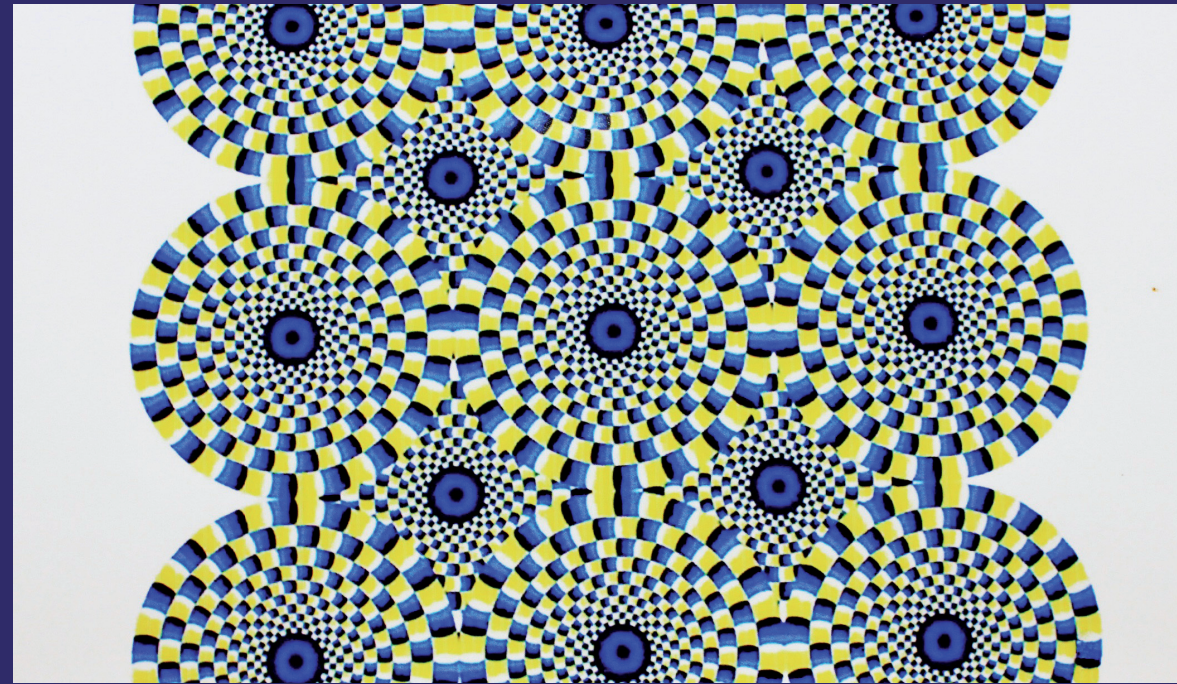


Дана книга присвячена дослідженню стохастичних рівнянь з локальним часом при вивченні яких використовуються формули, що пов'язують розв'язки таких рівнянь з розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь з розривним коефіцієнтом дифузії. Для обох типів рівнянь встановлено умови слабкої збіжності розв'язків, доведено принцип великих відхилень для мір, що ними породжуються та розглянуто питання про граничну множину для розв'язків за умови прямування коефіцієнта дифузії до нуля за наявності у відповідного звичайного диференціального рівняння явища Пеано в початковій точці. Крім того, для косоного броунівського руху встановлено функціональний закон типу повторного логарифму. Наведені результати опубліковані в численних фахових статтях та складають кандидатську дисертацію, успішно захищену в грудні 2013го року в Інституті прикладної математики та механіки НАН України (Донецьк, Україна).

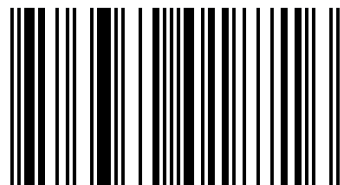


Іван Крикун

Граничні теореми для розв'язків стохастичних рівнянь



Крикун Іван Григорович, кандидат фізико-математичних наук, доцент Первомайської філії Національного університету кораблебудування імені Макарова, науковий співробітник Інституту прикладної математики та механіки НАН України. Автор 31 публікації, з яких 1 навчальний посібник та 11 наукових статей у фахових виданнях. E-mail: iwan.krykun@gmail.com



978-3-330-01871-6

Іван Крикун

Граничні теореми для розв'язків стохастичних рівнянь

Іван Крикун

**Граничні теореми для розв'язків
стохастичних рівнянь**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Imprint

Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this work is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher:

LAP LAMBERT Academic Publishing

is a trademark of

International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius

Printed at: see last page

ISBN: 978-3-330-01871-6

Zugl. / Approved by: Донецьк, Інститут прикладної математики і механіки НАН України, 2013

Copyright © Іван Крикун

Copyright © 2017 International Book Market Service Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group

All rights reserved. Beau Bassin 2017

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень	5
ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1. Огляд літератури	15
РОЗДІЛ 2. Мотивація вибору досліджень	21
РОЗДІЛ 3. Гранична теорема для стохастичних рівнянь ...	23
3.1. Означення та умови	24
3.2. Гранична теорема для рівнянь Іто	26
3.3. Гранична теорема для рівнянь з локальним часом	35
3.4. Приклад	40
РОЗДІЛ 4. Принцип великих відхилень для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь	41
4.1. Означення та умови	42
4.3. Принцип великих відхилень для мір, породжених розв'язками рівнянь Іто	45
4.2. Принцип великих відхилень для мір, породжених розв'язками рівнянь з локальним часом	60
4.4. Допоміжні леми	63
РОЗДІЛ 5. Функціональний закон типу повторного логарифма для косоного броунівського руху	67
5.1. Означення та позначення	68

5.2. Функціональний закон повторного логарифма для рівнянь Іто	69
5.3. Допоміжні леми	77
5.4. Функціональний закон повторного логарифма для косо-го броунівського руху	88
РОЗДІЛ 6. Явище Пеано для стохастичних рівнянь	90
6.1. Позначення та умови	91
6.2. Результати для звичайних диференціальних рівнянь	93
6.3. Результати для рівнянь Іто	102
6.4. Результати для рівнянь з локальним часом	112
6.5. Приклади	117
ВИСНОВКИ	121
Список використаних джерел	123

Перелік умовних позначень

Перед тим, як сформулювати результати дисертації, введемо позначення, які будуть використовуватись протягом всієї роботи.

Будуть використовуватись наступні символи:

□ – початок доведення леми.

■ – кінець доведення леми.

∨ – символ max.

∧ – символ min.

$a^+ = a \vee 0$.

I_A – індикатор множини A .

\emptyset – порожня множина. Будемо вважати $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

$Leb(A)$ – міра Лебега множини A .

\Rightarrow – символ слабкої збіжності.

Через C будемо позначати константи, що не залежать от ε . Всюди далі маємо на увазі, що ε - малий параметр.

Через \mathbb{R} позначається одновимірний евклідов простір, \mathcal{B} – борелівська σ -алгебра його елементів.

Будемо позначати простір неперервних функцій $f(t)$, $t \in [0, T]$, зі значеннями в \mathbb{R} через $\mathcal{C}[0, T]$; \mathcal{C}_T - борелівська σ -алгебра його елементів. $\mathcal{C}^k(A)$ – простір функцій, k разів неперервно диференційованих в області A .

Для абсолютно неперервної функції $f(t)$ будемо використовувати стандартне зображення $f(t) = f(a) + \int_a^t \dot{f}(s) ds$. Через $\mathbb{A}\mathcal{C}^+[0, T]$ позначається

простір всіх абсолютно неперервних функцій f , визначених на $[0, T]$ та таких, що $f(0) = 0$ і $\dot{f}(s) \in [0, 1]$. Нормою на просторах $\mathbb{C}[0, T]$ та $\mathbb{AC}^+[0, T]$ є $\|x\|_T = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|$. Позначимо $\mathbf{C}_T = \mathbb{C}[0, T] \times \mathbb{AC}^+[0, T]$ і нормою на цьому просторі буде

$$\|(x, y)\|_T = \|x\|_T + \|y\|_T.$$

Далі, $\mathbb{C}[0, \infty)$ позначає простір неперервних функцій $f(t)$, $t \geq 0$, зі значеннями в \mathbb{R} ; \mathcal{C} - борелівська σ -алгебра його елементів; через $\mathbb{AC}^+[0, \infty)$ позначається простір всіх абсолютно неперервних функцій f , визначених на $[0, \infty)$ та таких, що $f(0) = 0$ і $\dot{f}(s) \in [0, 1]$. Для просторів $\mathbb{C}[0, \infty)$ та $\mathbb{AC}^+[0, \infty)$ використовуємо норму

$$\|x\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left(\sup_{t \leq k} |x(t)| \wedge 1 \right).$$

Позначимо $\mathbf{C}_\infty = \mathbb{C}[0, \infty) \times \mathbb{AC}^+[0, \infty)$ з нормою

$$\|(x, y)\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Нехай сталі λ, Λ такі, що $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Будемо говорити, що пара функцій $(f(x), g(x))$ належить класу $\mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$ і позначати

$$(f, g) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda),$$

якщо ці функції вимірні і виконуються нерівності

$$|f(x)| \leq \Lambda, \quad \lambda \leq g(x) \leq \Lambda.$$

Будемо позначати

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Через $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ буде позначатися ймовірнісний простір з потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, $(w(t), \mathcal{F}_t)$ - одновимірний стандартний вінерівський процес, \mathbf{E} - символ математичного сподівання (відносно \mathbf{P}), \mathbf{E}^μ - математичне сподівання відносно міри μ .

Для довільного неперервного семімартигалу $X(t)$ через $L^X(t, a)$ позначимо локальний час процесу X в момент t в точці a .

ВСТУП

Актуальність роботи.

Проблеми граничної поведінки різних об'єктів в теорії ймовірностей взагалі і в теорії випадкових процесів зокрема, завжди перебувають у центрі уваги дослідників. Згадаємо класичні теореми Муавра-Лапласа, Пуассона, центральну граничну теорему, закон повторного логарифму тощо. Граничним теоремам про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, що залежать від малого параметру при прямуванні цього параметру до нуля, присвячені роботи Й. І. Гіхмана, А. В. Скорохода, Н. В. Крилова, А. Д. Вентцеля, М. І. Фрейдліна, А. Н. Шпіряєва, Дж. Жакода, Д. Струка, С. Р. С. Варадана, А. Ю. Веретеннікова, Г. Л. Кулініча, А. А. Пухальського, М. І. Портенка, Б. В. Бондарева, О. М. Станжицького, С. Я. Махна та інших.

Асимптотичні результати з теорії стохастичних рівнянь використовуються при дослідженнях в теорії рівнянь з частинними похідними, тепловими та дифузійними процесами в середовищах із сильно змінними властивостями, задачах фінансової математики. Крім того, розвиток асимптотичних методів стохастичних рівнянь становить і самостійний інтерес у зв'язку із значними математичними труднощами.

В силу вищезазначеного, встановлення граничних теорем для стохастичних рівнянь є актуальним питанням і виглядає доцільним проводити дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконувалась в рамках бюджетних тем відділу теорії ймовірностей

та математичної статистики ІПММ НАН України: "Асимптотичний аналіз в теорії випадкових процесів, теорії стохастичних рівнянь, задачах математичної статистики" (шифр теми — ІІІ-4-04 (1.1.4.5), номер державної реєстрації № 0104U000861) та "Стохастичні рівняння. Якісні і асимптотичні властивості" (шифр теми — ІІІ-4-09 (1.1.4.5), номер державної реєстрації № 0109U002772).

Мета і задачі дослідження. *Об'єктом дослідження* даної дисертації є стохастичні диференційні рівняння. *Предмет дослідження* – стохастичні диференційні рівняння Іто та стохастичні диференційні рівняння з локальним часом, що залежать від малого параметру та з нерегулярними коефіцієнтами. *Мета* дисертації – отримати граничні теореми для розв'язків стохастичних диференційних рівнянь Іто та стохастичних диференційних рівнянь з локальним часом із коефіцієнтами, що залежать від малого параметру. Ця мета включає в себе *задачі*:

1. Отримання граничних результатів для стохастичних диференційних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами.
2. Застосування результатів попереднього пункту до стохастичних диференційних рівнянь з локальним часом.

Методи дослідження. В усіх розділах використовується методологія, запропонована в роботах Х.-Й. Енгельберта, В. Шмідта [67, Proposition 4.9], Дж. Харрісона, Л. Шеппа [69], Ж.-Ф. Ле Галла [83, Proposition 2.2], С. Я. Махна [42], [85], за допомогою якого можна звести рівняння з локальним часом до рівняння Іто. В розділах 4, 5 використано метод зворотного відображення (в формі принципу стиснення) та метод Лапласа (в формі принципу великих відхилень). Крім того, в розділі 3 застосовано методологію С. Я.

Махна [40], [42]; в розділі 4 використовуються методологія, запропонована в роботах Т. Чанга, С. Ш'ю [65], [66], а також в роботах А. А. Пухальського [88], [89]; в розділі 5 використано методологію А. В. Булінського [7]; в розділі 6 використовується метод, запропонований П. Балді в роботах [62], [63], а також метод асимптотичних оцінок інтегралів, метод нового ймовірнісного простору Скорохода та методологія з теорії звичайних диференційних рівнянь. Також використовуються інші результати та методи теорії ймовірностей, функціонального аналізу, теорії диференційних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів. Основними результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, є наступні:

- доведена слабка збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто або стохастичних рівнянь з локальним часом, коефіцієнти яких нерегулярно залежать від параметру ε . Встановлені необхідні й достатні умови цієї збіжності. Виписане рівняння для граничного процесу.

- встановлено принцип великих відхилень на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$ для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами та малим коефіцієнтом дифузії і для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом та з малим коефіцієнтом дифузії. Знайдені функціонали дії.

- отримано принцип великих відхилень на просторі \mathbb{C}_∞ для мір, породжених парою з розв'язку стохастичного рівняння Іто з розривними коефіцієнтами та малим коефіцієнтом дифузії і часу знаходження цього розв'язку в додатній півплощині та для мір, породжених парою з розв'язку стохастичного рівняння з локальним часом та малим коефіцієнтом дифузії і часу знаходження цього розв'язку в додатній півплощині. Знайдені функціонали дії.

- доведено функціональний закон типу повторного логарифму для стохастичного рівняння Іто з нульовим зносом та розривним коефіцієнтом дифузії, який проте є відокремленою від нуля обмеженою функцією обмеженої варіації.

- встановлено функціональний закон типу повторного логарифму для косоного броунівського руху.

- знайдено теорему порівняння для розв'язків стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами та невідродженою дифузиею.

- отримано умови існування єдиного сильного розв'язку для стохастичних рівнянь Іто та рівнянь з локальним часом з розривними коефіцієнтами і невідродженою дифузиею.

- встановлено умови слабкої збіжності мір, породжених стохастичними рівняннями Іто з неперервним зносом та розривною, але невідродженою дифузиею, до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші за умови неєдиності розв'язку останньої.

- обгрунтовано умови слабкої збіжності мір, породжених стохастичними рівняннями з локальним часом і неперервним коефіцієнтом зносу, до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші за умови неєдиності розв'язку останньої.

Вказані результати є новими або узагальнюють відомі раніше.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при дослідженнях в теорії випадкових процесів, теорії рівнянь з частинними похідними, актуарній математиці.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач належить науковому керівникові С. Я. Махну. Всі результати дисертації отримані дисертантом самостійно і опубліковані в 17 роботах. Роботи [25], [78] написані в співавторстві з С. Я. Махном. В даних роботах С. Я. Махну належать постановка задач і вибір методів дослідження. Дисертанту належать доведення основних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях і наукових семінарах:

1. Міжнародній конференції "Modern problem and new trends in probability theory" (19-26 червня 2005 р., м. Чернівці);

2. Міжнародній конференції "Modern stochastics: theory and applications", присвяченій 60-річчю відділу теорії ймовірностей та математичної статистики і пам'яті професора М. Ю. Ядренка (19-23 червня 2006 р., м. Київ);

3. Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їхнього застосування, присвяченій 100-річчю Я. Б. Лопатинського (6-7 грудня 2006 р., м. Донецьк);

4. Міжнародній конференції "Skorokhod space. 50 years on" (17-23 червня 2007 р., м. Київ);

5. Всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання" на честь 90-річчя з дня народження Й. І. Гіхмана (24-26 травня 2008 р., м. Умань);

6. Міжнародній конференції "Modern stochastics: theory and applications II" (7-11 вересня 2010 р., м. Київ);

7. Міжнародній конференції "Conference on Stochastic Models and their

Applications" (22-24 серпня 2011 р., м. Дебрецен, Угорщина);

8. Міжнародній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17-21 вересня 2012 р., м. Львів);

9. Науковому семінарі "Числення Маллявена і його застосування" Інституту математики НАН України, м. Київ (керівник семінару доктор фіз.-мат. наук, проф. А. А. Дороговцев);

10. Науковому семінарі "Стохастичні диференційні рівняння" кафедри загальної математики Київського національного університету ім. Т. Шевченка (керівники семінару доктор фіз.-мат. наук, проф. О. М. Станжицький, доктор фіз.-мат. наук, проф. Г. Л. Кулініч);

11. Науковому семінарі "Аналітичні методи в теорії дифузійних процесів" кафедри вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету ім. І. Франка (керівник семінару доктор фіз.-мат. наук, проф. Б. І. Кошитко);

12. Наукових семінарах відділу теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту прикладної математики і механіки НАН України (керівник семінару доктор фіз.-мат. наук С. Я. Махно).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 17 наукових роботах, серед яких 8 статей в наукових фахових журналах [20], [24], [25], [26], [27], [74], [78], [80]; 1 стаття – в електронному фаховому виданні [79]; 6 публікацій в тезах міжнародних наукових конференцій [21], [72], [73], [75], [76], [77] та 2 публікації в тезах всеукраїнських наукових конференцій [22], [23].

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому керівнику **Сергію Яковичу Махну** за постановку задачі, допомогу та підтримку.

Короткий зміст роботи. Дисертаційна робота складається з переліку використаних позначень, вступу, 6 розділів, висновків та переліку літератури.

У вступі обгрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, визначена мета, сформульовані задачі дослідження та вказано методи їх вирішення. Також у вступі містяться дані про зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами і зазначені відомості про наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення та апробацію, наведено кількість публікацій за матеріалами дисертації. В першому розділі наведений огляд літератури за темою дисертації. В другому розділі обгрунтовується вибір напрямку досліджень. В третьому – шостому розділах знаходяться результати дисертації. В переліку літератури наведено 93 використане джерело.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Асимптотичні задачі для стохастичних диференційних рівнянь виникали і розв'язувались одночасно з розвитком теорії стохастичних рівнянь. Один із засновників цієї теорії Й. І. Гіхман розглядав такі задачі як головні і самі рівняння будував частково для того, щоб строго ставити і розв'язувати асимптотичні задачі.

Одна з важливих схем, що призводять до вивчення різних граничних теорем для випадкових процесів, – динамічні системи, що зазнають впливу випадкових збурень. До такої схеми призводить цілий ряд задач як теоретичного, так і прикладного характеру. Якісний аналіз поведінки збурених процесів є головним мотивом для розвитку асимптотичних методів та їх застосувань. На цьому шляху встановлені результати щодо точного зростання розв'язків, принципу усереднення, закону повторного логарифму тощо.

Випадкові збурення можуть не лише кількісно, а і якісно відображатися на властивостях диференціальних систем. Серед інших робіт, які комплексно висвітлюють проблеми та результати, що виникають в дослідженнях, присвячених випадковим збуренням, згадаємо роботи [28], [29], [46], [50], [54], [56].

Багато граничних результатів для розв'язків стохастичних рівнянь отримано в книгах, які швидко стали класичними, – А. В. Скорохода [48], [50] та Й. І. Гіхмана і А. В. Скорохода [15]. Серед інших результатів, що стосуються граничних результатів, виділимо наступні – які є найбільш близькими до теми даної дисертації.

Отже, в роботі Б. В. Бондарева [2] розглянуто одновимірне стохастичне

рівняння з малим параметром при коефіцієнті зносу

$$d\xi(t) = \varepsilon a(t, \xi(t)) + d\zeta(t), \quad t \geq 0, \quad \xi(0) = 0,$$

де $\zeta(t)$ - випадковий процес з незалежними приростами. За умов існування інтегральних середніх певних функцій від коефіцієнтів процесу $\xi(t)$ доведена при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабка збіжність мір, породжених процесом $\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon \xi\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$ до міри, породженої процесом $C_1 t + C_2 w(t)$ (тут C_1, C_2 - знайдені константи). В роботі [3] цим же автором розглядається одновимірне стохастичне рівняння з малим параметром при коефіцієнті зносу та внутрішнім шумом $\theta(t)$

$$d\xi(t) = \varepsilon a(t, \xi(t), \theta(t)) + d\zeta(t), \quad \xi(0) = 0.$$

Процеси $\zeta(t)$ і $\theta(t)$ взаємно незалежні; $\zeta(t)$ - зовнішній шум, що є процесом з незалежними приростами і зі скінченними моментами другого порядку. За умов існування інтегральних середніх певних функцій від коефіцієнтів процесу $\xi(t)$ та певних умов на параметри внутрішнього шуму доведена при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабка збіжність мір, породжених процесом $\xi_\varepsilon(t) = \varepsilon \xi\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$ до міри, породженої процесом $C_1 t + C_2 w(t)$ (тут C_1, C_2 - знайдені константи).

О. М. Станжицький [51] досліджував питання поведінки звичайних диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями методом усереднення. Досліджена асимптотика нормованих відхилень від усереднених розв'язків, усереднення в стохастичних рівняннях Іто. В книзі А. М. Самойленка і О. М. Станжицького [47] серед іншого застосовується асимптотичний метод усереднення до рівнянь з випадковими збуреннями. В результаті встановлено аналоги класичних теорем М. М. Боголюбова - методу усереднення для систем рівнянь з випадковими імпульсними збуреннями та стохастичних систем Іто. Отримані результати застосовуються до дослідження коливних систем з малими випадковими збуреннями.

