

Розділ VI

Економіко-математичні методи

УДК 519.863

Т. В. Іваненко
*кандидат технічних наук, доцент кафедри
математичного аналізу та теорії ймовірностей,
Національний технічний університет України «КПІ»*

В. З. Кузьмінський
*кандидат економічних наук, доцент кафедри
фінансів та банківського бізнесу,
Університет економіки та права «КРОК»*

Математична модель оптимальної структури кредитного портфеля комерційного банку

У статті розроблено математичну модель формування банком оптимального кредитного портфеля з огляду на цілі кредитної політики банку, вимоги Національного банку, мінімізації ризику портфеля та максимізації його прибутку. На підставі моделі проведено розрахунок, зроблено висновки з отриманих результатів і сформульовано рекомендації банку щодо пріоритетів його кредитної діяльності.

Ключові слова: кредитний портфель, оптимальна структура, цільова функція, нормативи НБУ, ризик, диверсифікація, резерви.

Т. В. Іваненко
*кандидат технических наук, доцент кафедры
математического анализа и теории вероятностей,
Национальный технический университет Украины «КПИ»*

В. З. Кузьминский
*кандидат экономических наук, доцент кафедры
финансов и банковского бизнеса,
Университет экономики и права «КРОК»*

Математическая модель оптимальной структуры кредитного портфеля коммерческого банка

В статье разработана математическая модель формирования банком оптимального кредитного портфеля с точки зрения целей кредитной политики банка, требования Национального банка, минимизации риска портфеля и максимизации его прибыли. На основании модели проведен расчет, сделаны выводы из полученных результатов и сформулированы рекомендации банку относительно приоритетов его кредитной деятельности.

Ключевые слова: кредитный портфель, оптимальная структура, целевая функция, нормативы НБУ, риск, диверсификация, резервы.

T. Ivanenko
*PhD in Engineering Sciences, Associate Professor
of Department of Mathematical Analysis and Probability
The National Technical University of Ukraine
“Kyiv Polytechnic Institute”*

V. Kuzminsky
*PhD, Associate Professor
of Department of Finance and banking
University of Economics and Law “KROK”*

Mathematical model of optimal loan portfolio structure of commercial bank

In this article is described a mathematical model of the optimal bank loan for the purposes of the bank's credit policy, requirements of the National Bank, minimizing portfolio risks and maximizing its profit. Based on a calculation model, conclusions are stated from the results and recommendations are provided regarding bank's credit activity priorities.

Keywords: credit portfolio, the optimal structure, the objective function, the NBU regulations, risk, diversification, reserves.

Постановка проблеми

На сьогодні можна стверджувати, що банківська система України відновила ефективну діяльність після світової фінансової кризи 2008-2009 рр., про що свідчать результати її діяльності. Уперше після кризи банківська система отримала прибуток лише за підсумками 2012 року. Як відомо, у структурі доходів банку близько 75 % становлять процентні доходи від наданих кредитів, тому фінансовий результат банківської установи значною мірою залежить від результатів кредитної діяльності. Загальний обсяг кредитування банківською системою нині дещо перевищує докризовий рівень, але важливим показником є частка простроченої заборгованості в сукупному кредитному портфелі банків (рис. 1). На рис. 1 наведено лінійні тренди цих показників, які свідчать про те, що з нарощенням обсягів наданих кредитів обсяги проблемних кредитів практично не змінюються. На 1 серпня 2013 р. частка таких кредитів у сукупному банківському кредитному портфелі становить 9 %, хоча, за оцінками фахівців, не повинна перевищувати 5 %.

Таким чином, досвід роботи банкірів у кризових умовах показав, що успішність банківського бізнесу обумовлена здатністю банківської установи стабільно працювати навіть за несприятливих зовнішніх умов, зокрема проведенням зваженої кредитної політики банку та умінням формувати оптимальний кредитний портфель, який забезпечував би достатній прибуток за мінімального рівня ризику.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблемам кредитної діяльності банків присвячені роботи таких науковців, як О. Терещенко [2], І. Волошин [3], І. Сало [4], О. Ковальов [5], В. Вітлінський, О. Пернарівський, Я. Наконечний, О. Васюренко та інших. Аналіз наукових робіт названих авторів свідчить про різноманітність підходів до зниження кредитного ризику банку та підвищення його прибутковості, а саме – пропонуються порядок розрахунку вартості кредиту, методи оцінки кредитоспроможності позичальника, методики визначення резервів за кредитними операціями, розглянуто практичні аспекти роботи з проблемними позичальниками тощо.

