80	314	50	76	334
06	61	210	21	86	226	36	90	234	51	88	345
07	75	219	22	77	363	37	83	289	52	67	224
08	107	203	23	77	399	38	55	329	53	111	220
09	93	269	24	64	199	39	71	439	54	77	347
10	67	185	25	72	271	40	65	243	55	66	339
11	67	260	26	63	261	41	67	419	56	85	353
12	55	312	27	88	263	42	66	285	57	68	235
13	86	185	28	72	242	43	90	271	58	74	235
14	78	282	29	93	260	44	85	278	59	75	220
15	76	254	30	87	321	45	74	226	60	85	385

- 1) Побудувати кореляційне поле (хмару) вибірки і зробити припущення про силу та вид залежності між величинами X та Y ;
- 2) Знайти вибіркові коваріацію $\text{cov}(X, Y)$, коефіцієнт кореляції r_{xy} та зробити висновок про міру лінійної залежності між величинами X та Y ;
- 3) Знайти вибіркове рівняння лінійної регресії Y на X і накреслити отримане рівняння лінійної регресії Y на X на кореляційне поле;
- 4) Розрахувати коефіцієнт детермінації R^2 для отриманого рівняння лінійної регресії. Порівняти з теоретичним.

Додаток 1. Таблиці математичної статистики

Таблиця 1. Значення функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

х	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

Таблиця 3. Квантилі (критичні точки) розподілу χ^2 (Пірсона).

Наведені значення $\chi^2_{\alpha,k}$, тобто такі значення, що задовольняють умові

$$P(\chi^2(k) \leq \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha \quad \text{або} \quad P(\chi^2(k) \geq \chi^2_{\alpha,k}) = 1 - \alpha.$$

Ступенів свободи k	Рівень значущості α						
	0,01	0,05	0,1	0,9	0,95	0,99	0,995
1	0,0002	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	6,6349	7,8794
2	0,0201	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	9,2103	10,5966
3	0,1148	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	11,3449	12,8382
4	0,2971	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	13,2767	14,8603
5	0,5543	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	15,0863	16,7496
6	0,8721	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	16,8119	18,5476
7	1,2390	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	18,4753	20,2777
8	1,6465	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	20,0902	21,9550
9	2,0879	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	21,6660	23,5894
10	2,5582	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	23,2093	25,1882
11	3,0535	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	24,7250	26,7568
12	3,5706	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	26,2170	28,2995
13	4,1069	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	27,6882	29,8195
14	4,6604	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	29,1412	31,3193
15	5,2293	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	30,5779	32,8013
16	5,8122	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	31,9999	34,2672
17	6,4078	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	33,4087	35,7185
18	7,0149	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	34,8053	37,1565
19	7,6327	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	36,1909	38,5823
20	8,2604	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	37,5662	39,9968
21	8,8972	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	38,9322	41,4011
22	9,5425	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	40,2894	42,7957
23	10,1957	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	41,6384	44,1813
24	10,8564	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	42,9798	45,5585
25	11,5240	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	44,3141	46,9279
26	12,1981	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	45,6417	48,2899
27	12,8785	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	46,9629	49,6449
28	13,5647	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	48,2782	50,9934
29	14,2565	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	49,5879	52,3356
30	14,9535	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	50,8922	53,6720

Таблиця 4. Квантилі (критичні точки) розподілу Стюдента.
Наведені значення $t_{\alpha,k}$ та $t_{\alpha/2,k}$, що задовольняють рівності

$$P(t(k) \geq t_{\alpha,k}) = \alpha \quad \text{або} \quad P(|t(k)| \geq t_{\alpha/2,k}) = \alpha.$$

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α для односторонньої (правої) області $t_{\alpha,k}$							
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
	Рівень значущості α для двосторонньої області $t_{\alpha/2,k}$							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

Таблиця 5. Критичні точки критерію ω^2 .