Використовуючи розроблені методи в роботах Б. В. Бондарєва [4],[5] розглядаються усереднення рівнянь в частинних похідних еліптичного типу при випадкових збуреннях.

Вперше не лише достатні, а й необхідні умови слабкої збіжності при $n \rightarrow \infty$ розв'язків одновимірних стохастичних рівнянь

$$\xi_n(t) = x + \int_0^t b_n(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma_n(\xi(s))dw(s)$$

з нерегулярними коефіцієнтами були знайдені Г. Л. Кулінічем в роботі [30]. Нерегулярність розуміється в тому сенсі, що не робиться припущень щодо рівномірної обмеженості коефіцієнтів за параметром n , а також щодо існування границь коефіцієнтів при $n \rightarrow \infty$. Багатовимірні стохастичні рівняння розглядалися у роботах [32], [33]. Суттєве узагальнення результатів Г. Л. Кулініча проведено у роботах С. Я. Махна [34], [35], [40]. У цих роботах були знайдені необхідні і достатні умови слабкої збіжності розв'язків до розв'язку рівняння Іто та отримані формули для коефіцієнтів граничного процесу. У роботах [83], [86] було відмічено, що за наявності необмеженого за параметром коефіцієнта зносу граничний процес може змінювати тип рівняння і задовольняти вже стохастичному рівнянню з локальним часом.

Часто є природнім припущення про малість (в тому чи іншому сенсі) випадкових збурень порівняно з детермінованими складовими руху. Тому однією із найбільш значних частин в асимптотичних задачах є результати про великі відхилення. Задача дослідження великих відхилень стохастичних динамічних систем виникає в ситуації, коли потрібно оцінити ймовірність малоїмовірної події, що полягає в тому, що система не дотримується своєї найбільш ймовірної траєкторії.

Точніше кажучи, задачі про великі відхилення для випадкових процесів

можна сформулювати наступним чином: нехай для сім'ї випадкових процесів $\xi^\varepsilon(t)$ має місце результат типу закону великих чисел: $\xi^\varepsilon \rightarrow x$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Задачі про великі відхилення процесу $\xi^\varepsilon(t)$ від його «найбільш ймовірної» при малих значеннях ε траєкторії $x(t)$ – це задачі про граничну поведінку при $\varepsilon \rightarrow 0$ ймовірностей $P\{\xi^\varepsilon \in A\}$, що прямують до нуля, для вимірних множин A , які знаходяться на додатній відстані від не випадкової граничної функції x . До задач про великі відхилення відносяться також задачі про асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ математичних сподівань виду $E f^\varepsilon(\xi^\varepsilon)$, якщо їхня основна частина при малих значеннях ε утворюється за рахунок мало ймовірних значень ξ^ε .

Задача вивчення малих випадкових збурень динамічних систем ставилася ще в роботі Л. С. Понтрягіна, А. А. Андропова і А. А. Вітта [44]. Результати, отримані в цій статті, відносились до одновимірних і, частково, двовимірних динамічних систем, і до таких збурень, що призводять до дифузійних процесів. Значно узагальнюються та поширюються ці результати в книзі А. Д. Вентцель і М. І. Фрейдлін [9], де розглядалось стохастичне рівняння виду

$$X_t^\varepsilon = X_0^\varepsilon + \int_0^t b(X_s^\varepsilon) ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon) dw_t.$$

Основна увага приділяється дослідженню впливу збурень на великих інтервалах часу. На таких інтервалах малі збурення вже істотно впливають на поведінку системи і для врахування цього впливу потрібно вміти оцінювати ймовірності мало ймовірних подій, тобто потрібні теореми про асимптотику ймовірностей великих відхилень для випадкових процесів. Основний метод, який при цьому використовується – узагальнений метод Лапласа. Подібні дослідження проводилися також в роботах А. Д. Вентцеля [10], А. Ю. Веретеннікова [13], С. Я. Махна [36], [37], [38], С. Р. С. Варадана [93] та інших.

Закон повторного логарифму для вінерівського процесу був отриманий

А. Я. Хінчиним у 1936 році [55]. Інше доведення цього закону дано у [49]. Досліджувався закон повторного логарифму і для розв'язків стохастичних рівнянь. Г. Л. Кулініч [31] розглядав одновимірне стохастичне рівняння

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t), \quad t > 0,$$

де $a(x), \sigma(x)$ – дійсні вимірні функції, визначені при всіх $x \in (-\infty; \infty)$ і лінійно обмежені на нескінченності, $\sigma(x) \geq \delta_N > 0$ при $|x| \leq N$ для будь-якого $N > 0$; причому для функцій $a(x), \sigma(x)$ з деякою константою $C > 0$ має місце обмеження

$$0 \leq f'(x)\sigma(x) \leq C,$$

де функція $f(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)} dv \right\} du$. За певних умов на поведінку функції $f(x)$ з деякими константами $\sigma_0 > 0, \alpha > 0, c_0 > 0$ доведено, що

$$\mathbb{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(L(t))} = \sigma_0^{1/\alpha} \right\} = \mathbb{P} \left\{ \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(L(t))} = - \left(\frac{\sigma_0}{c_0} \right)^{1/\alpha} \right\} = 1,$$

де функція $\varphi(x)$ є оберненою до функції $f(x)$, а $L(t) = (2 \ln \ln t)^{\frac{1}{2}}$.

С. Я. Махно в роботі [39] розглянув багатовимірне стохастичне рівняння з періодичними коефіцієнтами

$$\xi(t) = x + \int_0^t b(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s)$$

і довів для певних функціоналів від розв'язків цього рівняння закон повторного логарифму в формі Хінчина.

Функціональний закон повторного логарифму для вінерівського процесу було встановлено В. Штрассеном [91] і для більш загального нормування А. В. Булінським [7].

В роботі [6] Б. В. Бондарєв та М. Є. Корольов доводять за певних умов функціональний закон повторного логарифму у формі Штрассена для нор-

мованих інтегралів від процесів із слабкою залежністю виду

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 \ln(\ln n)}} \int_0^{nt} x(s) ds,$$

де $x(t)$, $t \geq 0$, - стаціонарний у вузькому сенсі випадковий процес з нульовим середнім та такий, що з ймовірністю 1 $|x(t)| \leq c < +\infty$.

Для розв'язків стохастичних рівнянь функціональний закон повторного логарифму у формі Булінського встановлено С. Я. Махном в роботі [84].

Такими є основні етапи наукової думки за розв'язуванням завданням. На даний час не до кінця вирішеними є питання, пов'язані із асимптотичними результатами для стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами та для стохастичних рівнянь з локальним часом. На частину із цих питань було дано відповідь в даній дисертаційній роботі.

РОЗДІЛ 2

МОТИВАЦІЯ ВИБОРУ ДОСЛІДЖЕНЬ

З розвитком науки і техніки все більш запитуваними стають розробки прикладних задач, такі як фільтрація, шифрування і дешифрування сигналів в мережах зв'язку, прогнозування різноманітних економічних та соціальних явищ і показників, розрахунки, пов'язані із врахуванням великої кількості малозначущих факторів тощо. У [18, стор. 11] відмічається, що сучасна фізика при дослідженні багатьох явищ потребує враховувати різного роду флуктуаційні ефекти. Це можуть бути теплові шуми, нестійкість, турбулентність, тощо. Там же наводяться приклади різних задач із статистичної гідродинаміки, статистичної радіофізики і акустики. Підкреслюється важливість застосування методів стохастичних рівнянь до розв'язання сформульованих задач.

Математичні моделі відмічених вище явищ містять звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними, стохастичні рівняння. Коефіцієнти цих рівнянь є розривними функціями та залежать від малого параметру. Причому ця залежність є нерегулярною. Тобто ці функції можуть необмежено зростати або взагалі не мати границь, коли малий параметр прямує до нуля.

Якщо явище, що розглядаються, відбувається у багатопаровому середовищі, наприклад, фільтрація рідини, то у математичній моделі явища з'являється так званий локальний час процесу. Локальний час випадкового процесу є чисто ймовірнісний об'єкт. Дослідження граничних теорем для стохастичних рівнянь з локальним часом є новим напрямом у сучасній теорії випадкових процесів.

Тому побудова методів дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних рівнянь із нерегулярними коефіцієнтами є актуальною проблемою.

З іншого боку, асимптотичні дослідження посідають провідне місце в дослідженнях з теорії ймовірностей. Встановлення у ХХ столітті зв'язків між задачами теорії стохастичних рівнянь із задачами в інших галузях математики, передусім теорії рівнянь в частинних похідних, дало потужний поштовх до розвитку та безліч різноманітних інструментів для досліджень в обох напрямках. Тому встановлення граничних результатів на кшталт закону великих чисел, центральної граничної теореми, принципу великих відхилень, слабкої збіжності розв'язків, закону повторного логарифму, для різноманітних класів випадкових процесів – це широке та плідне поле для дослідників в наш час.

Таким чином, встановлення граничних результатів для стохастичних рівнянь Іто та стохастичних рівнянь з локальним часом є цікавою та важливою задачею, розв'язання якої поширює математичні знання та надає інструменти для подальших досліджень.

Основним методом дослідження стохастичних рівнянь з локальним часом є використання зв'язку між цими рівняннями та стохастичними рівняннями Іто з розривними коефіцієнтами. Таким чином, доводиться досліджувати і часто встановлювати нові результати і для таких стохастичних рівнянь. В дослідженнях використовуються методи та методики з теорії випадкових процесів, теорії мартингалів, теорії стохастичних рівнянь Іто, теорій звичайних диференційних рівнянь та рівнянь в частинних похідних, теорії міри, функціонального аналізу та інших галузей сучасної математики.

РОЗДІЛ 3

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ

В даному розділі досліджується слабка збіжність розв'язків стохастичних рівнянь з локальним часом з коефіцієнтами, що залежать від малого параметра ε та, взагалі кажучи, з необмеженим за параметром ε коефіцієнтом зносу. Добре відомо [34], [92], що для слабкої збіжності розв'язків стохастичних рівнянь Іто слабкої збіжності коефіцієнтів рівнянь недостатньо. Необхідно накладати додаткові умови на коефіцієнт дифузії. Наприклад, в [92, теорема 11.3.3], припускається, що він задовольняє умові типу умови Ліпшиця.

В роботах Г. Л. Кулініча [30] та М. І. Портенка [45] розглядалися стохастичні рівняння Іто

$$x_\varepsilon(t) = x + \int_0^t b_\varepsilon(x_\varepsilon(s))ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(x_\varepsilon(s))dw(s).$$

В [30] встановлені необхідні та достатні умови слабкої збіжності визначених там функцій від розв'язків цих рівнянь до розв'язку стохастичного рівняння Іто та, в окремих випадках, для слабкої збіжності процесів x_ε до узагальнених дифузійних процесів. У [45, §3, розділ III] розглядається випадок $\sigma_\varepsilon(x) \equiv 1$ при слабкій збіжності функції $b_\varepsilon(x)$ до δ -функції, зосередженої у нулі. Доводиться слабка збіжність розв'язків x_ε до узагальненого дифузійного процесу. С. Я. Махно [40], [42] отримав умови слабкої збіжності мір, породжених розв'язками рівнянь Іто, до міри, породженої розв'язками стохастичного рівняння з локальним часом.

В даному розділі проведені дослідження в кількох напрямках. По-перше,

розглядаються рівняння з локальним часом. По-друге, коефіцієнти рівнянь можуть залежати від параметру ε довільним чином. Ця залежність може бути нерегулярною: не вимагається, що коефіцієнти повинні мати границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, в окремих точках вони можуть прямувати до нескінченності або не існувати взагалі.

3.1. Означення та умови

Для довільного неперервного семімартигалу $X(t)$ локальний час $L^X(t, a)$ в момент t в точці a визначається формулою Танака

$$L^X(t, a) = |X(t) - a| - |X(0) - 0| - \int_0^t \operatorname{sgn}(X(s) - a) dX(s).$$

Відмітимо наступну властивість локального часу. Для довільної вимірної функції $h(x)$, для якої наступні інтеграли мають сенс, має місце наступна рівність [90, VI, наслідок 1.6]:

$$\int_0^t h(X(s)) d\langle M \rangle_s = \int h(y) L^X(t, y) dy. \quad (3.1.1)$$

Тут $\langle M \rangle$ - неперервний зростаючий процес, асоційований з неперервним локальним мартигалом $M(t)$ із канонічного розкладу для неперервного семімартигалу $X(t)$.

Еквівалентним є наступне означення локального часу

$$L^X(t, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{(-\delta, \delta)}(X(s)) d\langle M \rangle_s.$$

Розглянемо одновимірне стохастичне рівняння з локальним часом

$$\xi(t) = x + \beta L^\xi(t, 0) + \int_0^t (b(\xi(s)) + g(\xi(s))) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s), \quad (3.1.2)$$

де β - стала, $b(x), g(x), \sigma(x)$ - вимірні функції.

Означення 3.1.1. Згідно [67, означення 4.7(1)], рівняння (3.1.2) має *слабкий розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $g(x)$ і $\sigma(x)$ та константи β існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ з потоком σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, неперервний семімартинал $(\xi(t), \mathcal{F}_t)$ і стандартний одновимірний вінеровський процес $(w(t), \mathcal{F}_t)$ такі, що

$$L^\xi(t, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{(-\delta, \delta)}(\xi(s)) \sigma^2(\xi(s)) ds \quad (3.1.3)$$

існує майже напевно і (3.1.2) виконується майже напевно.

Означення 3.1.2. [8, розділ IV, означення 1.4] Будемо говорити, що виконується умова *слабкої єдиності* (*єдиності за розподілами*, *єдиності в слабкому сенсі*) для рівняння (3.1.2), якщо для будь-яких двох розв'язків ξ та ξ' з однаковими початковими розподілами на \mathbb{R} співпадають закони розподілу процесів ξ та ξ' на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$.

Зауваження 3.1.1. Крім понять "слабкого розв'язку" та "слабкої єдиності" є ще поняття "сильного розв'язку" і "сильної єдиності". Їх ми наведемо пізніше, там, де будемо використовувати (в розділах 5 та 6, означення 5.1.1 та 6.3.1). Причому для сильних розв'язків поняття "слабкої єдиності" та "сильної єдиності" є еквівалентними (зауваження 6.3.1).

Будемо говорити, що розв'язки стохастичних рівнянь слабо збігаються, якщо слабо збігаються міри, породжені ними.

Розглянемо рівняння типу (3.1.2) з коефіцієнтами, що залежать від малого параметру.

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) = x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t (b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))) ds + \\ + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Нехай μ_ε - міра на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$, породжена процесом ξ_ε . Будемо дослід-

жувати слабку збіжність ξ_ε , тобто слабку збіжність мір μ_ε .

Введемо кілька умов.

Умова (I).

I_1 . Сталі $|\beta_\varepsilon| < 1$. При будь-якому $\varepsilon > 0$ існує слабкий розв'язок рівняння, єдиний в слабкому сенсі.

I_2 . Пара $(g_\varepsilon, a_\varepsilon) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, $a_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon^2(x)$.

I_3 . Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right| \leq \Lambda.$$

Для вимірних функцій $g(x)$, $a(x)$, $f(x)$ введемо такі умови.

Умова (II).

II_1 . Коефіцієнт при локальному часі за модулем менший 1.

II_2 . Функції $(g, a) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

Умова (III).

$$III_1. f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x \geq 0 \end{cases};$$

$$III_2. f_1(0) = f_2(0) = 0; f_1'(x) > 0, f_2'(x) > 0; f_1'(0) = f_1, f_2'(0) = f_2;$$

$$III_3. \text{Існують } f_1''(x), f_2''(x).$$

3.2. Гранична теорема для рівнянь Іто

Нехай випадковий процес $X(t)$ є розв'язком рівняння

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(X(s)) ds + \int_0^t \gamma(X(s)) dw(s). \quad (3.2.1)$$

Будемо вважати, що пара $(\alpha, \gamma^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, тоді згідно [67, теорема 4.35] рівняння (3.2.1) має єдиний слабкий розв'язок.

Для функції $h(x)$ через $Dh(x)$ позначимо її *симетричну похідну* :

$$Dh(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(x + \varepsilon) - h(x - \varepsilon)}{2\varepsilon} ;$$

а якщо

$$\int \frac{d^2 H(x)}{dx^2} h(x) dx = \int H(x) n_h(dx)$$

для будь-якої нескінченно диференційованої функції $H(x)$ з компактним носієм, то будемо називати $n_h(dx)$ другою похідною функції $h(x)$ в смислі розподілів.

Тоді для функції $f(x)$, для якої існують $Df(x)$ і $n_f(dx)$, та для неперервного семімартингала $X(t)$ з канонічним розкладом $X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$, де M - неперервний локальний мартингал, а A - неперервний процес скінченної варіації, має місце *формула Танака* [67, формула 4.3], яка узагальнює формулу Іто:

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t Df(X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int L^X(t, y) n_f(dy). \quad (3.2.2)$$

Нехай $u_i(x)$, $i = 1, 2$ - двічі диференційовані функції і $u_1(0) = u_2(0) = 0$, $u_1'(x) > 0$, $u_2'(x) > 0$. Визначимо функцію $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \leq 0, \\ u_2(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

Позначимо $u_i'(0) = u_i$, $v(x) = u^{-1}(x)$ Тоді маємо:

$$Du(x) = \frac{1}{2}(u_2'(x) + u_1'(x)) + \frac{1}{2}(u_2'(x) - u_1'(x)) \operatorname{sgn} x;$$

$$n_u(dx) = (u_2 - u_1) \delta_0(x) dx + A_u(x) dx;$$

де $A_u(x) = \frac{1}{2}[(u_2''(x) + u_1''(x)) + (u_2''(x) - u_1''(x))sgnx]$, $\delta_0(x)$ – δ -функція Дірака, що зосереджена в 0.

Лема 3.2.1. *Нехай $Y(t) = u(X(t))$. Тоді*

$$L^Y(t, 0) = \frac{u_1 + u_2}{2}L^X(t, 0), \quad (3.2.3)$$

$$Y(t) = Y(0) + \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}L^Y(t, 0) + \int_0^t \widehat{\alpha}(Y(s))ds + \int_0^t \widehat{\gamma}(Y(s))dw, \quad (3.2.4)$$

$$de \widehat{\alpha}(x) = Du(v(x))\alpha(v(x)) + \frac{1}{2}\gamma^2(v(x))A_u(v(x)), \quad \widehat{\gamma}(x) = Du(v(x))\gamma(v(x)).$$

□ Для функції $u(x)$, процесу $X(t)$ з формули Танака маємо :

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \left[Du(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))A_u(X(s)) \right] ds + \int_0^t Du(X(s))\gamma(X(s))dw + \frac{u_2 - u_1}{2}L^X(t, 0). \quad (3.2.5)$$

Враховуючи, що $X(s) = v(Y(s))$, (3.2.4) буде впливати з (3.2.5) і (3.2.3). Доведемо (3.2.3). Для цього застосуємо (3.2.2) до процесу (3.2.1) і функції $\bar{u}(x) = |u(x)|$. Маємо :

$$D\bar{u}(x) = \frac{1}{2}(u_2'(x) - u_1'(x)) + \frac{1}{2}(u_2'(x) + u_1'(x))sgnx;$$

$$n_{\bar{u}}(dx) = (u_2 + u_1)\delta_0(x)dx + \widehat{A}_u(x)dx;$$

тут $\widehat{A}_u(x) = \frac{1}{2}[(u_2''(x) - u_1''(x)) + (u_2''(x) + u_1''(x))sgnx]$. Підставляємо :

$$\begin{aligned} |Y(t)| &= |Y(0)| + \\ &+ \int_0^t \left[D\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\widehat{A}_u(X(s)) \right] ds + \\ &+ \int_0^t D\bar{u}(X(s))\gamma(X(s))dw + \frac{u_2 + u_1}{2}L^X(t, 0). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

З формул (3.2.2) і (3.2.6) отримаємо

$$\begin{aligned}
 L^Y(t, 0) &= \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \\
 &+ \int_0^t [D\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\widehat{A}_u(X(s))] ds + \\
 &+ \int_0^t D\bar{u}(X(s))\gamma(X(s)) dw - \int_0^t \operatorname{sgn} Y(s) dY(s).
 \end{aligned}$$

Останній інтеграл правої частини цієї рівності виразимо з (3.2.5) і врахуємо, що $\operatorname{sgn} X(s) = \operatorname{sgn} Y(s)$:

$$\begin{aligned}
 L^Y(t, 0) &= \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \\
 &+ \int_0^t [D\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\widehat{A}_u(X(s))] ds + \\
 &+ \int_0^t D\bar{u}(X(s))\gamma(X(s)) dw + \int_0^t \frac{u_2 - u_1}{2} \operatorname{sgn} X(s) L^X(ds, 0) - \quad (3.2.7) \\
 &- \int_0^t \operatorname{sgn} X(s) [Du(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))A_u(X(s))] ds - \\
 &- \int_0^t \operatorname{sgn} X(s) Du(X(s))\gamma(X(s)) dw.
 \end{aligned}$$

Оскільки функція $L^X(s, 0)$ зростає лише в тих точках, де $X(s) = 0$, то $\int_0^t \operatorname{sgn} X(s) L^X(ds, 0) = 0$. Групуючи доданки, продовжимо перетворення в (3.2.7):