Не вирішені раніше частини загальної проблеми

В існуючій літературі залишається поза увагою такий спосіб зниження ризику та максимізації прибутку банку, як оптимізація структури кредитного портфеля. При цьому структурувати портфель можна за ознаками категорії позичальників, строковості кредитів, дохідності, галузі економіки тощо.

Формулювання цілей статті

Метою статті є розроблення математичної моделі формування банком кредитного портфеля, оптимального за критерієм «ризик/прибуток».

Виклад основного матеріалу дослідження

Сформулюємо таке завдання: скласти математичну модель і розрахувати оптимальну структуру кредитного портфеля комерційного банку, а також максимально можливий його прибуток за наявності системи обмежень, яка складається з двох блоків:

- 1) обмеження, встановлені ризик-менеджментом комерційного банку;
- 2) обмеження Національного банку, що встановлені у вигляді нормативів кредитного ризику [6].

Математичною моделлю цієї задачі є лінійна оптимізаційна модель, цільова функція якої – прибуток банку від кредитних операцій. Позначимо функцію прибутку Z , що залежить від часток ресурсів, вкладених у різні види кредитних операцій. Нехай банк пропонує кредитну програму, яка, залежно від умов кредитування та типу позичальників, складається з n видів кредиту. Тоді x_j ($j = 1, \dots, n$) – частка ресурсів, спрямованих банком на надання кредиту j -го виду. Дохідність кожного виду кредиту виражена його річною ефективною кредитною ставкою r_j . Позначимо C – витрати банку на здійснення кредитної діяльності. Вони складаються з процентних витрат (плати за залучені та запозичені ресурси), комісійних, операційних витрат і відрахувань до резервів. Тоді

цільовою функцією моделі буде $Z = \left(\sum_{j=1}^n x_j r_j \right) - C \rightarrow \max$. Тепер запишемо систему обмежень.

Перший блок складається з вимог ризик-менеджменту банку щодо структури кредитного портфеля. Ці вимоги ґрунтуються на таких основних методах зниження кредитного ризику портфеля як диверсифікація, лімітування та створення резервів. З метою забезпечення достатнього рівня диверсифікації можуть бути встановлені обмеження, згідно з якими частка кожного виду кредиту не повинна бути меншою деякої частини (d %) сукупного кредитного портфеля: $x_j \geq 0.01 \cdot d \cdot \sum_{j=1}^n x_j$ ($\forall j = 1, \dots, n$). Певні види кредитів є більш ризикованими для банку, наприклад строк яких перевищує 5 років, бланкові кредити, а також кредити готівкою, цільове використання яких не може бути проконтрольоване банком. До цих видів кредитів застосовується лімітування шляхом обмеження їхньої суми певною часткою h % сукупного кредитного портфеля:

$x_j \leq 0.01 \cdot h \cdot \sum_{j=1}^n x_j$ для тих j , що відповідають означенню кредитів з підвищеним ризиком. Це можна здійснити у два способи: встановити єдине значення h для всіх кредитів із підвищеним ризиком, або диференційовані значення для різних видів нестандартних кредитів. Однак надмірна обережність у кредитній діяльності може призвести до замалих або навіть від'ємних фінансових результатів, тому частка низькоефективних кредитів не повинна перевищувати g % кредит-

ного портфеля банку: $x_j \leq 0.01 \cdot g \cdot \sum_{j=1}^n x_j$ для тих j , що відповідають означенню