В таблиці наведено значення ω_α^2 , що задовольняють рівності

$$P\{\omega^2 > \omega_\alpha^2\} = \alpha.$$

Рівень значущості α	0,1	0,05	0,01
Невідомі параметри			
Нормальний розподіл з невідомим математичним сподіванням і відомою дисперсією	0,1344	0,1653	0,2380
Нормальний розподіл з відомим математичним сподіванням і невідомою дисперсією	0,3270	0,4418	0,7245
Нормальний розподіл з невідомими математичним сподіванням та дисперсією	0,1035	0,1260	0,1788

Як працювати з таблицями математичної статистики

Правило роботи з Таблицею 1 і Таблицею 2: в стовпчику стоять **цілі** і **десяті** цифри числа x , а в рядочку – **соті** цифри числа x . Значення функції знаходиться на перетині відповідного рядку з відповідним стовпцем.

Наприклад, обчислимо значення функцій Гауса і Лапласа від $x = 1,63$.
Маємо $\varphi(1,63) = 0,1057$; $\Phi(1,63) = 0,4484$.

За Таблицею 2 знаходять α -квантиль u_α нормального $N(0;1)$ розподілу:

$$P(|X| > u_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Властивості функції Гауса (Таблиця 1)

1. $\varphi(x) > 0$;
2. $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$;
3. найбільше значення $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
4. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, тобто функція Гауса є парною;
5. $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4$ або $x \leq -4$.

Властивості функції Лапласа (Таблиця 2)

1. $\Phi(x) > 0$ при $x > 0$;
2. $\Phi(\infty) = 0,5$; $\Phi(-\infty) = -0,5$;
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, тобто функція Лапласа є непарною;
4. $\Phi(x) \approx 0,5$ при $x \geq 4$; $\Phi(x) \approx -0,5$ при $x \leq -4$.

Властивості квантилів розподілу χ^2 (Таблиця 3)

При $k > 30$ розподіл $\chi^2(k)$ практично не відрізняється від нормального $N(k; 2k)$. Тобто для таких k для знаходження необхідних квантилів можна і варто, перейшовши спочатку до стандартної випадкової величини за формулою (7.9), використовувати таблицю функції Лапласа (Таблиця 2).

Властивості квантилів розподілу Стюдента (Таблиця 4)

При $k > 30$ розподіл $t(k)$ практично не відрізняється від нормального $N(0; 1)$. Тобто для таких k для знаходження необхідних квантилів можна і варто використовувати таблицю функції Лапласа (Таблиця 2).

Додаток 2. Метод добутків вибіркових середніх

1. Рівновіддалені варіанти.

Нехай вибірка об'єму n задана у вигляді рівновіддалених варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$ і відповідних частот $n_1, n_2, \dots, n_k$, причому, оскільки варіанти рівновіддалені, то

$$x_2 = x_1 + h, \quad x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h, \dots, \quad x_k = x_1 + (k-1)h,$$

де число h (відстань між сусідніми варіантами) називається кроком варіант.

Вибіркові середнє і дисперсію такої вибірки простіше знаходити методом добутків. Для цього перейдемо до умовних величин:

C – умовний нуль, часто це мода вибірки;

$u_i = \frac{x_i - C}{h}$ – умовна варіанта; як правило, це цілі числа виду

$0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Тепер обчислимо умовні початкові моменти першого і другого порядків M_1^* та M_2^* :

$$M_1^* = Mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i n_i; \quad M_2^* = Mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i^2 n_i. \quad (*)$$

Тоді шукані вибіркові середнє і дисперсія такої вибірки дорівнюють

$$\bar{x} = M_1^* h + C; \quad D_B = \left(M_2^* - (M_1^*)^2 \right) \cdot h^2 \quad (**)$$

Контроль правильності обчислень виконують шляхом перевірки того, чи має місце рівність:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (u_i + 1)^2 n_i = M_2^* + 2M_1^* + 1.$$

Всі обчислення, в тому числі знаходження контрольної суми, доцільно виконувати в таблиці виду

x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$(u_i + 1)^2 n_i$

2. Нерівновіддалені варіанти / інтервальний ряд розподілу.