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \left[D\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\widehat{A}_u(X(s)) - \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{sgn} X(s) \left[Du(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))A_u(X(s)) \right] \right] ds + \\
 &+ \int_0^t \left[D\bar{u}(X(s))\gamma(X(s)) - \operatorname{sgn} X(s) Du(X(s))\gamma(X(s)) \right] dw = \\
 &= \int_0^t \left[\alpha(X(s)) \left(\frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} + \frac{u_2'(X(s)) + u_1'(X(s))}{2} \operatorname{sgn} X(s) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{u_2'(X(s)) + u_1'(X(s))}{2} + \frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} \operatorname{sgn} X(s) \right) \operatorname{sgn} X(s) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \gamma^2(X(s)) \left\{ \left((u_2''(X(s)) - u_1''(X(s))) + (u_2''(X(s)) + u_1''(X(s))) \operatorname{sgn} X(s) \right) - \right. \\
& - \left. \left((u_2''(X(s)) + u_1''(X(s))) + (u_2''(X(s)) - u_1''(X(s))) \operatorname{sgn} X(s) \right) \right\} \operatorname{sgn} X(s) \Big] ds + \\
& + \int_0^t \gamma(X(s)) \left[\frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} + \frac{u_2'(X(s)) + u_1'(X(s))}{2} \operatorname{sgn} X(s) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{u_2'(X(s)) + u_1'(X(s))}{2} + \frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} \operatorname{sgn} X(s) \right) \operatorname{sgn} X(s) \right] dw = \\
& = \int_0^t \left(\alpha(X(s)) I_{\{0\}}(X(s)) \frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{4} \gamma^2(X(s)) I_{\{0\}}(X(s)) (u_2''(X(s)) - u_1''(X(s))) \right) ds + \\
& + \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) \frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} \gamma(X(s)) dw = \\
& = \frac{1}{4} \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) \gamma^2(X(s)) (u_2''(X(s)) - u_1''(X(s))) ds + \\
& + \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) \frac{u_2'(X(s)) - u_1'(X(s))}{2} dX(s) = \\
& = \frac{1}{4} \gamma^2(0) (u_2''(0) - u_1''(0)) \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) ds + \frac{u_2 - u_1}{2} \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) dX(s) = 0,
\end{aligned}$$

оскільки $\int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) dX(s) = 0$ (це випливає з [16, лема 5, стор. 590]), а також маємо :

$$\begin{aligned}
\int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) dX(s) &= \int_0^t I_{\{0\}}(X(s)) \frac{\alpha(X(s))}{\gamma^2(X(s))} \gamma^2(X(s)) ds = \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{\{0\}}(y) \frac{\alpha(y)}{\gamma^2(y)} L^X(t, y) dy = 0.
\end{aligned}$$

Перша рівність - це результат [90, стор. 217], а друга випливає з (3.1.1). ■

Для $|\beta| < 1$ введемо функцію

$$\kappa(x) = \begin{cases} (1 - \beta)x, & x \leq 0; \\ (1 + \beta)x, & x \geq 0 \end{cases}; \quad (3.2.8)$$

і $\varphi(x)$ - обернену до $\kappa(x)$. Будемо позначати :

$$\tilde{g}(x) = \frac{g(\kappa(x))}{1 + \beta \operatorname{sgn} x}, \quad \tilde{\sigma}(x) = \frac{\sigma(\kappa(x))}{1 + \beta \operatorname{sgn} x}, \quad \tilde{a}(x) = \tilde{\sigma}^2(x). \quad (3.2.9)$$

Розглянемо тепер два рівняння:

$$\xi(t) = x + \beta L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s), \quad (3.2.10)$$

$$\zeta(t) = \varphi(x) + \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s)) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) dw(s). \quad (3.2.11)$$

Відомо [11], що за умови II_2 рівняння (3.2.11) має слабко єдиний слабкий розв'язок. З леми 3.2.1 випливає наступна лема, що відіграє важливу роль в дослідженні стохастичних рівнянь з локальним часом.

Лема 3.2.2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (3.2.10) виконується умова (II). Тоді процес $\kappa(\zeta(t))$ є розв'язком рівняння (3.2.10).*

З лем 3.2.1 і 3.2.2 для введеної раніше (перед лемою 3.2.1) функції u випливає

Лема 3.2.3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (3.2.10) виконується умова (II). Тоді процес $\eta(t) = u(\xi(t))$ задовольняє рівнянню*

$$\begin{aligned} \eta(t) = & u(x) + \frac{u_2 - u_1 + \beta(u_2 + u_1)}{u_2 + u_1 + \beta(u_2 - u_1)} L^\eta(t, 0) + \\ & + \int_0^t g^*(\eta(s)) ds + \int_0^t \sigma^*(\eta(s)) dw(s), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

де

$$\begin{aligned} g^*(x) &= Du(u^{-1}(x))g(u^{-1}(x)) + \frac{\sigma^2(u^{-1}(x))}{2} A_u(u^{-1}(x)), \\ \sigma^*(x) &= Du(u^{-1}(x))\sigma(u^{-1}(x)). \end{aligned}$$

□ Зауважимо, що $\eta(t) = u(\xi(t)) = u(\kappa(\zeta(t))) = \tau(\zeta(t))$, де

$$\tau(x) = u(\kappa(x)) = \begin{cases} u_1((1 - \beta)x), & x \leq 0 \\ u_2((1 + \beta)x), & x \geq 0 \end{cases}.$$

Тоді $\tau_1(0) = \tau_2(0) = 0$; $\tau_1'(x) = (1 - \beta)u_1'((1 - \beta)x) > 0$, $\tau_2'(x) > 0$; $\tau_1'(0) = \tau_1 = (1 - \beta)u_1$, $\tau_2'(0) = \tau_2 = (1 + \beta)u_2$; існує $\tau^{-1}(x) = \varphi(u^{-1}(x))$; існують $\tau_1''(x)$, $\tau_2''(x)$.

Далі: $D\tau(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x) Du(\kappa(x))$; $A_\tau(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x)^2 A_u(\kappa(x))$; $n_\tau(dx) = (\tau_2 - \tau_1)\delta_0(x)dx + (1 + \beta \operatorname{sgn} x)^2 A_u(\kappa(x))dx$.

Отже, виконуються вимоги леми 3.2.1, застосованої до рівнянь (3.2.11) та (3.2.12) з функцією $\tau(x)$, звідки

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(x) &= D\tau(\tau^{-1}(x))\widetilde{g}(\tau^{-1}(x)) + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\tau^{-1}(x))A_\tau(\tau^{-1}(x)) = \\ &= (1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x))Du(\kappa(\tau^{-1}(x)))\frac{g(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x)} + \\ &+ \frac{\sigma^2(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{2(1 + \beta \operatorname{sgn}(\tau^{-1}(x)))^2}(1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x))^2 A_u(\kappa(\tau^{-1}(x))) = \\ &= Du(u^{-1}(x))g(u^{-1}(x)) + \frac{\sigma^2(u^{-1}(x))}{2}A_u(u^{-1}(x)) = g^*(x); \\ \widehat{\gamma}(x) &= D\tau(\tau^{-1}(x))\widetilde{\sigma}(\tau^{-1}(x)) = \\ &= (1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x))Du(\kappa(\tau^{-1}(x)))\frac{\sigma(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x)} = \\ &= Du(u^{-1}(x))\sigma(u^{-1}(x)) = \sigma^*(x). \end{aligned}$$

Застосувавши вказану лему 3.2.1, отримаємо твердження даної леми. ■

Розглянемо наступне рівняння Іто

$$v_\varepsilon(t) = x + \int_0^t (b_\varepsilon(v_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s))dw(s). \quad (3.2.13)$$

Нехай для коефіцієнтів (3.2.13) виконується умова (I); процесу v_ε на просторі $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$ відповідає міра ν_ε .

Введемо функції

$$F_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right\}, \quad f_\varepsilon(x) = \int_0^x F_\varepsilon(y) dy. \quad (3.2.14)$$

Оскільки $f_\varepsilon(x)$, як функція x , монотонно зростає, то вона має обернену функцію, яку будемо позначати $f_\varepsilon^{-1}(x)$. Припустимо, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x \geq 0 \end{cases}. \quad (3.2.15)$$

За умови I_3 границя в (3.2.15) існує рівномірно на компактах. Тоді рівномірно на компактах $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^{-1}(x) = f^{-1}(x)$ і $f^{-1}(x)$ є оберненою функцією до функції $f(x)$.

Гранична міра ν на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$ буде відповідати процесу

$$v(t) = x + \alpha L^v(t, 0) + \int_0^t g(v(s)) ds + \int_0^t \sigma(v(s)) dw(s). \quad (3.2.16)$$

Теорема 3.2.1. *Нехай для коефіцієнтів рівнянь (3.2.13), (3.2.16) та функції $f(x)$ з (3.2.15) виконуються умови (I), (II), (III) відповідно. Для того, щоб $\nu_\varepsilon \Rightarrow \nu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

- i)* $\alpha = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$;
- ii)* $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y) a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{a(y) Df(y)} dy$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;
- iii)* $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \left[\frac{g(y)}{a(y)} + \frac{1}{2} \frac{A_f(y)}{Df(y)} \right] dy$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай процес $\pi_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(v_\varepsilon(t))$ і ζ_ε - міра, що відповідає йому на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$. З формули Іто випливає, що процес $\pi_\varepsilon(t)$ задовольняє рівняння

$$\pi_\varepsilon(t) = \pi_\varepsilon(0) + \int_0^t \widehat{g}_\varepsilon(\pi_\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \widehat{\sigma}_\varepsilon(\pi_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (3.2.17)$$

Тут $\widehat{g}_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x)) g_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))$, $\widehat{\sigma}_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x)) \sigma_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))$. Нехай $\pi(t) = f(v(t))$ і ζ - міра, що відповідає π на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$.

Згідно [42, лема 5], треба перевірити, що умови $i)^*$, $ii)^*$, $iii)^*$ необхідні й достатні для слабкої збіжності мір ς_ε до міри ς . В силу умови (I) пара $(\widehat{g}_\varepsilon, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2) \in \mathcal{L}(k, K)$ з деякими константами k, K .

З леми 3.2.3 випливає, що процес $\pi(t) = f(v(t))$ задовольняє рівнянню (3.2.12) з відповідним виразом для коефіцієнта при локальному часі (з заміною констант u_1, u_2, β на f_1, f_2, α , відповідно):

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \pi(0) + \frac{f_2 - f_1 + \alpha(f_2 + f_1)}{f_2 + f_1 + \alpha(f_2 - f_1)} L^\pi(t, 0) + \int_0^t \widehat{g}(\pi(s)) ds + \int_0^t \widehat{\sigma}(\pi(s)) dw(s). \\ \widehat{g}(x) &= Df(f^{-1}(x))g(f^{-1}(x)) + \frac{\sigma^2(f^{-1}(x))}{2} A_f(f^{-1}(x)), \\ \widehat{\sigma}(x) &= Df(f^{-1}(x))\sigma(f^{-1}(x)). \end{aligned}$$

З іншого боку, з результатів роботи [40] випливає, що граничний процес для $\pi_\varepsilon(t)$ може бути лише розв'язком рівняння Іто, тобто з коефіцієнтом 0 при локальному часі. Звідси можемо отримати значення для константи α - тому виконується умова $i)^*$.

Враховуючи це, з [40, теорема 1] отримуємо, що наступні умови необхідні й достатні для збіжності $\varsigma_\varepsilon \Rightarrow \varsigma$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy &= \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))a_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))} dy = \int_0^{f_\varepsilon^{-1}(x)} \frac{1}{F_\varepsilon(z)a_\varepsilon(z)} dz \rightarrow \\ \rightarrow \int_0^{f^{-1}(x)} \frac{1}{Df(z)a(z)} dz &= \int_0^x \frac{1}{a(f^{-1}(y))[Df(f^{-1}(y))]^2} dy = \int_0^x \frac{1}{\widehat{\sigma}^2(y)} dy; \\ \int_0^x \frac{\widehat{g}_\varepsilon(y)}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy &= \int_0^x \frac{g_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))}{F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))a_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))} dy = \int_0^{f_\varepsilon^{-1}(x)} \frac{g_\varepsilon(z)}{a_\varepsilon(z)} dz \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^{f^{-1}(x)} \left[\frac{g(z)}{a(z)} + \frac{1}{2} \frac{A_f(z)}{Df(z)} \right] dz = \\ &= \int_0^x \left[\frac{g(f^{-1}(y))}{a(f^{-1}(y))} + \frac{1}{2} \frac{A_f(f^{-1}(y))}{Df(f^{-1}(y))} \right] \frac{dy}{Df(f^{-1}(y))} = \end{aligned}$$

$$= \int_0^x \left[\frac{g(f^{-1}(y))}{a(f^{-1}(y))Df(f^{-1}(y))} + \frac{1}{2} \frac{A_f(f^{-1}(y))}{[Df(f^{-1}(y))]^2} \right] dy = \int_0^x \frac{\widehat{g}(y)}{\widehat{\sigma}^2(y)} dy,$$

що еквівалентно умовам ii)*, iii)*. Теорему 3.2.1 доведено.

3.3. Гранична теорема для рівнянь з локальним часом

Розглядаємо рівняння з локальним часом (3.1.4). Нехай $\xi(t)$ буде слабким розв'язком рівняння

$$\xi(t) = x + \gamma L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \quad (3.3.1)$$

З [67, теорема 4.35] випливає, що в умовах наступної теореми рівняння (3.3.1) має слабо єдиний слабкий розв'язок. Позначимо міру, породжену процесом ξ на просторі $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$, через μ .

Теорема 3.3.1. *Нехай для коефіцієнтів рівнянь (3.1.4), (3.3.1) та функції $f(x)$ з (3.2.15) виконуються відповідно умови (I), (II), (III) і $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для того, щоб $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

- i) $\gamma = \frac{f_1 - f_2 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_1 - f_2)}$;
- ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y)a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{a(y)Df(y)} dy$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;
- iii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \left[\frac{g(y)}{a(y)} + \frac{1}{2} \frac{A_f(y)}{Df(y)} \right] dy$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Аналогічно формулам (3.2.8)-(3.2.9), для $|\beta_\varepsilon| < 1$ введемо функції

$$\kappa_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, \widetilde{g}_\varepsilon, \widetilde{\sigma}_\varepsilon, \widetilde{a}_\varepsilon: \kappa_\varepsilon(x) = \begin{cases} (1 - \beta_\varepsilon)x, & x \leq 0 \\ (1 + \beta_\varepsilon)x, & x \geq 0 \end{cases}; \quad \varphi_\varepsilon(x) - \text{обернена функція до}$$

$\kappa_\varepsilon(x)$,

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) = \frac{g_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}, \tilde{b}_\varepsilon(x) = \frac{b_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}, \tilde{\sigma}_\varepsilon(x) = \frac{\sigma_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}, \tilde{a}_\varepsilon(x) = \tilde{\sigma}_\varepsilon^2(x).$$

Введемо процес $\eta_\varepsilon(t)$ - розв'язок рівняння

$$\eta_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t \left(\tilde{b}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) + \tilde{g}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) \right) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) dw(s).$$

Позначимо $\tilde{F}_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{\tilde{b}_\varepsilon(y)}{\tilde{a}_\varepsilon(y)} dy \right\}$, $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_0^x \tilde{F}_\varepsilon(y) dy$. Тоді

$$\tilde{F}_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))}{a_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))} (1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} y) dy \right\} = F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x));$$

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_0^x \tilde{F}_\varepsilon(y) dy = \int_0^x F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y)) dy = \int_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{F_\varepsilon(z)}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} z} dz = \frac{f_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}.$$

З того що $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon = \beta$ і $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x \geq 0 \end{cases}$, маємо, що

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x} = \begin{cases} \frac{f_1(\kappa(x))}{1 - \beta}, & x \leq 0 \\ \frac{f_2(\kappa(x))}{1 + \beta}, & x \geq 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \tilde{f}_1(x), & x \leq 0 \\ \tilde{f}_2(x), & x \geq 0 \end{cases} = \tilde{f}(x). \end{aligned}$$

Значить:

$$\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = 0; \quad \tilde{f}_1'(x) = f_1'(\kappa(x)), \quad \tilde{f}_2'(x) = f_2'(\kappa(x)), \quad \tilde{f}_1'(0) = \tilde{f}_1' = f_1',$$

$$\tilde{f}_2'(0) = \tilde{f}_2' = f_2'; \quad \text{існують } \tilde{f}_1''(x) = (1 - \beta)f_1''(\kappa(x)), \quad \tilde{f}_2''(x) = (1 + \beta)f_2''(\kappa(x));$$

$$\text{існує } \tilde{f}^{-1}(x) = \varphi(f^{-1}(\kappa(x))).$$

Згідно з лемою 3.2.2, $\xi_\varepsilon(t) = \kappa_\varepsilon(\eta_\varepsilon(t))$ - розв'язок рівняння (3.1.4). З теореми 3.2.1 випливає, що ϑ_ε - міри, породжені η_ε , збігаються до ϑ - міри,

породженої η , при виконанні умов теореми 3.2.1 відносно коефіцієнтів $\eta(t)$, де $\eta(t)$ відповідно задовольняє рівнянню

$$\eta(t) = \varphi(x) + \alpha L^\eta(t, 0) + \int_0^t \tilde{g}(\eta(s)) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta(s)) dw(s).$$

Далі

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(x) &= \frac{\tilde{f}'_2(x) + \tilde{f}'_1(x)}{2} + \frac{\tilde{f}'_2(x) - \tilde{f}'_1(x)}{2} \operatorname{sgn} x = Df(\kappa(x)); \\ n_{\tilde{f}}(dx) &= (\tilde{f}'_2(0) - \tilde{f}'_1(0))\delta_0(x)dx + \frac{1}{2}A_{\tilde{f}}(x)dx = (f_2 - f_1)\delta_0(x)dx + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left((1 + \beta)f''_2(\kappa(x)) + (1 - \beta)f''_1(\kappa(x)) \right) + \right. \\ &+ \left. \left((1 + \beta)f''_2(\kappa(x)) - (1 - \beta)f''_1(\kappa(x)) \right) \operatorname{sgn} x \right] dx = \\ &= (f_2 - f_1)\delta_0(x)dx + \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn} x)}{2} A_f(\kappa(x))dx, \end{aligned}$$

звідки $A_{\tilde{f}}(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x)A_f(\kappa(x))$.

Отже з вимог теореми 3.3.1 випливає, що виконуються вимоги теореми 3.2.1. Тепер перевіримо, що з умов теореми 3.3.1 випливають умови **i)***, **ii)***, **iii)*** теореми 3.2.1. Маємо :

$$\mathbf{i)*} : \quad \alpha = \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2}{\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2};$$

Отже, умова **i)*** випливає з умови **i)**.

$$\begin{aligned} \mathbf{ii)*} : \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{\tilde{F}_\varepsilon(y)\tilde{a}_\varepsilon(y)} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{(1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} y)^2}{F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))a_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))} dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{(1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} z)}{F_\varepsilon(z)a_\varepsilon(z)} dz = (\text{як випливає з умови **ii)**) \\ &= \int_0^{\kappa(x)} \frac{1 + \beta \operatorname{sgn} y}{a(y)Df(y)} dy = \int_0^x \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn} z)^2}{a(\kappa(z))Df(\kappa(z))} dz = \int_0^x \frac{dz}{\tilde{a}(z)D\tilde{f}(z)}. \end{aligned}$$

Отже умова **ii)*** рівносильна умові **ii)**.

$$\begin{aligned}
\text{iii)*} : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\tilde{g}_\varepsilon(y)}{\tilde{a}_\varepsilon(y)} dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))(1 + \beta_\varepsilon \text{sgny})}{a_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))} dy = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{g_\varepsilon(z)}{a_\varepsilon(z)} dz = (\text{як впливає з iii}) = \int_0^{\kappa(x)} \left[\frac{g(y)}{a(y)} + \frac{1}{2} \frac{A_f(y)}{Df(y)} \right] dy = \\
&= \int_0^x \left[\frac{g(\kappa(z))}{a(\kappa(z))} + \frac{1}{2} \frac{A_f(\kappa(z))}{Df(\kappa(z))} \right] (1 + \beta \text{sgnz}) dz = \int_0^x \left[\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{a}(z)} + \frac{1}{2} \frac{A_{\tilde{f}}(z)}{D\tilde{f}(z)} \right] dz.
\end{aligned}$$

Отже умова iii)* рівносильна умові iii).

Таким чином, має місце твердження теореми 3.2.1 щодо умов слабкої збіжності мір, породжених процесами η_ε , до міри, породженої процесом η .