низькоефективних видів кредитів. Тут також можна встановити єдину граничну частку g для всіх дешевих кредитів, або диференціювати її залежно від розміру кредитної ставки. Також до системи обмежень слід включити вимогу про максимальний розмір кредитного портфеля: сума всіх кредитів не може перевищувати наявних ресурсів банку (P), $\sum_{j=1}^n x_j \leq P$. Тепер розглянемо резерви під кредитні

операції. Цей вид резервів банки можуть відносити на валові витрати, тому $C = C_1 + R$, де R – сума відрахувань у резерви, а C_1 – інші витрати банку. Сума R розраховується згідно з методикою НБУ [7] і залежить від ступеня ризику кредитної операції, на який впливає фінансовий стан позичальника та стан обслуговування ним боргу, а також від ліквідності прийнятого за кредитом забезпечення. Кожній кредитній операції надається категорія якості за шкалою від I (найвища) до V (найнижча). До проблемних кредитів належать ті, категорія якості яких класифікована як IV і V. За такими кредитами банк змушений формувати резерв у розмірі від 51 % до 100 % балансової вартості кредиту. Також невеликі резерви під кредитні операції свідчать про якісний кредитний портфель банку, адже сума резервів і ризик кредитного портфеля прямо пропорційні. Тому введемо обмеження, згідно з якими сума резервів не перевищить деякого наперед заданого порогового значення: $R \leq R_{max}$, причому $R = R(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$ – сума резерву залежить як від сум кредитів різних видів x_j ($j = 1, \dots, n$), так і від параметрів цих кредитів a_j ($j = 1, \dots, n$), що характеризують ступінь ризику кредитних операцій і якість забезпечення.

Другий блок обмежень складається з чотирьох нормативів НБУ:

1. Норматив максимального розміру кредитного ризику на одного контрагента (Н7), який встановлюється з метою обмеження кредитного ризику, що виникає внаслідок невиконання окремими позичальниками своїх зобов'язань. Н7 розраховується за формулою (1):

$$H7 = \frac{B + 3}{PK} \cdot 100\% \leq 25\% \quad (1)$$

де B – сума всіх вимог банку до цього контрагента (заборгованість контрагента перед банком за кредитами, за факторинговими операціями, фінансовим лізингом, врахованими векселями, борговими цінними паперами, дебіторська та інша заборгованість);

3 – сума всіх позабалансових зобов'язань, виданих банком щодо цього контрагента (гарантії, поручительства, акредитиви, авалі та акцепти, інші зобов'язання банку);

PK – регулятивний капітал банку.

Позначимо i – номер позичальника банку, сума кредиту якого разом із позабалансовими зобов'язаннями банку перед цим позичальником, не перевищує $0.1PK$ банку, тобто не віднесено до категорії великих кредитів. v – загальна кількість таких позичальників, $i = 1, \dots, v$.

Тоді $B_i + 3_i = x_{ij}$ – загальна сума кредитної заборгованості i -го позичальника перед банком, за умови, що цей позичальник отримав кредит j -го виду. Цей норматив може бути записаний так: $x_{ij} \leq 0.25PK \quad \forall i = 1, \dots, v$.

2. Норматив великих кредитних ризиків (Н8) розраховується за формулою (2). Кредитний ризик вважається великим, якщо сума всіх вимог банку до

цього контрагента або групи пов'язаних контрагентів і всіх позабалансових зобов'язань, наданих банком щодо цього контрагента або групи пов'язаних контрагентів, становить не менше 10 % регулятивного капіталу банку.

$$H8 = \frac{KP + Z}{PK} \cdot 100\% \leq 800\% \quad (2)$$

де KP – сума всіх великих кредитних ризиків, наданих банком щодо всіх контрагентів або груп пов'язаних контрагентів;

Z – сума всіх позабалансових зобов'язань, виданих банком щодо цього контрагента або групи пов'язаних контрагентів.

Позначимо $KP_k + Z_k = x_{kj}$, – загальна сума кредитної заборгованості k -го позичальника перед банком, за умови, що цей позичальник отримав кредит j -го виду. Цей норматив може бути записаний так: $x_{kj} \leq 800PK \quad \forall k = 1, \dots, s$, де s – кількість великих кредитів.