Якщо варіанти не є рівновіддаленими, тоді варто спочатку перейти до інтервального ряду розподілу (з інтервалами однакової довжини h і так, щоб в кожен інтервал потрапило не менше 5 варіант). Тоді знаходять середини інтервалів, які і утворюють послідовність рівновіддалених варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$. В якості частот $n_1, n_2, \dots, n_k$ беруть кількість варіант, які потрапили у відповідний інтервал. Далі обчислюють за формулами для рівновіддалених варіант.

Зауваження. При обчисленні вибіркової дисперсії для зменшення помилки, що викликана групуванням (особливо при малому числі інтервалів) роблять поправку Шепарда:

$$D'_B = D_B - \frac{1}{12} h^2. \quad (***)$$

Приклад. Нехай маємо вибірку, задану таблицею

Варіанта x_i	24	36	48	60	72	84	96	108
Частота n_i	6	13	38	74	106	85	30	14

Знайти вибіркові середню та дисперсію цієї вибірки.

Розв'язання. Знаходити середні величини навіть з калькулятором в цій ситуації достатньо складно і довго. Тому скористаємось методом добутоків.

Отже, в даній ситуації: $n = 366$; $h = 12$; в якості хибного нуля візьмемо моду вибірки, тобто $C = 72$. Тепер знайдемо умовні варіанти u_i . Всі обчислення оформимо в таблицю

	x_i	n_i	u_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i^2 \cdot n_i$	$(u_i + 1)^2 \cdot n_i$
	24	6	-4	-24	96	54
	36	13	-3	-39	117	52
	48	38	-2	-76	152	38
	60	74	-1	-74	74	9
	72	106	0	0	0	106
	84	85	1	85	85	340
	96	30	2	60	120	270
	108	14	3	42	126	224
Сума	528	366	-4	-26	770	1084
Середнє	*****	*****	*****	-0,071	2,104	2,962

Таким чином, $M_1^* = -0,071$; $M_2^* = 2,104$; $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (u_i + 1)^2 n_i = 2,962$.

Перевіримо контрольну суму:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (u_i + 1)^2 n_i = M_2^* + 2M_1^* + 1$$

$$2,962 \text{ чи дорівнює } 2,104 - 0,141 + 1 = 2,963$$

– права і ліва частина співпадають, враховуючи похибки наближення.

Отже, за формулою (**) маємо:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = -0,071 \cdot 12 + 72 = 71,148;$$

$$D_B = \left(M_2^* - (M_1^*)^2 \right) \cdot h^2 = \left(2,104 - (-0,071)^2 \right) \cdot 12^2 = 2,099 \cdot 144 = 302,256.$$

Предметний покажчик

А	властивості.....75
Абревіатура	Гістограма99
LSM 131	Групування даних95
МНК 131	Д
Алгоритм	Дисперсія55
методу максимальної вірогідності 111	вибіркова101
методу моментів..... 109	виправлена.....102
перевірки статистичних гіпотез 143	властивості.....56
Аналіз	Довірчий інтервал.....115
кореляційний 124	Довірчі межі.....115
мета 124	Е
постановка основної задачі 125	Екссес.....58
регресійний.....124, 129	З
передумова..... 130	Закон розподілу
постановка основної задачі 130	дискретних випадкових величин
Асиметрія 58	Бернуллі.....35
Б	біноміальні34
Багатокутник розподілу 34	від'ємний біноміальний.....37
В	геометричний.....36
Варіанта 93	гіпергеометричний.....39
умовна..... 161	Паскаля37
Варіаційний ряд 93	поліноміальний36
Вибірка 88	пуассонівський38
багатофазна..... 91	рівномірний.....40
безповторна 89	неперервних випадкових величин
повторна..... 89	гамма-розподіл75
представницька (репрезентативна) 89	Гауса63
рандомізована 90	Ерланга76
Випадкова величина 33	нормальний.....63
двовимірна..... 66	показниковий (експоненційний)61
сумісна щільність 67	рівномірний.....61
дискретна 33, 45	Стюдента.....79
цілочислова..... 34	хі-квадрат (Пірсона).....76
неперервна 45, 47	Залежність
абсолютно неперервна..... 47	кореляційна124
асимптотично нормальна 84	статистична124
стандартна 57	функціональна123
нормальна 64	Й
Випадкова величина	Ймовірність18
неперервна 33	аксіоми.....18
Випадковий вектор	апостеріорна.....25
абсолютно неперервний 67	априорна.....25
Г	властивості.....11
Гамма-функція..... 75	геометрична16