Далі, оскільки $\kappa_\varepsilon(x)$ і $\varphi_\varepsilon(x)$ збігаються рівномірно на компактах до їхніх відповідних границь $\kappa(x)$ і $\varphi(x)$, то $\xi(t) = \kappa(\eta(t))$ - граничний процес для $\xi_\varepsilon(t)$. Згідно лемі 3.2.2, $\eta(t) = \kappa_\alpha(\zeta(t))$, де

$$\kappa_\alpha(x) = \begin{cases} (1 - \alpha)x, & x \leq 0 \\ (1 + \alpha)x, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ і } \varphi_\alpha(x) - \text{обернена до } \kappa_\alpha(x), |\alpha| < 1; \text{ процес } \zeta(t)$$

задовольняє рівнянню

$$\zeta(t) = \varphi_\alpha(\varphi(x)) + \int_0^t g^*(\zeta(s)) ds + \int_0^t \sigma^*(\zeta(s)) dw(s),$$

$$\text{де } g^*(x) = \frac{\tilde{g}(\kappa_\alpha(x))}{1 + \alpha \text{sgnx}}; \sigma^*(x) = \frac{\tilde{\sigma}(\kappa_\alpha(x))}{1 + \alpha \text{sgnx}}.$$

Значить $\xi(t) = \kappa(\eta(t)) = \kappa(\kappa_\alpha(\zeta(t))) = \theta(\zeta(t))$, де

$$\theta(x) = \kappa(\kappa_\alpha(x)) = \begin{cases} (1 - \alpha)(1 - \beta)x, & x \leq 0 \\ (1 + \alpha)(1 + \beta)x, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ а обернена до неї функція}$$

$\theta^{-1}(x) = \varphi_\alpha(\varphi(x))$. Далі, $A_\theta(x) = 0$. Тоді, за лемою 3.2.1 будемо мати:

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \theta(\zeta(t)) = \\
&= \kappa(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(x)))) + \frac{(1 + \beta)(1 + \alpha) - (1 - \beta)(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + \alpha) + (1 - \beta)(1 - \alpha)} L^\xi(t, 0) +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t D\theta(\theta^{-1}(\xi(s)))g^*(\theta^{-1}(\xi(s)))ds + \int_0^t D\theta(\theta^{-1}(\xi(s)))\sigma^*(\theta^{-1}(\xi(s)))dw(s).$$

Далі врахуємо те, що $D\theta(x) = (1 + \alpha sgnx)(1 + \beta sgnx)$, використаємо властивості функцій θ^{-1} , \tilde{f}^{-1} і $A_{\tilde{f}}$ та підставимо функції g^* і σ^* . Будемо мати (для спрощення запису будемо писати під інтегралами ξ замість $\xi(s)$):

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}L^\xi(t, 0) + \\ &+ \int_0^t \left[(1 + \alpha sgn\xi)(1 + \beta sgn\xi) \frac{\tilde{g}(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(\xi))))}{1 + \alpha sgn\xi} \right] ds + \\ &+ \int_0^t (1 + \alpha sgn\xi)(1 + \beta sgn\xi) \frac{\tilde{\sigma}(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(\xi))))}{1 + \alpha sgn\xi} dw = \\ &= x + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}L^\xi(t, 0) + \int_0^t (1 + \beta sgn\xi)\tilde{g}(\varphi(\xi))ds + \int_0^t (1 + \beta sgn\xi)\tilde{\sigma}(\varphi(\xi))dw = \\ &= x + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s). \end{aligned}$$

Підставимо тепер значення коефіцієнту α , отримане з теореми 3.2.1 – $\alpha = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$ – в вираз $\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$ – отримуємо формулювання умови i):

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{f_1 - f_2 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_1 - f_2)}.$$

Остаточню граничний процес $\xi(t)$ має вигляд :

$$\xi(t) = x + \gamma L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s).$$

Теорему 3.3.1 доведено.

3.4. Приклад

Приклад. Дослідимо збіжність розв'язків стохастичних рівнянь :

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) = & x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) + \\ & + \int_0^t g\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) dw(s). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Припустимо, що $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і

$$\left| \int_0^x \frac{b(y)}{a(y)} dy \right| < Const, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{b(y)}{a(y)} dy = B_1, \quad \int_0^\infty \frac{b(y)}{a(y)} dy = B_2$$

та існують границі

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{g(y)}{a(y)} dy = A_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{a(y)} = A_2 > 0.$$

Тоді виконуються умови теореми 3.3.1 і

$$f_1 = \exp(2B_1), \quad f_2 = \exp(-2B_2), \quad \gamma = \frac{\beta + th(B_1 + B_2)}{1 + \beta th(B_1 + B_2)},$$

$$a(x) = \frac{1}{A_2}, \quad g(x) = \frac{A_1}{A_2}, \quad A_f(x) \equiv 0.$$

Тому граничним процесом для розв'язків (3.4.1) буде процес

$$\xi(t) = x + \frac{\beta + th(B_1 + B_2)}{1 + \beta th(B_1 + B_2)} L^\xi(t, 0) + \frac{A_1}{A_2} t + \frac{1}{\sqrt{A_2}} w(t). \quad (3.4.2)$$

Висновки до розділу 3. В даному розділі доведена слабка збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто або стохастичних рівнянь з локальним часом, коефіцієнти яких нерегулярно залежать від параметру, що прямує до нуля. Встановлені необхідні й достатні умови цієї збіжності. Виписані рівняння для граничних процесів.

РОЗДІЛ 4

ПРИНЦИП ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ ДЛЯ МІР, ПОРОДЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКАМИ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ

В даному розділі досліджуються принцип великих відхилень (означення дамо нижче в пункті 4.1) для мір, породжених розв'язками одновимірних стохастичних рівнянь з локальним часом та малою дифузиею виду

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \beta L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t b(\xi_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (4.0.1)$$

Якщо $\beta = 0$, то це рівняння перетворюється у рівняння Іто. Принцип великих відхилень $\{\xi_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ для рівнянь Іто – це добре відомий результат для різних класів коефіцієнтів. Так, для гладких коефіцієнтів це є результати класичної роботи А. Д. Вентцеля, М. І. Фрейдліна [9]. Декілька робіт різних авторів присвячено вивченню принципу великих відхилень для розв'язків стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами. В роботах Т. С. Чанга, С. Дж. Ш'ю [65], [66] було розглянуто d -вимірну дифузію з коефіцієнтами, які є неперервними всюди, за виключенням $(d - 1)$ -вимірної гіперплощини $\{x \in E_d : x_1 > 0\}$.

Для вивчення рівняння (4.0.1) для $\beta \neq 0$, будемо застосовувати метод, запропонований в роботах Х.-Й. Енгельберта, В. Шмідта [67, Proposition 4.9], Дж. М. Харрісона, Л. А. Шеппа [69], Ж.-Ф. Ле Галла [83, Proposition 2.2], С. Я. Махна [42], [85] за допомогою якого можна звести рівняння з локальним часом до рівняння Іто. Зауважимо, що навіть якщо коефіцієнти в рівнянні (4.0.1) є неперервними, коефіцієнти відповідного рівняння Іто, взагалі ка-

жучи, будуть розривними. Тому будемо використовувати ідеї, застосовані в роботах [65], [66]. Але для прямого застосування цих результатів необхідне існування двох обмежених похідних у коефіцієнтів рівняння. В пункті 4.3 ми ослабимо ці умови до умови Ліпшиця.

В даному розділі проведені дослідження в кількох напрямках. По-перше, від коефіцієнтів рівнянь Іто для обґрунтування принципу великих відхилень будемо вимагати умови Ліпшиця на півосях. По-друге, встановлено принцип великих відхилень для мір, породжених парою з розв'язку стохастичного рівнянь з локальним часом та з малим коефіцієнтом дифузії і часу знаходження цього розв'язку в додатній півплощині.

4.1. Означення та умови

Для коефіцієнтів рівняння (4.0.1) введемо наступну умову:

Умова (IV).

IV_1 . Константа $|\beta| < 1$.

IV_2 . Функції $b(x)$ і $\sigma(x)$ вимірні, $a(x) = \sigma^2(x)$ та $(b, a) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

IV_3 . Для функцій $b(x)$ і $a(x)$ має місце умова Ліпшиця на півосях $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$.

Зауважимо, що за умов IV_1 і IV_2 існує слабко єдиний слабкий розв'язок рівняння (4.0.1) [67, теорема 4.35].

Для функції $f \in \mathbb{C}[0, T]$ або $f \in \mathbb{C}[0, \infty)$ будемо писати $g \in H^+(f)$, якщо

g є абсолютно неперервною функцією з похідною $\dot{g}(t)$ такою, що

$$\dot{g}(t) \begin{cases} = 0, & \text{якщо } f(t) < 0, \\ = 1, & \text{якщо } f(t) > 0, \\ \in [0, 1], & \text{якщо } f(t) = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що з того, що $g \in H^+(f)$ випливає, що $g \in \mathbb{A}\mathbb{C}^+[0, \infty)$.

Означення 4.1.1. Нехай $(X, \mathcal{B}(X))$ - метричний простір з метрикою ρ та борелівською σ -алгеброю $\mathcal{B}(X)$. Функціонал $I(x) : X \rightarrow [0, \infty]$ називається *функціоналом дії*, якщо він напівнеперервний знизу, $I(x) \not\equiv \infty$ та такий, що для будь-якого $a > 0$ множина $\{x : I(x) \leq a\}$ є компактом.

Наведемо тепер означення принципу великих відхилень.

Нормуючим коефіцієнтом $k(\varepsilon)$ є така додатня функція, що $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k(\varepsilon) = +\infty$.

Означення 4.1.2. [9, стор.118] Будемо говорити, що сім'я ймовірнісних мір $\{\mu_\varepsilon\}, \varepsilon > 0$ на просторі X з борелівською σ -алгеброю $\mathcal{B}(X)$ задовольняє *принципу великих відхилень* з нормуючим коефіцієнтом $k(\varepsilon)$ та функціоналом дії $I(x)$, якщо виконуються наступні умови

а) для будь-якої відкритої множини $G \in \mathcal{B}(X)$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k(\varepsilon)} \ln \mu_\varepsilon(G) \geq -\inf\{I(x), x \in G\};$$

б) для будь-якої замкнутої множини $F \in \mathcal{B}(X)$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k(\varepsilon)} \ln \mu_\varepsilon(F) \leq -\inf\{I(x), x \in F\}.$$

В даному розділі нормуючий коефіцієнт дорівнює $k(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Сформулюємо *принцип стиснення* (contraction principle), який відіграє важливу роль в подальших дослідженнях.

Пропозиція 4.1.1. [9, теорема 5.3.1] Нехай міри $\{\mu_\varepsilon\}$ на просторі X , що породжені випадковими елементами $\{X_\varepsilon\}$, задовольняють принципу великих відхилень з функціоналом дії $I(x)$ і нехай $F(x)$ - неперервне відображення з X в X' . Тоді міри $\{\mu'_\varepsilon\}$ на X' , що породжені випадковими елементами $\{F(X_\varepsilon)\}$, задовольняють принципу великих відхилень з функціоналом дії

$$I'(x) = \inf_{y: F(y)=x} \{I(y)\}.$$

Відмітимо ще таку властивість, доведення якої належить О. М. Кулику:

Властивість 4.1.1. Для абсолютно неперервної функції $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $Leb\left(s \in [0, T] : \phi(s) = 0, \dot{\phi}(s) \neq 0\right) = 0$.

□ Доведення фактично повторює доведення [82, теорема 2.1]. Має місце наступний факт: для довільного $\varepsilon > 0$ існує функція $f_\varepsilon \in C^1([0, T])$ така, що

$$Leb\left(s \in [0, T] : f(s) \neq f_\varepsilon(s) \text{ або } f'(s) \neq f'_\varepsilon(s)\right) < \varepsilon.$$

Подальше доведення впливає з ряду загальних фактів з аналізу, наведених в [52], див. [82, лема 3.3] і міркування після неї. ■

Означення 4.1.3. Через $u_\varepsilon(t) = \int_0^t I_{(0, \infty)}(\xi_\varepsilon(s)) ds$ будемо позначати час знаходження (occupation time) процесу $\xi_\varepsilon(t)$ в додатній півплощині.

4.2. Принцип великих відхилень для мір, породжених розв'язками рівнянь Іто

Нехай $B_i(x)$, $i = 1, 2$, $x \in \mathbb{R}$ - вимірні обмежені функції, а B_3 - константа. Визначимо функцію

$$B(x) = \begin{cases} B_1(x), & \text{якщо } x < 0, \\ B_3, & \text{якщо } x = 0, \\ B_2(x), & \text{якщо } x > 0. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Визначимо процес $x_\varepsilon(t)$ як розв'язок стохастичного рівняння

$$x_\varepsilon(t) = x + \int_0^t B(x_\varepsilon(s))ds + \varepsilon w(t),$$

і покладемо $v_\varepsilon(t) = \int_0^t I_{(0,\infty)}(x_\varepsilon(s))ds = \int_0^t \dot{v}_\varepsilon(s)ds$. Будемо розглядати принцип великих відхилень для мір, породжених парою процесів $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$.

Визначимо функцію $\tilde{B}(x)$:

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} B_1(x), & \text{якщо } x \leq 0, \\ B_2(x), & \text{якщо } x > 0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

і розглянемо рівняння

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = x + \int_0^t \tilde{B}(\tilde{x}_\varepsilon(s))ds + \varepsilon w(t).$$

Нехай $\tilde{v}_\varepsilon(t) = \int_0^t I_{(0,\infty)}(\tilde{x}_\varepsilon(s))ds$.

Принцип великих відхилень на $[0, T]$ для пари $(\tilde{x}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$ було доведено в [65, теорема 2.1]. Беручи до уваги, що обидва процеси x_ε і \tilde{x}_ε проводять нульовий час в точці 0, то міри, породжені цими процесами на просторі $(\mathcal{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$ співпадають. Це означає, що принцип великих відхилень на $[0, T]$ для $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$

теж має місце. Однак, як вже було сказано на початку даного розділу, вимогою згаданої теореми є існування двох обмежених похідних функцій $B_i(x)$. Послабимо цю умову.

Теорема 4.2.1. *Нехай функція $B_1(x)$ задовольняє умову Ліпшиця при $x < 0$, і нехай $B_2(x)$ задовольняє умову Ліпшиця при $x > 0$. Тоді міра μ_ε , породжена парою процесів $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$, на просторі \mathbf{C}_∞ задовольняє принципу великих відхилень з функціоналом дії*

$$I_\infty^x(\phi, \psi) = \int_0^\infty M(\phi(s), \dot{\phi}(s), \dot{\psi}(s)) ds, \quad \text{де}$$

$$M(\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\dot{\phi} - B(\phi))^2, & \text{якщо } \phi(s) \neq 0 \\ \frac{1}{2}(B_2(0)\dot{\psi} + B_1(0)(1 - \dot{\psi}))^2, & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ і} \\ & B_1(0) > B_2(0) \\ \frac{1}{2}(B_2^2(0)\dot{\psi} + B_1^2(0)(1 - \dot{\psi})), & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ і} \\ & B_1(0) \leq B_2(0) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

для абсолютно неперервних функцій ϕ таких, що $\phi(0) = x$, $\int_0^\infty (\dot{\phi}(s))^2 ds < \infty$ та абсолютно неперервних функцій $\psi \in H^+(\phi)$, $\psi(0) = 0$. Для всіх інших пар (ϕ, ψ) покладемо $I_\infty^x(\phi, \psi) = \infty$.

Наслідок 4.2.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.2.1. Тоді міри ν_ε , породжені процесами x_ε , на просторі $\mathbf{C}[0, \infty)$ задовольняють принципу великих відхилень з функціоналом дії*

$$I^x(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) \neq 0\}} \left(\dot{\phi}(s) - B(\phi(s)) \right)^2 ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) = 0\}} \left(B_1^2(0) \wedge B_2^2(0) \right) \left(1 - I_{\{B_1(0) > 0 > B_2(0)\}} \right) ds \quad (4.2.4)$$

для абсолютно неперервних функцій ϕ таких, що $\phi(0) = x$, $\int_0^\infty (\dot{\phi}(s))^2 ds < \infty$ і $\int_0^\infty I_{\{\phi(s) = 0\}} ds < \infty$. Для усіх інших функцій ϕ покладемо $I^x(\phi) = \infty$.

Доведення теореми 4.2.1. Будемо в доведенні використовувати результати допоміжних лем, які для спрощення викладу сформулюємо і доведемо в наступному пункті.

Для доведення теореми достатньо показати, що [89, наслідок 3.4] :

- (i) Для будь-якого $a > 0$ множина $\{(\phi, \psi) : I(\phi, \psi) \leq a\}$ є компактною.
- (ii) Для будь-якого $R > 0$ існує компактна множина K така, що для будь-якого $\delta > 0$ і для достатньо малих ε

$$\mathbf{P}\left\{\|x_\varepsilon - \phi\|_T < \delta, \|v_\varepsilon - \psi\|_T < \delta\right\} \not\subseteq K \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{\|x_\varepsilon - \phi\|_T < \delta, \|v_\varepsilon - \psi\|_T < \delta\} = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{\|x_\varepsilon - \phi\|_T < \delta, \|v_\varepsilon - \psi\|_T < \delta\} = \\ & = -I_T(\phi, \psi) = \\ & = -\left(\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\phi}(s)|^2 ds - \int_0^T B(\phi(s)) \dot{\phi}(s) ds + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T [B_2^2(\phi(s)) - B_1^2(\phi(s))] \dot{\psi}(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^T B_1^2(\phi(s)) ds - \right. \\ & \quad \left. - \frac{((B_1(0) - B_2(0))^+)^2}{2} \int_0^T \dot{\psi}(s)(1 - \dot{\psi}(s)) ds\right). \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Умова (iii) є локальним принципом великих відхилень для мір μ_ε , породжених парою процесів $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$, на \mathbf{C}_T з функціоналом дії $I_T(\phi, \psi)$ для довільного $T > 0$. Умова (i) доведена в лемі 4.4.7. Доведемо умову (iii). Позначимо

$$y_\varepsilon(t) = x + \varepsilon w(t), \quad k_\varepsilon(t) = \int_0^t I_{(0, \infty)}(y_\varepsilon(s)) ds,$$

μ_{x_ε} і μ_{y_ε} - міри на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$, породжені процесом x_ε і y_ε відповідно.

За теоремою Гірсанова [1, теорема 4.2, стор. 34],

$$\ln \frac{d\mu_{x_\varepsilon}}{d\mu_{y_\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T B(y_\varepsilon(s))dw(s) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T B^2(y_\varepsilon(s))ds. \quad (4.2.6)$$

Перетворимо цей вираз. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^T B(y_\varepsilon(s))dw(s) &= \int_0^T [B_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + \\ &+ B_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s)) + (B_3(0) - B_1(0))I_{\{0\}}(y_\varepsilon(s))]dw(s). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Оскільки $\mathbb{E} \left(\int_0^T I_{\{0\}}(y(s))dw(s) \right)^2 = \int_0^T \mathbf{P}\{x + \varepsilon w(s) = 0\}ds = 0$, то з (4.2.7) будемо мати

$$\begin{aligned} \int_0^T B(y_\varepsilon(s))dw(s) &= \\ &= \int_0^T \left[B_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s)) \right] dw(s). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Аналогічним чином

$$\begin{aligned} \int_0^T B^2(y_\varepsilon(s))ds &= \\ &= \int_0^T \left[B_1^2(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2^2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s)) \right] ds. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

З (4.2.6), (4.2.8) та (4.2.9) отримуємо

$$\begin{aligned} \ln \frac{d\mu_{x_\varepsilon}}{d\mu_{y_\varepsilon}} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T [B_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))]dw(s) - \\ &- \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [B_1^2(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2^2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))]ds. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Перетворимо стохастичний інтеграл в (4.2.10) за формулою Танака (3.2.2). Покладемо $F(x) = \int_0^x B(y)dy$. Тоді

$$DF(x) = \begin{cases} B_1(x), & \text{якщо } x < 0, \\ \frac{B_1(0) + B_2(0)}{2}, & \text{якщо } x = 0, \\ B_2(x), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Використовуючи існування соболевських похідних (це випливає з умови Ліпшиця) функцій $B_i(x)$, отримуємо:

$$n_B(dx) = (B_2(0) - B_1(0))\delta_0(x)dx + [\dot{B}_1(x)I_{(-\infty,0]}(x) + \dot{B}_2(x)I_{(0,\infty)}(x)]dx$$

з дельта-функцією Дірака $\delta_0(x)$. Відповідно до формули Танака,

$$\begin{aligned} F(y_\varepsilon(T)) &= F(x) + \frac{B_2(0) - B_1(0)}{2}L^{y_\varepsilon}(T, 0) + \\ &+ \varepsilon \int_0^T [B_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))]dw(s) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T [\dot{B}_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + \dot{B}_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))]ds. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

З (4.2.10) і (4.2.11) випливає, що

$$\begin{aligned} \ln \frac{d\mu_{x_\varepsilon}}{d\mu_{y_\varepsilon}} &= \frac{1}{\varepsilon^2} [F(y_\varepsilon(T)) - F(x)] - \frac{B_2(0) - B_1(0)}{2\varepsilon^2} L^{y_\varepsilon}(T, 0) - \\ &- \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [B_1^2(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2^2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))]ds - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T [\dot{B}_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + \dot{B}_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))]ds. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

В силу (4.2.12) будемо мати, беручи до уваги те, що

$$\begin{aligned} F(\phi(T)) - F(\phi(0)) &= \int_0^T B(\phi(s))\dot{\phi}(s)ds : \\ \mathbf{P}\{||x_\varepsilon - \phi||_T < \delta, ||v_\varepsilon - \psi||_T < \delta\} &= \\ = \mathbf{E}I_{\{||y_\varepsilon - \phi||_T < \delta\}}(\omega)I_{\{||k_\varepsilon - \psi||_T < \delta\}}(\omega) \frac{d\mu_{x_\varepsilon}}{d\mu_{y_\varepsilon}} &= \\ = \mathbf{E}I_{\{||y_\varepsilon - \phi||_T < \delta\}}(\omega)I_{\{||k_\varepsilon - \psi||_T < \delta\}}(\omega) \times & \quad (4.2.13) \\ \times \exp \left\{ - \frac{B_2(0) - B_1(0)}{2\varepsilon^2} L^{y_\varepsilon}(T, 0) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T B(\phi(s))\dot{\phi}(s)ds - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [B_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) + B_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s)]ds \right\} J_\varepsilon, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon = & \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} [F(y_\varepsilon(T)) - F(\phi(T))] + \right. \\
& + \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [B_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) + B_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s)] ds - \\
& - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T [B_1^2(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2^2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))] ds - \\
& \left. - \frac{1}{2} \int_0^T [\dot{B}_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + \dot{B}_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))] ds \right\}.
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер J_ε детально. Позначимо

$$A_1 = F(y_\varepsilon(T)) - F(\phi(T)),$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & \int_0^T \left[B_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) + B_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s) - B_1^2(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) - \right. \\
& \left. - B_2^2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s)) \right] ds;
\end{aligned}$$

$$A_3 = - \int_0^T [\dot{B}_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + \dot{B}_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s))] ds.$$

$$\text{Зрозуміло, що } J_\varepsilon = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} A_1 + \frac{1}{2\varepsilon^2} A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right\}.$$

Для довільного $\gamma > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з умов $\|y_\varepsilon - \phi\|_T < \delta$, $\|k_\varepsilon - \psi\|_T < \delta$ та з умов теореми випливає (з деякою константою K)

$$|A_1| = |F(y_\varepsilon(T)) - F(\phi(T))| \leq K \|y_\varepsilon - \phi\|_T \leq \gamma.$$

Далі, за лемою 4.4.1 для довільного $\gamma > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що якщо $\|y_\varepsilon - \phi\|_T < \delta$, $\|k_\varepsilon - \psi\|_T < \delta$, то будемо мати

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \left| \int_0^T \left[B_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) + B_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s) \right] ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T \left[B_1^2(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + B_2^2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s)) \right] ds \right| = \\
&= \left| \int_0^T \left[B_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) + B_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s) \right] ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T \left[B_1^2(y_\varepsilon(s))(1 - \dot{k}_\varepsilon(s)) + B_2^2(y_\varepsilon(s))\dot{k}_\varepsilon(s) \right] ds \right| < \gamma.
\end{aligned}$$

За умовами теореми

$$|A_3| = \left| \int_0^T \left[\dot{B}_1(y_\varepsilon(s))I_{(-\infty,0]}(y_\varepsilon(s)) + \dot{B}_2(y_\varepsilon(s))I_{(0,\infty)}(y_\varepsilon(s)) \right] ds \right| \leq K.$$

Отже, на множині $\|y_\varepsilon - \phi\|_T < \delta$, $\|k_\varepsilon - \psi\|_T < \delta$, ми отримали

$$\exp \left\{ -\frac{\gamma}{\varepsilon^2} - K \right\} \leq J_\varepsilon \leq \exp \left\{ \frac{\gamma}{\varepsilon^2} + K \right\}. \quad (4.2.14)$$

З [65, лема 4.5 та формула (5.12)], випливає, що

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{E} I_{\|y_\varepsilon - \phi\|_T < \delta}(\omega) I_{\|k_\varepsilon - \psi\|_T < \delta}(\omega) \times \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{B_2(0) - B_1(0)}{2\varepsilon^2} L^{y_\varepsilon}(T, 0) \right\} = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{E} I_{\|y_\varepsilon - \phi\|_T < \delta}(\omega) I_{\|k_\varepsilon - \psi\|_T < \delta}(\omega) \times \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{B_2(0) - B_1(0)}{2\varepsilon^2} L^{y_\varepsilon}(T, 0) \right\} = \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\phi}(s)|^2 ds + \frac{((B_2(0) - B_1(0))^+)^2}{2} \int_0^T \psi(s)(1 - \psi(s)) ds. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

З (4.2.13)-(4.2.15) отримуємо (4.2.5).