3. Норматив максимального розміру кредитів, гарантій і поручительств, наданих одному інсайдеру (H9), встановлюється для обмеження ризику, який виникає під час здійснення операцій з інсайдерами, що може призвести до прямого та непрямого впливу на діяльність банку. H9 розраховується за формулою (3):

$$H9 = \frac{Z_{in} + Z_{\sigma}}{CK} \cdot 100\% \leq 5\% \quad (3)$$

де Z_{in} – сума всіх зобов'язань інсайдера перед банком;

Z_{σ} – сума всіх позабалансових зобов'язань, виданих банком щодо цього інсайдера;

CK – статутний капітал банку.

Позначимо $Z_{inl} + Z_{\sigma l} = x_{lj}$, – загальна сума кредитної заборгованості l -го позичальника перед банком, за умови, що цей позичальник отримав кредит j -го виду. Цей норматив може бути записаний так: $x_{lj} \leq 0.05CK \quad \forall l = 1, \dots, m$, де m – кількість кредитів, наданих інсайдерам.

4. Норматив максимального сукупного розміру кредитів, гарантій і поручительств, наданих інсайдерам (H10), розраховується за формулою (4):

$$H10 = \frac{CZ_{in} + CZ_{\sigma}}{CK} \cdot 100\% \leq 30\% \quad (4)$$

де CZ_{in} – сукупна сума зобов'язань усіх інсайдерів перед банком;

CZ_{σ} – сума всіх позабалансових зобов'язань, виданих банком щодо всіх інсайдерів.

Формально останній норматив можна записати так: $\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n x_{lj} \leq 0.3CK$.

Узагальнюючи всі попередні міркування, запишемо математичну модель (5) оптимальної структури кредитного портфеля комерційного банку.

$$Z = \left(\sum_{j=1}^n x_j r_j \right) - C_l - R \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_j \geq 0.01 \cdot d \cdot \sum_{j=1}^n x_j, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
 x_j \leq 0.01 \cdot h \cdot \sum_{j=1}^n x_j, \quad j - \text{вид кредиту з підвищеним ризиком} \\
 x_j \leq 0.01 \cdot g \cdot \sum_{j=1}^n x_j, \quad j - \text{вид низькоефективного кредиту} \\
 \sum_{j=1}^n x_j \leq P. \\
 R(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \leq R_{max} \\
 x_{ij} \leq 0.25 PK, \quad \forall i = 1, \dots, v, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
 x_{kj} \leq 800 PK, \quad \forall k = 1, \dots, s, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
 x_{lj} \leq 0.05 CK, \quad \forall l = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, n \\
 \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n x_{lj} \leq 0.3CK \\
 x_{ij} \geq 0, \quad x_{kj} \geq 0, \quad x_{lj} \geq 0
 \end{array} \right. \quad (5)$$

Причому $\sum_{i=1}^v x_{ij} + \sum_{k=1}^s x_{kj} + \sum_{l=1}^m x_{lj} = \sum_{j=1}^n x_j, \quad v + s + m = n.$

Застосуємо запропоновану модель і розрахуємо оптимальну структуру кредитного портфеля комерційного банку. Дані для розрахунку наведено в табл. 1. Банк, що розглядається, пропонує кредити 19 видів, що різняться за позичальниками, термінами, граничними сумами, забезпеченням, характером цільового використання. Тому інструментальними змінними моделі будуть x_j ($j = 1, \dots, 19$) – обсяги коштів, які банк може надати в кредит кожного виду. Дані про витрати банку взято із звіту про фінансові результати за 2012 рік:

- Процентні витрати – 233 772 тис. грн.;
- Комісійні витрати – 6 504 тис. грн.;
- Адміністративні та інші операційні витрати – 170 210 тис. грн.;
- Відрахування до резерву під знецінення кредитів – 19 827 тис. грн.

Отже, $C = 430\,313$ тис. грн. за підсумками 2012 року. Звісно, що для отримання більш точних результатів бажано взяти до розрахунку лише ту частину витрат, що пов'язана саме з кредитною діяльністю, адже банк проводить й інші активні операції, які потребують видатків.