довірча	115
класичне означення	11
комбінаторна	12
монотонність	18
потрапити в інтервал	46, 48
протилежної події	18
статистична	12
умовна	19

К

Квантиль розподілу	
Стюдента	79
Стюдента	
таблиця	158
Стюдента	
властивості	160
хі-квадрат	78
хі-квадрат	
таблиця	157
хі-квадрат	
властивості	160
Коваріація	
вибіркова	126
теоретична	126
Коефіцієнт	
детермінації	136
кореляції	
вибірковий	127
властивості	128
Комбінаторика	
правила вибору	13
правило добутку	13
правило суми	14
Кореляційна таблиця	125
Кореляційне поле (хмара)	125
Крива Гауса	63
Крива розподілу	47
Кумулята	99

М

Максимальної вірогідності	
метод	110
оцінка	110
принцип	110
Математична статистика	
основа	88
розділи	87
Математичне сподівання	53
властивості	53
Медіана	59, 104
Метод	

вибірковий	88
добутків	161
максимальної вірогідності	110
найменших квадратів(МНК)	131
Мода	59, 103
Момент	
вибірковий	
другого порядку	101
Моментів	
метод	109

Н

Надійність	115
Нев'язка	131
Незалежність	
випадкових величин	69
подій	18
подій	20
Нормальна крива	63

О

Область	
критична	142
прийняття гіпотези	142

П

Параметри розподілу	
гамма	75
нормального	63
показникового	61
Стюдента	79
хі-квадрат (Пірсона)	77
Перехід в Z-шкалу	57
Події	
алгебра	17
гіпотези	24
несумісні	11
операції	
доповнення (заперечення)	11
об'єднання	10
перетин	10
різниця	10
повна група	24
потік	41, 150
відсутність післядії	42, 150
інтенсивність	42, 150
найпростіший	150
ординарність	42, 150
пуассонівський	42
стаціонарність	42, 150
сумісні	11

Подія.....	9
випадкова	9
достовірна.....	9
елементарна (проста)	9
неможлива.....	9
протилежна.....	11
складена (складна)	10
що сприяє іншій	10
Позначення розподілу	
Бернуллі	35
біноміальний.....	35
від'ємний біноміальний	37
гамма.....	75
геометричний	36
гіпергеометричного	39
нормального	63
показникового	61
пуассонівського.....	38
рівномірного неперервного	61
Стюдента	79
хі-квадрат	77
Полігон частот	98
відносних	98
Помилка	
другого роду	140
першого роду.....	140
Поправка Шеппарда	162
Порожня множина.....	11
Похибка	131
Предиктор	129
Простір	
елементарних подій	10
розбиття	24
ймовірнісний.....	18
Регресія	
квадратична (параболічна).....	132
лінійна	132
рівняння.....	132
Регресор	129
Рівень значущості.....	115
Розмах варіації	103
Ряд розподілу.....	33

С

Середнє	
вибіркове	101
Середнє квадратичне відхилення	56
вибіркове	102
виправлене	102

Стандартне відхилення.....	56
Статистика.....	105
Статистична гіпотеза.....	139
альтернативна	139
основна	139
проста	140
складна	140
Статистична оцінка	105
ефективна	106
інтервальна.....	114
незміщена.....	106
слухна	106
точкова.....	114
точність	117
Статистичне спостереження.....	88
вибіркове.....	88
моментне.....	91
суцільне	88
Статистичний критерій	141
потужність.....	141
рівень значущості	141
хі-квадрат (Пірсона).....	143
Схема Бернуллі	26