Тепер доведемо умову (ii). Це є умовою *експоненційної щільності* (exponential tightness) [88, Розділ 3] (або *сильної щільності* (strong tightness) [89]) $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$ на просторі \mathbf{C}_T . Нагадаємо

Означення 4.2.1. [89, теорема 4.1] Сім'я процесів $(X_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))$ на просторі \mathbf{C}_T є *експоненційно щільною* (порядку ε^2), якщо для довільних $T > 0$, $\eta > 0$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P} \left(\| (X_\varepsilon, u_\varepsilon) \|_T > K \right) = -\infty, \quad (4.2.16)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \sup_{\theta \leq T} \mathbf{P} \left(\| (X_\varepsilon(\cdot + \theta), u_\varepsilon(\cdot + \theta)) - \right. \\ & \quad \left. - (X_\varepsilon(\theta), u_\varepsilon(\theta)) \|_\Delta > \eta \right) = -\infty. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Будемо користуватись нерівністю Чебишева

$$\mathbf{P}\left(|\xi(T)| > K\right) \leq \frac{1}{\varphi(K)} \mathbf{E}\varphi(\xi(T)) \quad (4.2.18)$$

для функції $\varphi(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2T\varepsilon^2}\right\}$.

Доведемо (4.2.16). З нерівностей

$$\sup_{t \leq T} |x_\varepsilon(t)| \leq |x| + \int_0^T |B(x_\varepsilon(s))| ds + \sup_{t \leq T} |\varepsilon w(t)|$$

та $\sup_{t \leq T} |v_\varepsilon(t)| = \int_0^T I_{(0,\infty)}(x_\varepsilon(s)) ds$, маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\|(x_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_T > K\right) &\leq \mathbf{P}\left(\frac{K}{2} < \sup_{t \leq T} |x_\varepsilon(t)|\right) + \mathbf{P}\left(\frac{K}{2} < \sup_{t \leq T} |v_\varepsilon(t)|\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\frac{K}{4} < |x| + \int_0^T |B(x_\varepsilon(s))| ds\right) + \mathbf{P}\left(\frac{K}{4} < \sup_{t \leq T} |\varepsilon w(t)|\right) + \\ &\quad + \mathbf{P}\left(\frac{K}{4} < \int_0^T I_{(0,\infty)}(x_\varepsilon(s)) ds\right). \end{aligned}$$

Позначимо останні три доданка через P_1 , P_2 і P_3 відповідно. Тоді, з умови (IV) і (4.2.18)

$$\begin{aligned} P_1 &\leq \exp\left\{-\frac{K^2}{32T\varepsilon^2}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{\frac{\left(|x| + \int_0^T |B(x_\varepsilon(s))| ds\right)^2}{2T\varepsilon^2}\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{\frac{16\left(|x| + \Lambda T\right)^2 - K^2}{32T\varepsilon^2}\right\}; \\ P_3 &\leq \exp\left\{-\frac{K^2}{32T\varepsilon^2}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{\frac{\left(\int_0^T I_{(0,\infty)}(x_\varepsilon(s)) ds\right)^2}{2T\varepsilon^2}\right\} \leq \exp\left\{\frac{16T^2 - K^2}{32T\varepsilon^2}\right\}. \end{aligned}$$

З [16, наслідок теореми 5, стор.173] маємо

$$P_2 = \mathbf{P}\left(\frac{K}{4} < \varepsilon\sqrt{T} \sup_{t \leq 1} |w(t)|\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{K}{4\sqrt{T}} < \varepsilon \sup_{t \leq 1} |w(t)|\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{K^2}{32T\varepsilon^2}\right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\|(x_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_T > K\right) \leq \\ & \leq \exp\left\{-\frac{K^2}{32T\varepsilon^2}\right\} \left(\exp\left\{\frac{16(|x| + \Lambda T)^2}{32T\varepsilon^2}\right\} + \exp\left\{\frac{16T^2}{32T\varepsilon^2}\right\} + 2\right); \\ & \lim_{K \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}\left(\|(x_\varepsilon, v_\varepsilon)\|_T > K\right) \leq \\ & \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \left(-\frac{K^2}{32T} + \frac{(|x| + \Lambda T)^2}{2T}\right) = -\infty. \end{aligned}$$

Таким чином (4.2.16) доведено.

Доведемо тепер (4.2.17). Аналогічно доведенню (4.2.16) отримуємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\|(x_\varepsilon(\cdot + \theta), v_\varepsilon(\cdot + \theta)) - (x_\varepsilon(\theta), v_\varepsilon(\theta))\|_\Delta > \eta\right) \leq \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq \Delta} \left| \int_\theta^{t+\theta} B(x_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon(w(t + \theta) - w(\theta)) \right| > \frac{\eta}{2}\right) + \\ & + \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq \Delta} \left| \int_\theta^{t+\theta} I_{(0, \infty)}(x_\varepsilon(s)) ds \right| > \frac{\eta}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_\theta^{\Delta+\theta} |B(x_\varepsilon(s))| ds > \frac{\eta}{4}\right) + \\ & + \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq \Delta} \left| \varepsilon \int_\theta^{t+\theta} dw(s) \right| > \frac{\eta}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\int_\theta^{\Delta+\theta} I_{(0, \infty)}(x_\varepsilon(s)) ds > \frac{\eta}{4}\right). \end{aligned}$$

Аналогічно до доведення (4.2.16), позначимо останні три доданки через P_4, P_5 і P_6 , відповідно. Тоді

$$P_4 \leq \exp\left\{\frac{16\Lambda^2\Delta^2 - \eta^2}{32\Delta\varepsilon^2}\right\}; P_6 \leq \exp\left\{\frac{16\Delta^2 - \eta^2}{32\Delta\varepsilon^2}\right\}.$$

З властивостей вінерівського процесу та з [16, наслідок теореми 5, стор.173], маємо

$$\begin{aligned} P_5 &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq \Delta} \left| \varepsilon \int_0^t dw(s) \right| > \frac{\eta}{4}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\varepsilon\sqrt{\Delta} \sup_{t \leq 1} \left| \int_0^t dw(s) \right| > \frac{\eta}{4}\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{\eta^2}{32\Delta\varepsilon^2}\right\}. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\|(x_\varepsilon(\cdot + \theta), v_\varepsilon(\cdot + \theta)) - (x_\varepsilon(\theta), v_\varepsilon(\theta))\|_\Delta > \eta\right) \leq \\
& \leq \exp\left\{-\frac{\eta^2}{32\Delta\varepsilon^2}\right\}\left(\exp\left\{\frac{\Lambda^2\Delta}{2\varepsilon^2}\right\} + \exp\left\{\frac{\Delta}{2\varepsilon^2}\right\} + 2\right); \\
\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \sup_{\theta \leq T} \mathbf{P}\left(\|(x_\varepsilon(\cdot + \theta), v_\varepsilon(\cdot + \theta)) - (x_\varepsilon(\theta), v_\varepsilon(\theta))\|_\Delta > \eta\right) & \leq -\frac{\eta^2}{32\Delta} + \frac{\Delta}{2}; \\
\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \sup_{\theta \leq T} \mathbf{P}\left(\|(x_\varepsilon(\cdot + \theta), v_\varepsilon(\cdot + \theta)) - (x_\varepsilon(\theta), v_\varepsilon(\theta))\|_\Delta > \eta\right) & \leq \\
& \leq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(-\frac{\eta^2}{32\Delta} + \frac{\Delta}{2}\right) = -\infty.
\end{aligned}$$

Отже, (4.2.17) доведено і ми довели експоненційну щільність $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$. Використовуючи результат [89, теорема 4.5],

$$\text{Принцип великих відхилень} \iff \begin{cases} \text{Експоненційна щільність} \\ \text{Локальний принцип} \\ \text{великих відхилень} \end{cases}$$

ми отримуємо функціонал дії в такій формі: $I_\infty^x(\phi, \psi) = \sup_T I_T(\phi, \psi)$.

Це означає, що міри μ_ε , породжені парою процесів $(x_\varepsilon, v_\varepsilon)$, задовольняють принципу великих відхилень на просторі \mathbf{C}_∞ з функціоналом дії $I_\infty^x(\phi, \psi) = \sup_T I_T(\phi, \psi)$, де $I_T(\phi, \psi)$ визначається формулою (4.2.5).

Розглянемо тепер три випадки: 1). $\phi(s) \neq 0$; 2). $\phi(s) = 0$ і $B_1(0) > B_2(0)$; 3). $\phi(s) = 0$ і $B_1(0) \leq B_2(0)$. Використовуючи властивість 4.1.1, отримаємо (4.2.3). *Теорему 4.2.1 доведено.*

Доведення наслідку 4.2.1. З (4.2.3) за принципом стиснення маємо

$$I^x(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) \neq 0\}} \left(\dot{\phi}(s) - B(\phi(s))\right)^2 ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \inf_{\psi \in H^+(\phi)} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) > B_2(0)\}} \left(B_2(0)\dot{\psi}(s) + B_1(0)(1 - \dot{\psi}(s)) \right)^2 ds \right) + \\
& + \inf_{\psi \in H^+(\phi)} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) \leq B_2(0)\}} \left(B_2^2(0)\dot{\psi}(s) + B_1^2(0)(1 - \dot{\psi}(s)) \right) ds \right).
\end{aligned}$$

Розглянемо два останні доданки докладно. За лемою 4.4.6 отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \inf_{\psi \in H^+(\phi)} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) > B_2(0)\}} \left(B_2(0)\dot{\psi}(s) + B_1(0)(1 - \dot{\psi}(s)) \right)^2 ds \right) = \\
& = \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left(B_2(0)a + B_1(0)(1 - a) \right)^2 \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) > B_2(0)\}} ds = \\
& = \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left((B_2(0)a + B_1(0)(1 - a))^2 I_{\{B_1(0) \leq 0\}} \right) \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) > B_2(0)\}} ds + \\
& + \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left((B_2(0)a + B_1(0)(1 - a))^2 I_{\{B_2(0) \geq 0\}} \right) \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) > B_2(0)\}} ds + \\
& + \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left((B_2(0)a + B_1(0)(1 - a)) I_{\{B_1(0) > 0 > B_2(0)\}} \right)^2 \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) > B_2(0)\}} ds.
\end{aligned}$$

В першому і другому випадках ми досягаємо інфімум при $a = 0$ і $a = 1$, відповідно. Ці два випадки можна об'єднати таким чином:

$$\inf_{a \in [0,1]} \left(B_2(0)a + B_1(0)(1 - a) \right)^2 = B_1^2(0) \wedge B_2^2(0).$$

В третьому випадку ми досягаємо інфімум при $a = \frac{-B_1(0)}{B_2(0) - B_1(0)} \in [0, 1]$, і цей інфімум рівний 0.

Аналогічно

$$\begin{aligned}
& \inf_{\psi \in H^+(\phi)} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) \leq B_2(0)\}} \left(B_2^2(0)\dot{\psi}(s) + B_1^2(0)(1 - \dot{\psi}(s)) \right) ds \right) = \\
& = \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left((B_2^2(0)a + B_1^2(0)(1 - a)) I_{\{B_2(0) \leq 0\}} \right) \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) \leq B_2(0)\}} ds + \\
& + \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left((B_2^2(0)a + B_1^2(0)(1 - a)) I_{\{B_1(0) \geq 0\}} \right) \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) \leq B_2(0)\}} ds + \\
& + \frac{1}{2} \inf_{a \in [0,1]} \left((B_2^2(0)a + B_1^2(0)(1 - a)) I_{\{B_1(0) < 0 < B_2(0)\}} \right) \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{B_1(0) \leq B_2(0)\}} ds.
\end{aligned}$$

Тут ми досягаємо інфімум в першому випадку при $a = 1$, в другому - при $a = 0$, і в третьому випадку або при $a = 1$ (якщо $B_2^2(0) \leq B_1^2(0)$) або при $a = 0$ (якщо $B_2^2(0) > B_1^2(0)$). Всі три випадки можна об'єднати таким чином:

$$\inf_{a \in [0,1]} \left(B_2^2(0)a + B_1^2(0)(1-a) \right) = B_1^2(0) \wedge B_2^2(0).$$

Отже,

$$I^x(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) \neq 0\}} \left(\dot{\phi}(s) - B(\phi(s)) \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) = 0\}} \left(1 - I_{\{B_1(0) > 0 > B_2(0)\}} \right) (B_1^2(0) \wedge B_2^2(0)) ds.$$

Після простих перетворень отримаємо (4.2.4). *Наслідок 4.2.1 доведено.*

Розглянемо тепер розв'язки рівняння

$$\zeta_\varepsilon(t) = x + \int_0^t B(\zeta_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t r(\zeta_\varepsilon(s)) w(t), \quad (4.2.19)$$

де функція $B(x)$ має вигляд (4.2.1), і функція $r(x)$ має таку ж будову, тобто

$$r(x) = \begin{cases} r_1(x), & \text{якщо } x < 0, \\ r_3, & \text{якщо } x = 0, \\ r_2(x), & \text{якщо } x > 0, \end{cases} \quad (4.2.20)$$

де $r_i(x), i = 1, 2, x \in \mathbb{R}$, - обмежені вимірні функції, а r_3 - константа. Аналогічними міркуваннями, як перед теоремою 4.2.1, приходимо до висновку, що можемо вважати функції $B(x)$ і $r(x)$ такими, що мають вигляд функції $\tilde{B}(x)$ з (4.2.2). Тоді аналогічно [66, розділ 4], зробимо випадкову заміну часу. Позначимо $z_\varepsilon(t) = \int_0^t I_{(0,\infty)}(\zeta_\varepsilon(s)) ds$ та доведемо наступну теорему.

Теорема 4.2.2. *Нехай для процесу (4.2.19) мають місце наступні вимоги: $r^2(x) \geq \lambda > 0$; для функцій $B_i(x)$ та $r_i^2(x), i = 1, 2$, виконується умова Літшиця на півосях $(-\infty, 0)$ (для $i = 1$) і $(0, +\infty)$ (для $i = 2$). Тоді міри μ_ε , породжені процесами $(\zeta_\varepsilon, z_\varepsilon)$, на просторі \mathbf{C}_∞ задовольняють принцип*

великих відхилень з функціоналом дії $I_\infty^z(\phi, \psi) = \int_0^\infty N(\phi(s), \dot{\phi}(s), \dot{\psi}(s))ds$, де

$$N(\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\left(\dot{\phi}(s) - B(\phi(s))\right)^2}{r^2(\phi(s))}, & \text{якщо } \phi(s) \neq 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\left(B_2(0)\dot{\psi}(s) + B_1(0)(1 - \dot{\psi}(s))\right)^2}{r_2^2(0)\dot{\psi}(s) + r_1^2(0)(1 - \dot{\psi}(s))}, & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ і} \\ & \frac{B_1(0)}{r_1^2(0)} > \frac{B_2(0)}{r_2^2(0)}, \\ \frac{1}{2} \frac{\left(B_2^2(0)\dot{\psi}(s) + \frac{B_1^2(0)}{r_1^2(0)}(1 - \dot{\psi}(s))\right)}{r_2^2(0)\dot{\psi}(s) + \frac{B_1^2(0)}{r_1^2(0)}(1 - \dot{\psi}(s))}, & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ і} \\ & \frac{B_1(0)}{r_1^2(0)} \leq \frac{B_2(0)}{r_2^2(0)}, \end{cases} \quad (4.2.21)$$

для абсолютно неперервних функцій ϕ таких, що $\phi(0) = x$, $\int_0^\infty \dot{\phi}^2(s)ds < \infty$, і функцій $\psi \in H^+(\phi)$ таких, що $\psi(0) = 0$. Для всіх інших пар (ϕ, ψ) покладемо $I_\infty^z(\phi, \psi) = \infty$.

Доведення теореми 4.2.2. Аналогічно доведенню теореми 4.2.1 перевіримо виконання умов (i)–(iii) [89, наслідок 3.4]. Для цього функціоналу дії умова (i) доведена в лемі 4.4.8. Далі, покладемо

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(t) &= \int_0^t r^2(\zeta_\varepsilon(s))ds, \\ \beta(t) &= \int_0^t \left(r_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s) + r_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) \right) ds, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

і $\gamma_\varepsilon(t)$ та $\gamma(t)$ – відповідно обернені до них функції (вони існують, оскільки $\beta_\varepsilon(t)$ та $\beta(t)$ монотонно зростають).

Для $\zeta_\varepsilon(t)$ зробимо випадкову заміну часу. Маємо $\zeta_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(t)) = \pi_\varepsilon(t)$ або $\zeta_\varepsilon(t) = \pi_\varepsilon(\beta_\varepsilon(t))$, де

$$\pi_\varepsilon(t) = x + \int_0^t \frac{B(\pi_\varepsilon(s))}{r^2(\pi_\varepsilon(s))} ds + \varepsilon \hat{w}(s), \quad (4.2.23)$$

де $\hat{w}(s)$ – інший вінерівський процес.

$$\text{Тепер позначимо } z_\varepsilon^\pi(t) = \int_0^t I_{(0, \infty)}(\pi_\varepsilon(s)) ds.$$

За аналогією з [66, розділ 4], покладемо

$$\begin{aligned}\phi^\pi(t) &= \phi(\gamma(t)) ; & \dot{\phi}^\pi(t) &= \dot{\phi}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \frac{\dot{\phi}(\gamma(t))}{\dot{\beta}(\gamma(t))} ; \\ \psi^\pi(t) &= \int_0^{\gamma(t)} \dot{\psi}(s)r_2^2(\phi(s))ds = \int_0^t \dot{\psi}(\gamma(s))r_2^2(\phi(\gamma(s)))\dot{\gamma}(s)ds ; & (4.2.24) \\ \dot{\psi}^\pi(t) &= \dot{\psi}(\gamma(t))r_2^2(\phi(\gamma(t)))\dot{\gamma}(t) = \dot{\psi}(\gamma(t))\frac{r_2^2(\phi(\gamma(t)))}{\dot{\beta}(\gamma(t))} .\end{aligned}$$

Позначимо $D(x) = \frac{B(x)}{r^2(x)}$. Тоді

$$D(x) = \begin{cases} D_1(x) = \frac{B_1(x)}{r_1^2(x)}, & \text{якщо } x < 0, \\ D_3 = \frac{B_3}{r_3^2}, & \text{якщо } x = 0, \\ D_2(x) = \frac{B_2(x)}{r_2^2(x)}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Використовуючи (4.2.3), можемо встановити принцип великих відхилень на просторі \mathbf{C}_∞ для мір μ_ε^π , породжених процесами $(\pi_\varepsilon, z_\varepsilon^\pi)$, з функціоналом дії $I_\infty^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi)$:

$$\begin{aligned}I_\infty^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi) &= \int_0^\infty N^\pi(\phi^\pi, \dot{\phi}^\pi, \dot{\psi}^\pi)ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi^\pi(s) \neq 0\}} \left(\dot{\phi}^\pi(s) - D(\phi^\pi(s)) \right)^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi^\pi(s)=0\}} I_{\{D_1(0) > D_2(0)\}} \left(D_2(0)\dot{\psi}^\pi(s) + D_1(0)(1 - \dot{\psi}^\pi(s)) \right)^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi^\pi(s)=0\}} I_{\{D_1(0) \leq D_2(0)\}} \left(D_2^2(0)\dot{\psi}^\pi(s) + D_1^2(0)(1 - \dot{\psi}^\pi(s)) \right)^2 ds.\end{aligned} \quad (4.2.25)$$

В силу леми 4.4.5, для довільного $T > 0$ будемо мати

$$\begin{aligned}I_T^\zeta(\phi, \psi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{\|\zeta_\varepsilon - \phi\|_T < \delta, \|z_\varepsilon - \psi\|_T < \delta\} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{\|\pi_\varepsilon - \phi^\pi\|_{\beta(T)} < \delta, \|z_\varepsilon^\pi - \psi^\pi\|_{\beta(T)} < \delta\} = I_{\beta(T)}^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi).\end{aligned}$$

Використовуючи цей результат та леми 4.4.10 і 4.4.11, за [89, теорема 4.5] отримаємо:

$$\begin{aligned}
 I_\infty^\zeta(\phi, \psi) &= \sup_T I_T^\zeta(\phi, \psi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{ \|\zeta_\varepsilon - \phi\|_\infty < \delta, \|z_\varepsilon - \psi\|_\infty < \delta \} = \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{ \|\pi_\varepsilon - \phi^\pi\|_\infty < \delta, \|z_\varepsilon^\pi - \psi^\pi\|_\infty < \delta \} = \\
 &= \sup_{\beta(T)} I_{\beta(T)}^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi) = I_\infty^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi).
 \end{aligned}$$

Значить міри μ_ε , породжені процесами $(\zeta_\varepsilon, z_\varepsilon)$, задовольняють принципу великих відхилень на просторі $\mathbb{C}[0, \infty) \times \mathbb{AC}^+[0, \infty)$ з функціоналом дії $I_\infty^\zeta(\phi, \psi) = I_\infty^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi)$.