Нехай ризик-менеджментом банку встановлено такі значення часток: $d \% = 3 \%$, $h \% = 50 \%$, $g \% = 33 \%$. Кредитами з підвищеним ризиком вважатимемо кредити готівкою, надані за допомогою кредитної карти, автокредити до 7 років, іпотечні до 20 років, споживчі до 10 років, бланкові овердрафти та експрескредити без застави. До низькоефективних кредитів віднесемо ті, ефективні ставки за якими менше 19 %. Загальна сума кредитного портфеля не перевищує усієї ресурсної бази банку, за даними балансу банку на 31 грудня 2012 р. його зобов'язання та власний капітал становлять 5 137 019 тис. грн. Для більш точних розрахунків бажано взяти лише ту частину ресурсів, яку банк має намір вкласти

Таблиця 1

Види кредитів, які пропонує комерційний банк клієнтам

№	Вид кредиту	Річна ефективна кредитна ставка, %
Кредити фізичним особам		
1.	Кредити готівкою на 1 рік до 100 тис. грн.	19,75
2.	Кредити СПД на 1 рік до 20 тис. грн.	10,6
3.	Кредитна карта на 3 роки до 8 тис. грн.	36
4.	Автокредит до 7 років	16
5.	Іпотечний кредит до 20 років	18,2
6.	Споживчий кредит під заставу нерухомості до 10 років	22,1
Кредити малому та середньому бізнесу		
7.	На поповнення обігових коштів: овердрафт бланковий;	24
8.	овердрафт забезпечений.	22
9.	На придбання обладнання	22
10.	На придбання нерухомості	20
11.	На придбання автотранспорту та спецтехніки	19
12.	На споживчі цілі	22
13.	Експрес-кредити без застави	20
14.	Комплексне кредитування агробізнесу	20,5
Кредити корпоративному бізнесу		
15.	Поповнення оборотного капіталу	19
16.	Придбання обладнання	19
17.	Придбання нерухомості	19
18.	Кредитна лінія	17
Міжбанківські кредити		
19.	Надання кредитів іншим банкам	6,5

Джерело: [8]

саме в кредитній операції. Друга група обмежень, що ґрунтується на нормативах кредитного ризику, також потребує інформації по кожній кредитній операції, яка не оприлюднюється. Тому складаємо таку оптимізаційну модель (6):

$$Z = 0.1975x_1 + 0.106x_2 + 0.36x_3 + 0.16x_4 + 0.182x_5 + 0.221x_6 + 0.24x_7 + 0.22x_8 + 0.22x_9 + 0.2x_{10} + 0.19x_{11} + 0.22x_{12} + 0.2x_{13} + 0.205x_{14} + 0.19x_{15} + 0.19x_{16} + 0.19x_{17} + 0.18x_{18} + 0.065x_{19} - 430313 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0.03(x_1 + \dots + x_{19}) \\ \dots \\ x_{19} \geq 0.03(x_1 + \dots + x_{19}) \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{13} \leq 0.5(x_1 + \dots + x_{19}) \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_{18} + x_{19} \leq 0.33(x_1 + \dots + x_{19}) \\ x_1 + \dots + x_{19} \leq 5137019 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 19 \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язуємо її за допомогою надбудови Excel «Пошук розв'язку». Отримані результати наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Результати розрахунку оптимальної структури кредитного портфеля

Змінні	Значення змінних (у тис. грн.)	Частка кредиту (у % до загального обсягу кредитного портфеля)	Результат (тис. грн.)
x_1	154 110, 570	3%	Z (прибуток) =
x_2	154 110, 570	3%	
x_3	1 643 846, 080	32%	840 046, 1136
x_4	154 110, 570	3%	
x_5	154 110, 570	3%	
x_6	154 110, 570	3%	
x_7	154 110, 570	3%	
x_8	873 293, 230	17%	
x_9	154 110, 570	3%	
x_{10}	154 110, 570	3%	
x_{11}	154 110, 570	3%	
x_{12}	154 110, 570	3%	
x_{13}	154 110, 570	3%	
x_{14}	154 110, 570	3%	
x_{15}	154 110, 570	3%	
x_{16}	154 110, 570	3%	
x_{17}	154 110, 570	3%	
x_{18}	154 110, 570	3%	
x_{19}	154 110, 570	3%	

Джерело: розрахунки авторів

Дані табл. 2 визначають структуру кредитного портфеля банку відповідно до вимог, що встановлені ризик-менеджментом.