Т

Таблиця частот.....	94
Теорема	
Баєса	24
критерій незалежності	69
Муавра–Лапласа	
інтегральна	28
локальна	27
повної ймовірності	24
про додавання ймовірностей	
довільних подій.....	21
про ймовірність випадкового вектора	
потрапити в область	68
про множення ймовірностей	
довільних подій.....	21
незалежних подій.....	21
про незалежність подій.....	21
Пуассона	28
Точка	
критична	142

У

Умова нормування	33, 47
Умовний нуль	161

Ф

Формула	
---------	--

Баєса.....	24	надійності.....	62
Бернуллі.....	26	Функція розподілу.....	
обчислення дисперсії.....	55	властивості.....	46
повної ймовірності.....	24	емпірична.....	96
Пуассона.....	28		
Стерджесса.....	95	Ч	
Функція		Частота	
випадкового аргументу.....	49	абсолютна.....	94
вірогідності.....	110	вибіркова.....	144
логарифмічної.....	111	контроль.....	144
Гауса.....	27	відносна.....	94
Гауса		накопичена.....	97
таблиця.....	155	теоретична.....	144
Гауса		контроль.....	144
властивості.....	160		
Лапласа.....	28	Щ	
розширена.....	64	Щільність розподілу.....	47
Лапласа		властивості.....	47
таблиця.....	156	маржинальна.....	68
Лапласа			
властивості.....	160		

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: ЦУЛ, 2010. 424 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. Москва: Высшая школа, 2003. 479 с.
3. Жерновий Ю. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Тексти лекцій для студентів нематематичних спеціальностей. Львів: ЛНУ ім. Франка, 2012. 101 с.
4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник. У 2-х ч. Ч. 1. Київ: КНЕУ, 2000. 304 с.
5. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: підручник. У 2-х ч. Ч. 2. Глава 6. Київ: Техніка, 2004. 792 с.

6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. Москва: Айрис, 2004. 256с.

Додаткова та практикуми

7. Бродский Я. С., Хаметова З. Я. Лабораторные работы по математической статистике и методические рекомендации к их выполнению. Донецк: ДонГУ, 1999. 65 с.

8. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Київ: Вища школа, 1988. 439 с.

9. Глеч С. Г., Ледяев С. Ф., Ольшанська І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник. Севастополь: СевНТУ, 2011. 176 с.

10. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Москва: Высшая школа, 2004. 479 с.

11. Руденко В. М. Математична статистика: навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

12. Томусяк А. А., Трохименко В. С., Шунда Н. М. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч. 1. Вінниця, 2001. 334 с.

Довідники та практичне застосування

13. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Москва: Наука, 1988. 480 с.

14. Горбань І. І. Теорія ймовірностей та математична статистика для наукових працівників і інженерів. Київ, 2003. 244 с.

15. Королук В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Москва: Наука, 1985. 640с.

16. Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. І. Теоретико-імовірносні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. Київ: Інформтехніка, 1995.

Електронні ресурси

1. Різні розподіли <http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html>
2. <http://fizma.net/index.php?idi=alg/imov>
3. <https://www.twirpx.com/files/science/mathematics/tvms/>
4. <http://www.freebookcentre.net/Mathematics/Probability-Theory-Books.html>
5. <https://www.coursera.org/learn/probability-theory-foundation-for-data-science>
6. <https://www.coursera.org/learn/probability-intro>
7. <https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/18378/1/5%20Кушлик-Дивульська.pdf>
8. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Teoria_veroatnosty_mat_stat.pdf
9. http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/32487/1/Michael%20Akritas_2016.pdf
10. https://math.buet.ac.bd/public/faculty_profile/files/835598806.pdf
11. <https://wwwhome.ewi.utwente.nl/~meijertmj/opgaven3/ReaderProb.pdf>

Навчальне видання

Крикун Іван Григорович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Електронне видання

Редактор І. М. Колесникова

Технічний редактор Т. О. Алімова

Підписано до друку **.**.20** р.

Формат 60х84/16. Папір офсетний.

Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 5,35

Зам. № **

Донецький національний університет імені Василя Стуса,

21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до Державного реєстру

серія ДК № 5945 від 15.01.2018 р.