Використовуючи формули (4.2.24) та (4.2.25) і виконуючи заміну в інтегралах, отримаємо явну форму $I_\infty(\phi, \psi)$:

$$\begin{aligned}
 I_\infty^\zeta(\phi, \psi) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) \neq 0\}} \frac{\left(\dot{\phi}(s) - B(\phi(s)) \right)^2}{r^2(\phi(s))} ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) = 0\}} I_{\left\{ \frac{B_1(0)}{r_1^2(0)} > \frac{B_2(0)}{r_2^2(0)} \right\}} \left(\frac{B_2(0)}{r_2^2(0)} \dot{\psi}(s) \frac{r_2^2(0)}{\dot{\beta}(0)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B_1(0)}{r_1^2(0)} \left(1 - \dot{\psi}(s) \frac{r_2^2(0)}{\dot{\beta}(0)} \right) \right)^2 \dot{\beta}(0) ds + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) = 0\}} I_{\left\{ \frac{B_1(0)}{r_1^2(0)} \leq \frac{B_2(0)}{r_2^2(0)} \right\}} \left(\frac{B_2^2(0)}{r_2^4(0)} \dot{\psi}(s) \frac{r_2^2(0)}{\dot{\beta}(0)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B_1^2(0)}{r_1^4(0)} \left(1 - \dot{\psi}(s) \frac{r_2^2(0)}{\dot{\beta}(0)} \right) \right)^2 \dot{\beta}(0) ds.
 \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Використовуючи (4.2.22), отримаємо (4.2.21). *Теорему 4.2.2 доведено.*

4.3. Принцип великих відхилень для мір, породжених розв'язками рівнянь з локальним часом

Розглянемо стохастичне рівняння з локальним часом

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \beta L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t b(\xi_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (4.3.1)$$

Основним результатом даного розділу є наступна теорема.

Теорема 4.3.1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (4.3.1) має місце умова (IV). Тоді міра μ_ε , породжена парю процесів $(\xi_\varepsilon, u_\varepsilon)$, на просторі \mathbb{C}_∞ задовольняє принципу великих відхилень з функціоналом дії*

$$I_\infty(\phi, \psi) = \int_0^\infty L(\phi(s), \dot{\phi}(s), \dot{\psi}(s)) ds, \quad de$$

$$L(\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(\dot{\phi} - b(\phi))^2}{\sigma^2(\phi)}, & \text{якщо } \phi(s) \neq 0, \\ \frac{1}{2} \frac{b^2(0)}{\sigma^2(0)} \frac{(1 + \beta - 2\beta\dot{\psi})^2}{(1 + \beta)^2 - 4\beta\dot{\psi}}, & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ i } \beta b(0) < 0, \\ \frac{1}{2} \frac{b^2(0)}{\sigma^2(0)}, & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ i } \beta b(0) \geq 0, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

для абсолютно неперервних функцій ϕ таких, що $\phi(0) = x$, $\int_0^\infty (\dot{\phi}(s))^2 ds < \infty$, $\psi \in H^+(\phi)$, $\psi(0) = 0$; та $I_\infty(\phi, \psi) = \infty$ інакше.

Наслідок 4.3.1. *Нехай виконуються умови теореми 4.3.1. Тоді міри ν_ε , породжені процесами ξ_ε , на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$ задовольняють принципу великих відхилень з функціоналом дії $I(\phi) = \int_0^\infty L(\phi(s), \dot{\phi}(s)) ds$, де*

$$L(\phi(s), \dot{\phi}(s)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(\dot{\phi}(s) - b(\phi(s)))^2}{\sigma^2(\phi(s))}, & \text{якщо } \phi(s) \neq 0, \\ \frac{1}{2} \frac{b^2(0)}{\sigma^2(0)} (1 - \beta^2), & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ i } \beta b(0) < 0, \\ \frac{1}{2} \frac{b^2(0)}{\sigma^2(0)}, & \text{якщо } \phi(s) = 0 \text{ i } \beta b(0) \geq 0, \end{cases} \quad (4.3.3)$$

для абсолютно неперервних функцій ϕ таких, що $\phi(0) = x$ і $\int_0^\infty (\dot{\phi}(s))^2 ds < \infty$ і $\int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{\beta b(0)<0\}} ds < \infty$; та $I(\phi) = \infty$ для інших функцій ϕ .

Доведення теореми 4.3.1. Аналогічно доведенню теореми 4.2.1 будемо доводити умови (i)–(iii) [89, наслідок 3.4].

Умова (i) для даного функціонала дії доведена в лемі 4.4.9.

Далі, розглянемо рівняння (4.3.1). За формулами (3.2.8)–(3.2.9) введемо функції $\kappa(x)$, обернену до неї функцію $\varphi(x)$, функції $\tilde{b}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$, та розглянемо стохастичне рівняння Іто

$$\eta_\varepsilon(t) = \varphi(x) + \int_0^t \tilde{b}(\eta_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (4.3.4)$$

Рівняння (4.3.4) має слабкий розв'язок згідно [11] та за лемою 3.2.2 процес $\xi_\varepsilon(t) = \kappa(\eta_\varepsilon(t))$ є розв'язком рівняння (4.3.4). Варто зауважити, що функції $\tilde{b}(x)$ та $\tilde{\sigma}(x)$ мають вигляд функцій $B(x)$ з (4.2.1) та $r(x)$ з (4.2.20).

Для процесу $\eta_\varepsilon(t)$ позначимо його час знаходження в додатній півплощині через

$$v_\varepsilon(t) = \int_0^t I_{(0,\infty)}(\eta_\varepsilon(s)) ds.$$

Тоді можемо застосувати теорему 4.2.2. За нею можемо встановити принцип великих відхилень на просторі \mathbf{C}_∞ для мір μ_ε^η , породжених порою процесів $(\eta_\varepsilon, v_\varepsilon)$ та отримати за формулою (4.2.21) для них функціонал дії $I_\infty^\eta(\phi^\eta, \psi^\eta) = \int_0^\infty L_2(\phi^\eta(s), \dot{\phi}^\eta(s), \dot{\psi}^\eta(s)) ds$, де

$$L_2(\phi^\eta, \dot{\phi}^\eta, \dot{\psi}^\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(\dot{\phi}^\eta - \tilde{b}(\phi^\eta))^2}{\tilde{\sigma}^2(\phi^\eta)}, & \text{якщо } \phi^\eta(s) \neq 0, \\ \frac{1}{2} \frac{(\tilde{b}_2(0)\dot{\psi}^\eta + \tilde{b}_1(0)(1 - \dot{\psi}^\eta))^2}{\tilde{\sigma}_2^2(0)\dot{\psi}^\eta + \tilde{\sigma}_1^2(0)(1 - \dot{\psi}^\eta)}, & \text{якщо } \phi^\eta(s) = 0 \text{ і } \frac{\tilde{b}_1(0)}{\tilde{\sigma}_1^2(0)} > \frac{\tilde{b}_2(0)}{\tilde{\sigma}_2^2(0)}, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\tilde{b}_2^2(0)}{\tilde{\sigma}_2^2(0)} \dot{\psi}^\eta + \frac{\tilde{b}_1^2(0)}{\tilde{\sigma}_1^2(0)} (1 - \dot{\psi}^\eta) \right], & \text{якщо } \phi^\eta(s) = 0 \text{ і } \frac{\tilde{b}_1(0)}{\tilde{\sigma}_1^2(0)} \leq \frac{\tilde{b}_2(0)}{\tilde{\sigma}_2^2(0)}, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Оскільки $\xi_\varepsilon(t) = \kappa(\eta_\varepsilon(t))$ або $\eta_\varepsilon(t) = \varphi(\xi_\varepsilon(t))$ та

$$\psi^\eta(t) = \int_0^t I_{(0,\infty)}(\phi^\eta(s)) ds = \int_0^t I_{(0,\infty)}(\varphi(\phi(s))) ds = \int_0^t I_{(0,\infty)}(\phi(s)) ds = \psi(t),$$

то за принципом стиснення будемо мати:

$$I_\infty(\phi, \psi) = \min \{ I_\infty^\eta(\phi^\eta, \psi^\eta) : \phi^\eta = \varphi(\phi), \psi^\eta = \psi \} = I_\infty^\eta(\varphi(\phi), \psi).$$

Тут $I_\infty(\phi, \psi)$ - це функціонал дії для мір μ_ε , породжених процесами $(\xi_\varepsilon, u_\varepsilon)$.

Нарешті з формул для функцій $\tilde{b}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$ та (4.3.5) після приведення подібних отримуємо твердження теореми. *Теорему 4.3.1 доведено.*

Доведення наслідку 4.3.1. З (4.3.2) за принципом стиснення (пропозиція 4.1.1) будемо мати:

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s) \neq 0\}} \frac{(\dot{\phi}(s) - b(\phi(s)))^2}{\sigma^2(\phi(s))} ds + \\ &+ \inf_{\psi \in H^+(\phi)} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{\beta b(0) < 0\}} \frac{b^2(0) (1 + \beta - 2\beta \dot{\psi}(s))^2}{\sigma^2(0) (1 + \beta)^2 - 4\beta \dot{\psi}(s)} ds \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{\beta b(0) \geq 0\}} \frac{b^2(0)}{\sigma^2(0)} ds. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер другий доданок. За лемою 4.4.6 отримуємо

$$\inf_{\psi \in H^+(\phi)} \frac{1}{2} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{\beta b(0) < 0\}} \frac{b^2(0) (1 + \beta - 2\beta \dot{\psi}(s))^2}{\sigma^2(0) (1 + \beta)^2 - 4\beta \dot{\psi}(s)} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \inf_{0 \leq a \leq 1} \frac{(1 + \beta - 2\beta a)^2}{(1 + \beta)^2 - 4\beta a} \int_0^\infty I_{\{\phi(s)=0\}} I_{\{\beta b(0) < 0\}} \frac{b^2(0)}{\sigma^2(0)} ds.$$

Інфімум досягається в $a = \frac{1 + \beta}{2\beta}$, що $\in [0, 1]$ при $|\beta| < 1$. Тоді після простих перетворень можемо отримати (4.3.3). *Наслідок 4.3.1 доведено.*

4.4. Допоміжні лема

Лема 4.4.1. [65, Лема 6.7]. *Нехай $f(x)$ - це функція, така що*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{якщо } x \leq 0, \\ f_2(x), & \text{якщо } x > 0, \end{cases} \text{ де } f_1(x) \text{ і } f_2(x) \text{ - обмежені та неперервні. Тоді}$$

відображення

$$(\varphi, \psi) \rightarrow \int_0^T \left(f_2(\varphi(t))\dot{\psi}(t) + f_1(\varphi(t))(1 - \dot{\psi}(t)) \right) dt$$

неперервне на множині $\{(\varphi, \psi) : \varphi \in \mathbb{C}[0, T], \psi \in H^+(\varphi)\}$.

Чотири наступні лема виконуються за умови Ліпшиця аналогічно лемам 4.1 - 4.4 з [66].

Лема 4.4.2. *Для довільного $\gamma > 0$ існує δ_0 таке, що якщо*

$$\|\zeta_\varepsilon - \phi\|_T < \delta_0, \|z_\varepsilon - \psi\|_T < \delta_0,$$

тоді $|\beta_\varepsilon(t) - \beta(t)| < \gamma$ для всіх $t \in [0, T]$ і $|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma(t)| < \gamma$ для всіх $t \in [0, \beta(T) - \gamma]$ і $\varepsilon > 0$.

□ За лемою 4.4.1, для довільного $\gamma > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що якщо $\|\zeta_\varepsilon - \phi\|_T < \delta_0$ і $\|z_\varepsilon - \psi\|_T < \delta_0$, будемо мати

$$\begin{aligned} |\beta_\varepsilon(t) - \beta(t)| &= \left| \int_0^t \left(r_2^2(\zeta_\varepsilon(s))\dot{z}_\varepsilon(s) + r_1^2(\zeta_\varepsilon(s))(1 - \dot{z}_\varepsilon(s)) \right) ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left(r_2^2(\phi(s))\dot{\psi}(s) + r_1^2(\phi(s))(1 - \dot{\psi}(s)) \right) ds \right| < \gamma. \end{aligned}$$

Твердження лема для $\gamma_\varepsilon(t)$ і $\gamma(t)$ можна довести так само. ■

Лема 4.4.3. Для довільних $T > 0$ та $\gamma > 0$ існує δ_0 таке, що $\|z_\varepsilon^\pi - \psi^\pi\|_{\beta(T)-\gamma} \leq \gamma$ для всіх ε , якщо $\|\zeta_\varepsilon - \phi\|_T < \delta$, $\|z_\varepsilon - \psi\|_T < \delta$, $\delta < \delta_0$.

Лема 4.4.4. Для довільних $T > 0$ та $\gamma > 0$ існує θ_0 таке, що для $\theta < \theta_0$ має місце $\|\zeta_\varepsilon - \phi\|_{T-\delta} \leq \delta$ і $\|z_\varepsilon - \psi\|_{T-\delta} \leq \delta$, якщо $\|\pi_\varepsilon - \phi^\pi\|_{\beta(T)-\theta} < \theta$, $\|z_\varepsilon^\pi - \psi^\pi\|_{\beta(T)-\theta} < \theta$.

З лем 4.4.2, 4.4.3 та 4.4.4 маємо:

Лема 4.4.5. Для введених в формулах (4.2.21) та (4.2.25) функцій $N^\pi(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $I_\infty^\pi(x, y)$ і $I_\infty^\zeta(x, y)$ мають місце рівності:

$$N^\pi(\phi^\pi(s), \dot{\phi}^\pi(s), \dot{\psi}^\pi(s)) = N\left(\phi(\gamma(t)), \dot{\phi}(\gamma(t)), \dot{\psi}(\gamma(t))\right)\dot{\gamma}(t);$$

$$I^\pi(\phi^\pi, \psi^\pi) = I^\zeta(\phi, \psi).$$

Лема 4.4.6. Для обмежених функцій $f(s) \geq 0$ і $g(s) \geq 0$ таких, що $\int_0^\infty f(s)ds < \infty$, маємо:

$$\inf_{\psi \in \mathbb{A}C^+[0, \infty]} \int_0^\infty f(s)g(\dot{\psi}(s))ds = \inf_{a \in [0, 1]} g(a) \int_0^\infty f(s)ds. \quad (4.4.1)$$

□ З одного боку, $\inf_{a \in [0, 1]} g(a) \leq g(\dot{\psi}(s))$,

$$\int_0^\infty f(s) \inf_{a \in [0, 1]} g(a)ds \leq \int_0^\infty f(s)g(\dot{\psi}(s))ds. \quad (4.4.2)$$

З іншого, позначимо $\bar{g} = \inf_{a \in [0, 1]} g(a)$. Тоді, для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує $\dot{\psi}_\varepsilon(t) \in [0, 1]$ така, що

$$g(\dot{\psi}_\varepsilon(s)) \leq \bar{g} + \varepsilon$$

і

$$\int_0^\infty f(s)g(\dot{\psi}_\varepsilon(s))ds \leq \int_0^\infty f(s)\bar{g}ds + \varepsilon \int_0^\infty f(s)ds.$$

Таким чином, оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним,

$$\int_0^\infty f(s)g(\psi_\varepsilon(s))ds \leq \int_0^\infty f(s)\bar{g}ds = \inf_{a \in [0,1]} g(a) \int_0^\infty f(s)ds. \quad (4.4.3)$$

З (4.4.2) та (4.4.3) отримуємо (4.4.1). ■

Лема 4.4.7. *Нехай функціонал $I(\phi, \psi) = \int_0^\infty M(\phi(s), \dot{\phi}(s), \dot{\psi}(s))ds$ визначений в теоремі 4.2.1. Тоді для довільного $a > 0$ множина $A(a) = \{(\phi, \psi) : I(\phi, \psi) \leq a\}$ є компактною.*

□ Оскільки простір \mathbf{C}_∞ є повним, достатньо довести

- 1) напівнеперервність знизу $I(\phi, \psi)$ на \mathbf{C}_∞ ;
- 2) відносну компактність $A(a)$.

В нашому випадку:

1) впливає з [65, лема 6.3];

2) впливає з теореми Арцела-Асколі [71, теорема VI.1.5]: $A(a)$ є відносно компактною тоді і лише тоді, коли

- (i) $\sup_{(x,y) \in A(a)} |x(0), y(0)| < \infty$;
- (ii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{(x,y) \in A(a)} \sup_{s,t \in [0,T]; |s-t| < \delta} |(x(t), y(t)) - (x(s), y(s))| = 0$ для всіх $T > 0$.

Можна показати, що обидві ці умови виконуються. ■

Лема 4.4.8. *Нехай функціонал $I(\phi, \psi) = \int_0^\infty N(\phi(s), \dot{\phi}(s), \dot{\psi}(s))ds$ визначений в теоремі 4.2.2. Тоді для довільного $a > 0$ множина $A(a) = \{(\phi, \psi) : I(\phi, \psi) \leq a\}$ є компактною.*

□ Подібно до попередньої леми:

- 1) впливає з [65, лема 6.3] та [66, лема 3.9];
- 2) доводиться аналогічно як і в лемі 4.4.7. ■

Лема 4.4.9. *Нехай функціонал $I(\phi, \psi) = \int_0^\infty L(\phi(s), \dot{\phi}(s), \dot{\psi}(s))ds$ визначений в теоремі 4.3.1. Тоді для довільного $a > 0$ множина*

$A(a) = \{(\phi, \psi) : I(\phi, \psi) \leq a\}$ є компактною.

□ Твердження даної леми випливає з леми 4.4.8 та принципу стиснення [9, теорема 5.3.1]. ■

Доведення наступних двох лем подібне до доведення рівностей (4.2.16) та (4.2.17).

Лема 4.4.10. *Сім'я процесів $(\zeta_\varepsilon, z_\varepsilon)$ є експоненційно щільною на просторі \mathbf{C}_T для всіх $T > 0$.*

Лема 4.4.11. *Сім'я процесів $(\pi_\varepsilon, z_\varepsilon^\pi)$ є експоненційно щільною на просторі \mathbf{C}_T для всіх $T > 0$.*

Висновки до розділу 4. В даному розділі доведені принципи великих відхилень на просторі \mathbf{C}_∞ для мір, породжених парою з розв'язку стохастичного рівняння Іто з розривними коефіцієнтами та з малим коефіцієнтом дифузії і часу знаходження цього розв'язку в додатній півплощині, і для мір, породжених парою з розв'язку стохастичного рівнянь з локальним часом та малим коефіцієнтом дифузії і часу знаходження цього розв'язку в додатній півплощині. Знайдені функціонали дії.

Також доведені принципи великих відхилень на просторі $\mathbf{C}[0, \infty)$ для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами та малим коефіцієнтом дифузії і для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом та з малим коефіцієнтом дифузії. Знайдені функціонали дії.

РОЗДІЛ 5

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ЗАКОН ТИПУ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ КОСОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Функціональний закон повторного логарифма для вінерівського процесу було доведено у відомій роботі В. Штрассена [91]. Для більш загальних, ніж корінь з повторного логарифма, нормуючих функцій, варіант цього закону було запропоновано А. В. Булінським [7]. Функціональний закон повторного логарифма для розв'язків стохастичних рівнянь Іто з періодичними коефіцієнтами, що залежать від стрибкового процесу, встановив С. Я. Махно [84].

В даному розділі розглядається косий броунівський рух, визначений К. Іто і Х. Маккіном [70] і побудований у зв'язку з Феллерівською класифікацією одновимірних дифузійних процесів у термінах еліптичних диференціальних операторів другого порядку. В подальшому косий броунівський рух розглядався у багатьох роботах. Відзначимо роботи Дж. М. Харрісона, Л. А. Шешпа [69] та Ж.-Ф. Ле Галл [83], у яких цей процес пов'язаний із розв'язком стохастичного рівняння з локальним часом. У роботах [41], [67], [83] запропоновані формули, які пов'язують розв'язки стохастичних рівнянь з локальним часом із розв'язками рівнянь Іто.

В даному розділі доводиться функціональний закон повторного логарифма для косоного броунівського руху. Використовуємо підхід роботи [41].