Висновки

За результатами розв'язку задачі можна зробити такі висновки щодо формування оптимальної структури кредитного портфеля комерційного банку: з огляду на встановлені обмеження ризик-менеджментом банку найбільшу частку (32 %) повинні скласти кошти на кредитних картках клієнтів – фізичних осіб, наданих на 3 роки до 8 тис. грн., оскільки цей вид кредиту є найбільш прибутковим для банку. Також значну частку (17 %) повинні становити кредити, надані малому та середньому бізнесу на поповнення обігових коштів у формі забезпеченого овердрафту. Прибутковість цього виду кредиту є достатньо високою (22 %), проте ризик такої операції для банку незначний, оскільки вказаний вид кредиту характеризується швидким оборотом і прийнятним для банку забезпеченням. Ці два види кредитів є пріоритетними для банку, тому можна рекомендувати менеджменту банку проводити заходи з просування саме цих видів кредитів. Решта кредитів не є настільки привабливими для банку, оскільки або занадто ризиковані, або низькорентабельні, тому їхня частка має становити по

3 % загального обсягу портфеля для забезпечення достатнього рівня диверсифікації кредитного портфеля.

Кредитна політика банку з часом може змінюватися залежно від кон'юнктури ринку або зміни стратегічних цілей банку. У такому разі система обмежень моделі може бути скоригована і дасть інший оптимальний розподіл кредитного портфеля.

Література

1. Банківський нагляд. Основні показники діяльності банків України // сайт НБУ [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/article?art_id=36807&cat_id=36798
2. *Терещенко О.* Оцінка кредитних ризиків: відповідність новацій НБУ міжнародній практиці / О. Терещенко // Вісник НБУ. – 2012. – № 9. – С. 4–8.
3. *Волошин І.* Ціноутворення кредитів на основі підходу «грошовий потік під ризиком»: комплексний погляд на кредитний ризик і ризик ліквідності / І. Волошин // Вісник НБУ. – 2013. – № 6. – С. 26–30.
4. *Сало І. В.* Фінансовий менеджмент банку : Навчальний посібник / І. В. Сало, О. А. Криклій. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. – 314 с.
5. *Ковалев А. П.* Кредитний ризик-менеджмент : Монографія / А. П. Ковалев. – К. : Сузір'я, 2007. – 406 с.
6. Інструкція «Про порядок регулювання діяльності банків в Україні», затверджена Постановою Правління Національного банку України від 28 серпня 2001 р. № 368 // сайт НБУ [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat_id=58478
7. Положення «Про порядок формування та використання банками України резервів для відшкодування можливих втрат за активними банківськими операціями», затверджене Постановою Правління Національного банку України від 25 січня 2012 р. № 23 // сайт НБУ [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat_id=58478
8. Програми кредитування фізичним особам, корпоративному бізнесу, малому та середньому бізнесу // сайт ПАТ «Всеукраїнський банк розвитку» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.vbr-bank.com.ua>

УДК 336+519.8

В. Р. Кігель
*професор кафедри математичних методів
і статистики, кандидат економічних наук, доцент,
Університет економіки та права «КРОК»*

Задача Марковиця: оновлена постановка, аналітичне розв'язування, межі та можливі сфери використання аналітичного методу

У статті обґрунтовано метод аналітичного розв'язування задачі Марковиця в оновленій постановці, а також окреслено межі та зазначено можливі сфери – ринок цінних паперів і валютний ринок – його використання. Теоретичні дослідження проілюстровано конкретними прикладами.

Ключові слова: задача Марковиця, фінансовий портфель, валютний резерв, ризик, оптимізація, аналітичний метод