5.1. Означення та позначення

Отже, в даному розділі будемо розглядати косий броунівський рух як розв'язок стохастичного рівняння з локальним часом виду

$$\xi(t) = x + \beta L^\xi(t, 0) + w(t), t \in [0, 1]. \quad (5.1.1)$$

Означення 5.1.1. Рівняння (5.1.1) має *сильний розв'язок*, якщо на заданому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ з потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]$ та заданим стандартним одновимірним вінерівським процесом $(w(t), \mathcal{F}_t)$, існує неперервний семімартинал $(\xi(t), \mathcal{F}_t)$ такий, що симетричний локальний час

$$L^\xi(t, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{(-\delta, \delta)}(\xi(s)) ds \quad (5.1.2)$$

існує майже напевно (м.н. - в подальшому) і (5.1.1) виконується м.н.

При $|\beta| \leq 1$ рівняння (5.1.1) має єдиний сильний розв'язок [69].

Розглядаємо простір $\mathbb{C}[0, 1]$; \mathcal{C}_1 - борелівська σ -алгебра його елементів.

Будемо позначати через

$$H^2[0, 1] = \left\{ f : f(t) - \text{абсолютно неперервна}, t \in [0, 1] \text{ і } \int_0^1 |f'(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Визначимо Φ - клас зростаючих функцій $\phi(T)$, таких, що

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \phi(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi(T)}{\sqrt{T}} = 0.$$

Всюди в подальшому будемо використовувати позначення $\psi(T) = \phi(T)\sqrt{T}$.

Далі введемо функціонал

$$J^*(\phi, h, c) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{-h\phi^2(c^k)}{2} \right\}, \quad c > 1.$$

Зауважимо, що якщо $J^*(\phi, h, c_0) < \infty$ для якогось $c_0 > 1$, то $J^*(\phi, h, c) < \infty$ для всіх $c > 1$.

Для кожної $\phi \in \Phi$ визначимо

$$G^2(\phi) = \inf\{h > 0 : J^*(\phi, h, c) < \infty\} \quad (5.1.3)$$

($G^2(\phi) = \infty$, якщо не існує $h < \infty$ такого, що $J^*(\phi, h, c) < \infty$). Всюди в тексті цього розділу G , G^2 чи $G^2(\cdot)$ визначається формулою (5.1.3).

5.2. Функціональний закон повторного логарифма для рівнянь Іто

Розглянемо стохастичне рівняння Іто

$$\eta(t) = y + \int_0^t \sigma(\eta(s))dw(s), \quad t \in [0, 1], \quad (5.2.1)$$

де

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1(x), & \text{якщо } x < 0, \\ \sigma_3, & \text{якщо } x = 0, \\ \sigma_2(x), & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

де $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ —двічі диференційовні функції відповідно на півосях $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$ з обмеженими першими похідними. Позначимо

$$P_1 = \min\{\min_{x < 0} \sigma_1^2(x), \min_{x > 0} \sigma_2^2(x), \sigma_3^2\}, \quad P_2 = \max\{\max_{x < 0} \sigma_1^2(x), \max_{x > 0} \sigma_2^2(x), \sigma_3^2\}, \quad (5.2.2)$$

та припустимо, що для деякого $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda} \leq P_1, \quad P_2 \leq \lambda. \quad (5.2.3)$$

Коефіцієнт дифузії рівняння (5.2.1) є розривною функцією обмеженої варіації і з теореми роботи [87] впливає існування для нього єдиного сильного розв'язку.

Введемо великий параметр T і розглянемо процес

$$\eta_T(t) = \frac{\eta(Tt) - y}{\sqrt{T}\phi(T)} = \frac{1}{\sqrt{T}\phi(T)} \int_0^{Tt} \sigma(\eta(s))dw(s), \quad t \in [0, 1].$$

Позначимо

$$L(f(s), \dot{f}(s)) = \frac{\dot{f}^2(s)}{\sigma^2(f(s))} \quad (5.2.4)$$

та визначимо функціонал

$$J(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 L(f(t), \dot{f}(t)) dt, & \text{якщо } f \in H^2[0, 1], f(0) = 0, \\ +\infty, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Далі, нехай $\mathcal{K}_D = \left\{ f \in \mathbb{C}[0, 1] : f(0) = 0; J(f) \leq \frac{D^2}{2} \right\}$. Якщо $D^2 = \infty$, то $\mathcal{K}_\infty = \{ f \in \mathbb{C}[0, 1] : f(0) = 0 \}$.

Лема 5.2.1. *Міри $\{\nu^T\}$, що породжені процесами $\{\eta_T(t)\}$, на просторі $(\mathbb{C}[0, 1], \mathcal{C}_1)$ задовольняють ПБВ з нормуючим коефіцієнтом $\phi^2(T)$ та функціоналом дії $J(\phi)$.*

□ Твердження цієї леми впливає з [66, теорема Б], (де $\varepsilon = \frac{1}{\phi(T)}$), використовуючи властивість 4.1.1 та те, що вказаний (в теоремі Б) інфімум (рівний 0) досягається при $\rho = 0$ або $\rho = 1$. ■

Введемо послідовність функцій $z_k(t) = \eta_{c^k}(t)$. Тобто

$$z_k(t) = \frac{1}{\psi(c^k)} \int_0^{c^k t} \sigma(\eta(s)) dw(s).$$

Позначимо $u(t) = \int_0^t \sigma(\eta(s)) dw(s)$, тоді

$$z_k(t) = \frac{u(c^k t)}{\psi(c^k)}.$$

Теорема 5.2.1. *Нехай $\phi \in \Phi$, G задається (5.1.3). Тоді при $T \rightarrow \infty$ послідовність $\{\eta_T(t)\}$ має в $\mathbb{C}[0, 1]$ множину граничних точок, що співпадає з \mathcal{K}_G м.н.*

Доведення теореми 5.2.1. Доведемо в три стандартні етапи.

1 Етап. Доведемо, що для $G^2(\phi) < \infty$, будь-якого $c > 1$ і будь-якого

$\varepsilon > 0$ існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ м.н.

$$\rho(z_k, \mathcal{K}_G) < \varepsilon.$$

Зауважимо, що множина $\{f : J(f) \leq a\}$ є компактною в $\mathbb{C}[0, 1]$ для будь-якого $a < \infty$. Позначимо $N_\varepsilon = \{f : \rho(f, \mathcal{K}_G) \geq \varepsilon\}$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що

$$\inf_{f \in N_\varepsilon} J(f) \geq \frac{G^2(\phi)}{2} + \delta.$$

За лемою 5.2.1, для послідовності $\{\eta_T(t)\}$ має місце принцип великих відхилень. Тому, використовуючи означення принципу великих відхилень (пункт б) з означення 4.1.2), для великих k маємо

$$\mathbb{P}\{z_k \in N_\varepsilon\} \leq \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2} + \delta\right)\right\}.$$

Означення $G^2(\phi)$ та лема Бореля-Кантеллі дають нам доведення Етапу 1.

2 Етап. Для $G^2(\phi) < \infty$ доведемо, що кожна гранична точка послідовності $\{\eta_T(t)\}$ м.н. є елементом \mathcal{K}_G . Якщо $\{T\} = \{c^k\}$, то це впливає з Етапу 1. Нехай тепер $T \in [c^k, c^{k+1}]$. Оскільки функція $\psi(T)$ по T не спадає, то можемо записати таку рівність:

$$\frac{1}{\psi(T)} = \frac{\alpha(T, k)}{\psi(c^k)} + \frac{\beta(T, k)}{\psi(c^{k+1})}, \quad (5.2.5)$$

де $\alpha(T, k) \geq 0$, $\beta(T, k) \geq 0$ і $\alpha(T, k) + \beta(T, k) = 1$. Позначимо

$$\widehat{\eta}_{T,k}(t) = \alpha(T, k)z_k(t) + \beta(T, k)z_{k+1}(t).$$

Твердження Етапу 2 буде доведеним, якщо ми доведемо наступну оцінку: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $c_\varepsilon > 1$ і k_0 таке, що для будь-яких $k > k_0$ і $c \in (1, c_\varepsilon)$ м.н.

$$\sup_{t \in [0, 1], T \in [c^k, c^{k+1}]} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| < \varepsilon. \quad (5.2.6)$$

З означення послідовності $\{\eta_T(t)\}$ і (5.2.5) маємо:

$$\eta_T(t) = z_k\left(t\frac{T}{c^k}\right)\frac{\psi(c^k)}{\psi(T)} = \alpha(T, k)z_k\left(t\frac{T}{c^k}\right) + \beta(T, k)z_{k+1}\left(t\frac{T}{c^{k+1}}\right).$$

Зауважимо, що для великих k і для будь-яких δ функції $z_k, z_{k+1} \in \{f : \rho(f, \mathcal{K}_G) < \delta\}$. Тоді

$$\begin{aligned} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| &\leq \alpha(T, k)\left|z_k(t) - z_k\left(t\frac{T}{c^k}\right)\right| + \beta(T, k)\left|z_{k+1}(t) - z_{k+1}\left(t\frac{T}{c^{k+1}}\right)\right|, \\ \sup_{t \in [0,1], T \in [c^k, c^{k+1}]} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| &\leq \sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| + \\ &+ \sup_{t \in [0,1], s \in [t/c, t]} |z_{k+1}(t) - z_{k+1}(s)|. \end{aligned}$$

З цього маємо наступні нерівності:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in [0,1], T \in [c^k, c^{k+1}]} |\eta_T(t) - \widehat{\eta}_{T,k}(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq \\ &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \\ &+ \mathbb{P}\left\{\sup_{t \in [0,1], s \in [t/c, t]} |z_{k+1}(t) - z_{k+1}(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Для оцінки ймовірностей в правій частині (5.2.7) скористаємось

Пропозиція 5.2.1. [7, лема 2] *Існує стала C така, що при всіх $0 \leq a < b < \infty$, $h \leq b - a$ і будь-яких $x > 0$ має місце*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{a \leq t, s \leq b; |t-s| \leq h} |w(s) - w(t)| > x\sqrt{h}\right) \leq \frac{C(b-a)}{hx} \exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}.$$

Отже, з новим вінерівським процесом $\widetilde{w}(t) = \frac{w(c^k t)}{\sqrt{c^k}}$ маємо:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} \left|\int_t^s \sigma(\eta(c^k u)) d\widetilde{w}(u)\right| \geq \frac{\phi(c^k)\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Зробимо тепер випадкову заміну часу. Введемо функцію

$$\tau(u) = \int_0^u \sigma^2(\eta(c^k s)) ds,$$

і нехай $\gamma(u)$ - обернена до $\tau(u)$. З означення зрозуміло, що $\gamma(u)$ і $\tau(u)$ - монотонно зростаючі функції, $\gamma(0) = \tau(0) = 0$. Далі, майже всюди існують похідні

$$\tau'(u) = \sigma^2(\eta(c^k u)), \quad \gamma'(u) = \frac{1}{\tau'(\gamma(u))} = \frac{1}{\sigma^2(\eta(c^k \gamma(u)))}.$$

Використовуючи (5.2.3) маємо оцінки:

$$P_1 u \leq \tau(u) \leq P_2 u, \quad \frac{1}{P_2} u \leq \gamma(u) \leq \frac{1}{P_1} u.$$

Тоді, згідно зі зробленою заміною, отримаємо з новим вінеровським процесом $\hat{w}(t)$:

$$\int_t^s \sigma(\eta(c^k u)) d\tilde{w}(u) = \hat{w}(\gamma(s)) - \hat{w}(\gamma(t)).$$

Далі,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} \left| \int_t^s \sigma(\eta(c^k u)) d\tilde{w}(u) \right| \geq \frac{\phi(c^k) \varepsilon}{2} \right\} = \\ & = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |\hat{w}(\gamma(s)) - \hat{w}(\gamma(t))| \geq \frac{\phi(c^k) \varepsilon}{2} \right\} = \\ & = \mathbf{P} \left\{ \sup_{\gamma(t) \in [\gamma(0), \gamma(1)], \gamma(s) \in [\gamma(t), \gamma(ct \wedge 1)]} |\hat{w}(\gamma(s)) - \hat{w}(\gamma(t))| \geq \frac{\phi(c^k) \varepsilon}{2} \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{u, v \in [0, P_2], |v-u| \leq P_2 \frac{c-1}{c}} |\hat{w}(v) - \hat{w}(u)| \geq \frac{\phi(c^k) \varepsilon}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, в силу пропозиції 5.2.1

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{u, v \in [0, P_2], |v-u| \leq P_2 \frac{c-1}{c}} |\hat{w}(v) - \hat{w}(u)| \geq \frac{\phi(c^k) \varepsilon \sqrt{c} \sqrt{P_2(c-1)}}{2 \sqrt{P_2(c-1)} \sqrt{c}} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2CP_2\sqrt{c}}{\phi(c^k)\varepsilon\sqrt{P_2(c-1)}} \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)\varepsilon^2c}{16P_2(c-1)}\right\}.$$

Ми скористалися тим, що

$$|v - u| \leq \gamma(ct \wedge 1) - \gamma(t) = \int_t^{ct \wedge 1} \gamma'(x)dx \leq P_2 \int_t^{ct \wedge 1} dx \leq P_2 \frac{c-1}{c},$$

оскільки для $t \in [0, 1]$ має місце нерівність $ct \wedge 1 - t \leq \frac{c-1}{c}$.

Якщо тепер виберемо $c_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon^2}{8P_2G^2(\phi)}$, то для $c \in (1, c_\varepsilon)$ будемо мати, що $\exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)\varepsilon^2c}{16P_2(c-1)}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)}{2}G^2(\phi)\right\}$. Далі, для будь-якої додатної константи C_1 існує таке k_0 , що для $k \geq k_0$ має місце $\frac{2CP_2\sqrt{c}}{\phi(c^k)\varepsilon\sqrt{P_2(c-1)}} \leq C_1$, а значить

$$P\left\{\sup_{t \in [0,1], s \in [t, ct \wedge 1]} |z_k(t) - z_k(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq C_1 \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)}{2}G^2(\phi)\right\}. \quad (5.2.8)$$

Аналогічним чином доводиться, що будь-якої додатної константи C_2 існує таке k_0 , що для $k \geq k_0$

$$P\left\{\sup_{t \in [0,1], s \in [t/c, t]} |z_{k+1}(t) - z_{k+1}(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq C_2 \exp\left\{-\frac{\phi^2(c^k)}{2}G^2(\phi)\right\}. \quad (5.2.9)$$

З (5.1.3), (5.2.7), (5.2.8), (5.2.9) і леми Бореля-Кантеллі отримуємо (5.2.6). Отже, *доведено Етап 2*.

3 Етап. Для закінчення доведення теореми 5.2.1 нам достатньо довести, що якщо $G^2(\phi) \leq \infty$, тоді кожна функція $f \in \mathcal{K}_G$ така, що $2J(f) = h^2 < G^2(\phi)$ є граничною точкою послідовності $\{z_k(t)\}$. Таким чином, достатньо довести, що для функції $f : 2J(f) = h^2$ існує число $c > 1$ таке, що для будь-якого $\delta > 0$ події

$$B_k = \left\{\omega : \sup_{t \in [0,1]} |z_k(t) - f(t)| < \delta\right\}$$

відбуваються нескінченно часто. Тобто

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} B_k\right\} = 1. \quad (5.2.10)$$

Для доведення (5.2.10) будемо використовувати лему Бореля-Кантеллі-Леві [59, Наслідок 2, стор. 506]. Для цього введемо сім'ю σ -алгебр $\mathfrak{S}_j = \sigma\{\eta(s), s \leq c^j\}$. Позначимо

$$A_k = \left\{\omega : \sup_{t \in [0, 1/c]} |z_k(t) - f(t)| < \delta\right\},$$

$$D_k = \left\{\omega : \sup_{t \in [1/c, 1]} |z_k(t) - f(t)| < \delta\right\}.$$

Зауважимо, що $B_k = A_k \cap D_k$ і $D_k \prec \mathfrak{S}_k$. Оскільки

$$z_k(t) = z_{k-1}(tc) \frac{\psi(c^{k-1})}{\psi(c^k)},$$

то для $t \in [0, 1/c]$, $z_k(t) \prec \mathfrak{S}_{k-1}$. Тоді $A_k \prec \mathfrak{S}_{k-1}$ і

$$\mathbb{P}(B_k | \mathfrak{S}_{k-1}) = I(A_k)P(D_k | \mathfrak{S}_{k-1}). \quad (5.2.11)$$

Тобто, для доведення (5.2.10) за допомогою леми Бореля-Кантеллі-Леві, нам потрібно довести, що

$$\sum_k I(A_k)P(D_k | \mathfrak{S}_{k-1}) = \infty. \quad (5.2.12)$$

Побудуємо розбиття відрізка $[1/c, 1]$ на відрізки довжиною Δ наступним чином: нехай Δ - таке достатньо мале додатне число, що $n(\Delta) = \frac{c-1}{c\Delta}$ - натуральне число. Тоді побудуємо розбиття відрізка $[1/c, 1]$ на відрізки $\Delta_i = [d_i, d_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n(\Delta) - 1$, $d_i = 1/c + i\Delta$. Всі розбиття відрізка $[1/c, 1]$ в подальшому тексті цього розділу будемо будувати саме так.

Для введеного розбиття розглянемо множину

$$\bar{D}_k = \left\{\sup_{t \in [1/c, 1]} |z_k(t) - f(t)| \geq \delta\right\} \subset \left\{\sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \frac{\delta}{3}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \sup_i |z_k(d_i) - f(d_i)| \geq \frac{\delta}{3} \right\} \cup \left\{ \sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |f(d_i) - f(t)| \geq \frac{\delta}{3} \right\}.$$

З нерівності Коші-Буняковського

$$|f(t) - f(d_i)|^2 = \left| \int_{d_i}^t \dot{f}(s) ds \right|^2 \leq (t - d_i) \int_{d_i}^t |\dot{f}(s)|^2 ds \leq \Delta h^2.$$

Вибравши тепер $\Delta < \Delta_* = \frac{\delta^2}{9h^2}$, отримуємо, що множина

$$\left\{ \sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |f(d_i) - f(t)| \geq \frac{\delta}{3} \right\}$$

є порожньою множиною. Для такого вибору Δ маємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_k | \mathfrak{S}_{k-1}) &\geq \mathbb{P} \left\{ \sup_i |u(c^k d_i) - f(d_i) \psi(c^k)| < \frac{\delta}{3} \psi(c^k) | \mathfrak{S}_{k-1} \right\} - \\ &\quad - \mathbb{P} \left\{ \sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \frac{\delta}{3} | \mathfrak{S}_{k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Тепер будемо користаємось результатами, які для спрощення доведення теореми, сформулюємо пізніше, в пункті 5.3. З леми 5.3.1 існує стала $c > 1$ така, що при достатньо великих k м.н.

$$I_{A_k}(\omega) = 1. \quad (5.2.13)$$

З леми 5.3.2 для фіксованого $c > 1$ і будь-яких $\delta > 0$ і $Q > 0$ існує таке розбиття відрізу $[1/c, 1]$ відрізками довжиною Δ_{**} , що м.н.

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \frac{\delta}{3} | \mathfrak{S}_{k-1} \right\} \leq 2n(\Delta_{**}) \exp\{-\phi^2(c^k)Q\}. \quad (5.2.14)$$

З леми 5.3.7 для сталої c з леми 5.3.1 і довільного $q > 0$, при достатньо великих k м.н.

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_i |u(c^k d_i) - f(d_i) \psi(c^k)| < \frac{\delta}{3} \psi(c^k) | \mathfrak{S}_{k-1} \right\} &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left(\frac{G^2(\phi)}{2} - q \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Тепер закінчимо доведення теореми. Виберемо число $c > 1$ так, щоб мало місце (5.2.13). В (5.2.14) візьмемо $Q = \frac{G^2(\phi)}{2} - q + 1$, де q - те ж, що й в

(5.2.15), і розбиття відрізка $[1/c, 1]$ з $\Delta < \min(\Delta_*, \Delta_{**})$. Тоді, при достатньо великих k (таких, що має місце нерівність $8n(\Delta) \leq \exp\{\phi^2(c^k)\}$), отримуємо м.н.:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{\sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \frac{\delta}{3} \mid \mathfrak{S}_{k-1}\right\} \leq \\ & \leq 2n(\Delta) \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2} - q + 1\right)\right\} \leq \\ & \leq \frac{2n(\Delta)}{\exp\{\phi^2(c^k)\}} \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2} - q\right)\right\} \leq \frac{1}{4} \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2} - q\right)\right\}. \end{aligned}$$

Звідси, з формул (5.2.9) та (5.2.15), при достатньо великих k і деякому $q > 0$ маємо м.н.

$$\mathbb{P}(D_k \mid \mathfrak{S}_{k-1}) \geq \frac{1}{4} \exp\left\{-\phi^2(c^k)\left(\frac{G^2(\phi)}{2} - q\right)\right\}.$$

Враховуючи тепер (5.2.11), (5.2.13) та означення $G^2(\phi)$ (5.1.3), отримуємо (5.2.12). *Етап 3 доведено.* Таким чином, *доведено теорему 5.2.1.*

5.3. Допоміжні леми

Лема 5.3.1. *Для будь-якого $\delta > 0$ і будь-якого $h < \infty$ існує константа $c > 1$ і номер k_0 такі, що для $k > k_0$ і $g \in K_h$ м.н.*

$$\sup_{t \in [0, 1/c]} |z_k(t) - g(t)| < \delta. \quad (5.3.1)$$

□ Згідно з першим етапом доведення теореми 5.2.1, для будь-якого $c > 1$ і будь-якого $\delta > 0$ існує число k_0 таке, що для $k > k_0$ м.н.

$$\inf_{g \in K_h} \sup_{t \in [0, 1/c]} |z_k(t) - g(t)| < \frac{\delta}{3}. \quad (5.3.2)$$

З іншого боку, для будь-якої $g \in K_h$,

$$|g(t)|^2 = \left| \int_0^t \dot{g}(s) ds \right|^2 \leq 2th^2.$$

Нехай $c > \max(1, 18h^2/\delta^2)$, тоді

$$\sup_{t \in [0, 1/c]} |g(t)| < \frac{\delta}{3}. \quad (5.3.3)$$

З (5.3.2) і (5.3.3) ми отримуємо м.н.

$$\sup_{t \in [0, 1/c]} |z_k(t)| < \frac{2\delta}{3}.$$

Остання нерівність разом з (5.3.3) дає нам (5.3.1). ■

Використовуючи введені вище (в третьому етапі доведення теореми 5.2.1) позначення для розбиття відрізка $[1/c, 1]$ на відрізки довжиною Δ , сформулюємо і доведемо наступну лему.

Лема 5.3.2. *Для фіксованого $c > 1$, для будь-яких $\delta > 0$ і $Q > 0$ існує розбиття відрізка $[1/c, 1]$ відрізками довжиною Δ таке, що м.н.*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_i \sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \delta | \mathfrak{S}_{k-1}\right\} \leq 2n(\Delta) \exp\{-\phi^2(c^k)Q\}. \quad (5.3.4)$$

□ Введемо σ -алгебри $\mathcal{G}_{c^k d_i} = \sigma\{\eta(s), s \leq c^k d_i\}$. Майже дослівно до доведення [16, теорема 5, стор. 172], встановлюється оцінка

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \delta | \mathcal{G}_{c^k d_i}\right\} \leq 2 \exp\{-\phi^2(c^k)Q\} \text{ м.н.}$$

А оскільки $\mathfrak{S}_{k-1} \subseteq \mathcal{G}_{c^k d_i}$ для $i = 0, 1, \dots, n(\Delta) - 1$, то м.н.

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in \Delta_i} |z_k(t) - z_k(d_i)| \geq \delta | \mathfrak{S}_{k-1}\right\} \leq 2 \exp\{-\phi^2(c^k)Q\}.$$

Звідси випливає (5.3.4). ■

Лема 5.3.3. *Нехай $h(x)$ - додатна монотонно зростаюча функція при $x \geq 0$. Тоді для $\zeta \geq 0$ і $a > 0$*

$$\mathbb{E}\zeta I_{(|\xi| > a)} \leq \frac{1}{h(a)} \mathbb{E}\zeta h(|\xi|).$$

□ Будемо мати:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\zeta I_{(|\xi|>a)} &= \int_{(\omega:|\xi|>a)} \zeta \mathbf{P}(d\omega) = \int_{(\omega:h(|\xi|)>h(a))} \zeta \mathbf{P}(d\omega) \leq \\ &\leq \int_{(\omega:h(|\xi|)>h(a))} \zeta \frac{h(|\xi|)}{h(a)} \mathbf{P}(d\omega) \leq \frac{1}{h(a)} \int_{\Omega} \zeta h(|\xi|) \mathbf{P}(d\omega) \leq \frac{1}{h(a)} \mathbf{E}\zeta h(|\xi|). \blacksquare \end{aligned}$$

Позначимо: $M_k(f; x) =$

$$= \frac{1}{\phi^2(c^k)} \ln \left\{ \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} f\left(\frac{s}{c^k}\right) \sigma(\eta(s)) dw(s) \right] \middle| \eta(c^{k-1}) = x \right\} \right\}.$$

Лема 5.3.4. *Нехай величина P_2 визначена (5.2.2). Тоді для фіксованого $c > 1$, що не залежить від x , для будь-якої $f \in \mathbb{C}[0, 1]$ має місце*

$$M_k(f; x) \leq \frac{P_2}{2} \int_{1/c}^1 f^2(s) ds \quad \text{м.н.}$$

□ З того, що

$$\begin{aligned} &\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} f\left(\frac{s}{c^k}\right) \sigma(\eta(s)) dw(s) = \\ &= \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} f\left(\frac{s}{c^k}\right) \sigma(\eta(s)) dw(s) \mp \frac{\phi^2(c^k)}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} f^2\left(\frac{s}{c^k}\right) \sigma^2(\eta(s)) ds, \end{aligned}$$

а $\sigma^2(\eta(s)) \leq P_2$, то за теоремою Гірсанова будемо мати м.н.

$$\begin{aligned} M_k(f; x) &\leq \frac{1}{\phi^2(c^k)} \ln \left\{ \exp \left\{ \frac{\phi^2(c^k) P_2}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} f^2\left(\frac{s}{c^k}\right) ds \right\} \right\} = \\ &= \frac{P_2}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} f^2\left(\frac{s}{c^k}\right) ds = \frac{P_2}{2} \int_{1/c}^1 f^2(s) ds. \blacksquare \end{aligned}$$

Позначимо:

$$J_c(f) = \frac{1}{2} \int_{1/c}^1 \frac{f^2(s)}{\sigma^2(f(s))} ds; \quad C_k = \left\{ \sup_i |u(c^k d_i) - f(d_i) \psi(c^k)| < \frac{\delta}{3} \psi(c^k) \right\};$$

$$C_k(i) = \left\{ |u(c^k d_i) - f(d_i) \psi(c^k)| < \frac{\delta}{3} \psi(c^k) \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, n(\Delta) - 1.$$

Для величин P_1, P_2 , визначених (5.2.2), виберемо константи l, m, p так, щоб виконувались наступні умови:

$$A_1. \quad 0 < m < \frac{P_1}{P_2}.$$

A_2 . При $P_1 \neq P_2$ $\sqrt{\frac{P_1}{P_2}}\sqrt{m} < l < \sqrt{\frac{P_1}{P_2 - P_1}}\sqrt{m - m^2}$; при $P_1 = P_2$ $l = m$.
 A_3 . $p = \frac{1}{P_2 l} (P_1(l^2 - m^2 + m) + 1)$.

Позначимо

$$K_1 = P_1(l^2 - m^2 + m) - P_2 l^2. \quad (5.3.5)$$

Зауваження 5.3.1. *Неважко переконатися, що наступні твердження мають місце:*

1. З умови A_1 випливає, що $0 < m < 1$ (тобто квадратні корені в умові A_2 визначені).

2. З умови A_2 випливає, що $K_1 > 0$.

3. Обмеження умови A_2 не є порожньою множиною, оскільки A_2 рівносильна наступній нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{P_2}} < \sqrt{\frac{1 - m}{P_2 - P_1}},$$

а ця нерівність завжди виконується в силу умови A_1 .

Для вибраних констант l, m, p покладемо:

$$\begin{aligned} \rho_k(l, m) = \exp \left\{ l \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k}) dw(s) - \right. \\ \left. - m \frac{\phi^2(c^k)}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma^2(\eta(s))}{\sigma^2(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}^2(\frac{s}{c^k}) ds \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

$$\begin{aligned} L_{k,p}(\delta) = \left\{ \left| \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k}) dw(s) - \right. \right. \\ \left. \left. - p \frac{\phi(c^k) P_2}{2\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\dot{f}^2(\frac{s}{c^k})}{\sigma^2(f(\frac{s}{c^k}))} ds \right| \leq \delta \psi(c^k) P_2 J_c(f) \right\}. \end{aligned}$$

Лема 5.3.5. *Для вибраних констант l, m існує константа $c > 1$ така, що м.н.*

$$P\{\rho_k(l, m) I_{\Omega \setminus C_k(i)}(\omega) | \mathfrak{F}_{k-1}\} \leq \exp\{\phi^2(c^k) P_1(l^2 - m^2) J_c(f)\} a_k(i),$$

де $a_k(i)$ не залежать від θ і Δ та $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n(\Delta) - 1$.

□ Для будь-якої додатної обмеженої випадкової величини $\theta \prec \mathfrak{S}_{k-1}$ використаємо нерівність леми 5.3.3 для функції $h(x) = e^{\frac{\phi(c^k)N}{\sqrt{c^k}}x}$ з деякою константою N , яку оберемо пізніше. Будемо мати:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m)I_{\Omega \setminus C_k(i)}(\omega) \leq \\ & \leq \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \exp \left\{ \frac{N\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left| u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k) \right| - \frac{\delta}{3} N\phi^2(c^k) \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \exp \left\{ \frac{N\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left(u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k) \right) - \frac{\delta}{3} N\phi^2(c^k) \right\} + \\ & + \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \exp \left\{ - \frac{N\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left(u(c^k d_i) - f(d_i)\psi(c^k) \right) - \frac{\delta}{3} N\phi^2(c^k) \right\} = \\ & = J_k^1(i) + J_k^2(i). \end{aligned}$$

Розглянемо окремо $J_k^1(i)$. Використовуючи (5.3.6) та те, що $\sigma^2(\eta(sc^k)) \geq P_1$, маємо:

$$\begin{aligned} J_k^1(i) &= \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[Nf(d_i) + N\frac{\delta}{3} + \frac{m}{2} \int_{1/c}^1 \frac{\sigma^2(\eta(sc^k))}{\sigma^2(f(s))} \dot{f}^2(s) ds \right] \right\} \times \\ & \times \mathbf{E}\theta \exp \left\{ \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left(Nu(c^k d_i) + \int_{c^{k-1}}^{c^k} l \frac{\sigma(\eta(s)) \dot{f}(\frac{s}{c^k})}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} dw(s) \right) \right\} \leq \\ & \leq \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[Nf(d_i) + N\frac{\delta}{3} + P_1 m J_c(f) \right] \right\} \times \\ & \quad \times \mathbf{E} \left\{ \theta \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \left(Nu(c^{k-1}) + \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. \int_{c^{k-1}}^{c^k} \left(l \frac{\dot{f}(\frac{s}{c^k})}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} + NI_{[c^{k-1}, c^k d_i]}(\frac{s}{c^k}) \right) \sigma(\eta(s)) dw(s) \right) \right] \middle| \mathfrak{S}_{k-1} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

З марковості процесу $\eta(t)$ випливає, що:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \exp \left[\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \left(l \frac{\dot{f}(\frac{s}{c^k})}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} + NI_{[c^{k-1}, c^k d_i]}(\frac{s}{c^k}) \right) \sigma(\eta(s)) dw(s) \right] \middle| \mathfrak{S}_{k-1} \right\} &= \\ = \exp \left\{ \phi^2(c^k) M_k \left(l \frac{\dot{f}}{\sigma(f)} + NI_{[c^{k-1}, c^k d_i]}(\cdot); \eta(c^{k-1}) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Тому, використовуючи лему 5.3.4,

$$\begin{aligned}
J_k^1(i) &\leq \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[N \frac{\delta}{3} + P_1 m J_c(f) \right] \right\} \times \\
&\times \mathbf{E} \theta \exp \left\{ \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} N \left(u(c^{k-1}) - f(d_i) \psi(c^k) \right) \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \phi^2(c^k) M_k \left(l \frac{\dot{f}}{\sigma(f)} + N I_{[c^{k-1}, c^k d_i]}(\cdot); \eta(c^{k-1}) \right) \right\} \leq \\
&\leq \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[N \frac{\delta}{3} + P_1 m J_c(f) \right] \right\} \times \\
&\times \mathbf{E} \theta \exp \left\{ \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} N \left(u(c^{k-1}) - f(1/c) \psi(c^k) \right) \right\} \exp \left\{ \phi^2(c^k) N \left(f(1/c) - f(d_i) \right) \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \frac{\phi^2(c^k) P_2}{2} \int_{1/c}^1 \left(l \frac{\dot{f}(s)}{\sigma(f(s))} + N I_{[1/c, d_i]}(s) \right)^2 ds \right\}.
\end{aligned}$$

За лемою 5.3.1 існує константа $c > 1$ така, що для великих k м.н.

$$\exp \left\{ \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} N \left(u(c^{k-1}) - f(1/c) \psi(c^k) \right) \right\} \leq \exp \left\{ \frac{\delta}{6} N \phi^2(c^k) \right\}. \quad (5.3.7)$$

Тепер оцінимо

$$\begin{aligned}
&\int_{1/c}^1 \left(l \frac{\dot{f}(s)}{\sigma(f(s))} + N I_{[1/c, d_i]}(s) \right)^2 ds \leq \\
&\leq 2l^2 J_c(f) + 2Nl \int_{1/c}^{d_i} \frac{\dot{f}(s)}{\sigma(f(s))} ds + N^2(1 - 1/c).
\end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Позначимо вираз в правій частині (5.3.8) через $A_c(J_c, N, l)$. Тоді з (5.3.7),

(5.3.8) отримаємо:

$$\begin{aligned}
J_k^1(i) &\leq \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[N \frac{\delta}{6} + P_1 m J_c(f) \right] \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \frac{\phi^2(c^k) P_2}{2} A_c(J_c, N, l) \right\} \exp \left\{ \phi^2(c^k) N \left(f(1/c) - f(d_i) \right) \right\} \mathbf{E} \theta = \\
&= \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[N \frac{\delta}{6} + P_1 m J_c(f) - P_2 l^2 J_c(f) - N^2 \frac{P_2(1 - 1/c)}{2} \right] \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ \phi^2(c^k) N \int_{1/c}^{d_i} \left(\frac{l P_2}{\sigma(f(s))} - 1 \right) \dot{f}(s) ds \right\} \mathbf{E} \theta.
\end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Вираз в дужках під останнім інтегралом (5.3.9) не перевищує $\frac{lP_2}{\sqrt{P_1}}$, а

$$\int_{1/c}^{d_i} \dot{f}(s) ds \leq \left| \int_{1/c}^{d_i} \sqrt{\frac{\sigma(f)}{\sigma(f)}} \dot{f}(s) ds \right| \leq \sqrt{P_2} \sqrt{2J_c(f)} \sqrt{1-1/c}.$$

Тому з (5.3.9), привівши подібні, отримуємо:

$$\begin{aligned} J_k^1(i) &\leq \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[\frac{N\delta}{6} + J_c(f) (P_1 m - P_2 l^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - N^2 \frac{P_2(1-1/c)}{2} - lN \sqrt{\frac{P_2^3}{P_1}} \sqrt{2J_c(f)} \sqrt{1-1/c} \right] \right\} \mathbf{E}\theta = \\ &= \exp \left\{ \phi^2(c^k) P_1 (l^2 - m^2) J_c(f) \right\} \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[\frac{N\delta}{6} - N^2 \frac{P_2(1-1/c)}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_c(f) (P_1 (l^2 - m^2) + P_1 m - P_2 l^2) - lN \sqrt{\frac{P_2^3}{P_1}} \sqrt{2J_c(f)} \sqrt{1-1/c} \right] \right\} \mathbf{E}\theta. \end{aligned}$$

Позначимо, використовуючи (5.3.5),

$$\begin{aligned} \hat{a}_k(i) &= \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left[\frac{N\delta}{6} - N^2 \frac{P_2(1-1/c)}{2} + K_1 J_c(f) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - lN \sqrt{\frac{P_2^3}{P_1}} \sqrt{2J_c(f)} \sqrt{1-1/c} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки $K_1 > 0$, то вираз в квадратних дужках буде додатним при деякому $N > 0$. При такому виборі $N \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{a}_k(i) = 0$, та

$$J_k^1(i) \leq \exp \left\{ \phi^2(c^k) P_1 (l^2 - m^2) J_c(f) \right\} \hat{a}_k(i) \mathbf{E}\theta. \quad (5.3.10)$$

Аналогічно отримуємо:

$$J_k^2(i) \leq \exp \left\{ \phi^2(c^k) P_1 (l^2 - m^2) J_c(f) \right\} \check{a}_k(i) \mathbf{E}\theta. \quad (5.3.11)$$

де $\lim_{k \rightarrow \infty} \check{a}_k(i) = 0$.

Твердження леми 5.3.5 випливає з (5.3.10) та (5.3.11) з $a_k(i) = \hat{a}_k(i) + \check{a}_k(i)$. ■

Лема 5.3.6. Для вибраних констант l, m, p і будь-якого $\delta > 0$ м.н.

$$P\{\rho_k(l, m)I_{\Omega \setminus L_{k,p}(\delta)}(\omega) | \mathfrak{F}_{k-1}\} \leq \exp\{\phi^2(c^k)P_1(l^2 - m^2)J_c(f)\}b_k(\delta),$$

де $b_k(\delta)$ не залежить від θ та $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k(\delta) = 0$.

□ Для будь-якої додатної обмеженої випадкової величини $\theta \prec \mathfrak{F}_{k-1}$ використаємо нерівність леми 5.3.3 для функції $h(x) = e^{\frac{\phi(c^k)N}{\sqrt{c^k}}x}$ з деякою константою $0 < N < 1$, яку оберемо пізніше. Будемо мати:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m)I_{\Omega \setminus L_{k,p}(\delta)}(\omega) \leq \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \times \\ & \times \exp\left\{\left|\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k})dw(s) - \frac{p\phi^2(c^k)P_2}{2c^k}N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\dot{f}^2(\frac{s}{c^k})}{\sigma^2(f(\frac{s}{c^k}))}ds\right|\right\} \times \\ & \times \exp\left\{-\phi^2(c^k)N\delta P_2 J_c(f)\right\} \leq \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \times \\ & \times \exp\left\{\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k})dw(s) - \phi^2(c^k)N(\delta + p)P_2 J_c(f)\right\} + \\ & + \mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \exp\left\{-\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}}N \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k})dw(s) - \right. \\ & \left. - \phi^2(c^k)N(\delta - p)P_2 J_c(f)\right\} = J_k^1(\delta) + J_k^2(\delta). \end{aligned}$$

Підставимо $\rho_k(l, m)$ і розглянемо доданок $J_k^1(\delta)$, використовуючи марковість процесу $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} J_k^1(\delta) &= \mathbf{E}\theta \exp\left\{\frac{\phi(c^k)(N+l)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k})dw(s) - \right. \\ & \left. - \phi^2(c^k)\left(N(\delta + p)P_2 J_c(f) + \frac{m}{2} \int_{1/c}^1 \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}^2(s)ds\right)\right\} \leq \\ & \leq \exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left(N(\delta + p)P_2 + P_1m\right)\right\} \times \\ & \times \mathbf{E}\left\{\theta \mathbf{E}\left\{\exp\left[\frac{\phi(c^k)(N+l)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k})dw(s)\right] \middle| \mathfrak{F}_{k-1}\right\}\right\} = \\ & = \exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left(N(\delta + p)P_2 + P_1m\right)\right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \mathbf{E}\theta \exp \left\{ \phi^2(c^k) M_k \left((l+N) \frac{\dot{f}}{\sigma(f)}; \eta(c^{k-1}) \right) \right\}.$$

Тоді, за лемою 5.3.4, можемо отримати м.н.:

$$M_k \left((l+N) \frac{\dot{f}}{\sigma(f)}; \eta(c^{k-1}) \right) \leq \frac{(l+N)^2 P_2}{2} \int_{1/c}^1 \frac{\dot{f}^2}{\sigma^2(f)} ds = (l+N)^2 P_2 J_c(f).$$

Отже, привівши подібні, отримуємо:

$$\begin{aligned} J_k^1(\delta) &\leq \exp \left\{ -\phi^2(c^k) J_c(f) \left[N(\delta+p)P_2 + P_1 m - (l+N)^2 P_2 \right] \right\} \mathbf{E}\theta = \\ &= \exp \left\{ -\phi^2(c^k) J_c(f) \left(P_2((\delta+p)N - (l+N)^2) + P_1 m \pm P_1(l^2 - m^2) \right) \right\} \times \\ &\times \mathbf{E}\theta = \exp \left\{ \phi^2(c^k) P_1(l^2 - m^2) J_c(f) \right\} \exp \left\{ -\phi^2(c^k) J_c(f) \left[-P_2 N^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + P_2(\delta+p-2l)N + K_1 \right] \right\} \mathbf{E}\theta = \exp \left\{ \phi^2(c^k) P_1(l^2 - m^2) J_c(f) \right\} \check{b}_k(\delta) \mathbf{E}\theta, \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

де $\check{b}_k(\delta)$ - друга експонента з лівої частини останньої рівності в (5.3.12). Оскільки $K_1 > 0$, то вираз в квадратних дужках $\check{b}_k(\delta)$ буде додатним при деякому $N > 0$. При такому виборі N

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \check{b}_k(\delta) = 0.$$

Аналогічним чином

$$J_k^2(\delta) \leq \exp \left\{ \phi^2(c^k) P_1(l^2 - m^2) J_c(f) \right\} \hat{b}_k(\delta) \mathbf{E}\theta,$$

де $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{b}_k(\delta) = 0$.

Остаточно, твердження леми 5.3.6 має місце з $b_k(\delta) = \check{b}_k(\delta) + \hat{b}_k(\delta)$ при деякому додатному N . ■

Лема 5.3.7. Для довільної функції $f \in \mathcal{K}_G$ такої, що $2J(f) = h^2 < G^2$ існують числа $s > 1$ і $v > 0$ такі, що для достатньо великих k м.н.

$$\mathbf{P} \left(C_k | \mathfrak{S}_{k-1} \right) \geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -\phi^2(c^k) \left(\frac{G^2}{2} - v \right) \right\}.$$

□ Для будь-якої додатної обмеженої випадкової величини $\theta \prec \mathfrak{S}_{k-1}$ маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\theta I_{C_k}(\omega) &= \mathbb{E}\theta \rho_k(l, m) I_{C_k}(\omega) \exp \left\{ -l \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k}) dw(s) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\phi^2(c^k)}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma^2(\eta(s))}{\sigma^2(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}^2(\frac{s}{c^k}) ds \right\} \geq \\
&\geq \exp \left\{ \phi^2(c^k) [P_1 m J_c(f) - P_2 pl J_c(f)] \right\} \mathbb{E}\theta \rho_k(l, m) I_{C_k}(\omega) \times \\
&\times \exp \left\{ -l \frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k}) dw(s) + pl \frac{\phi^2(c^k) P_2}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\dot{f}^2(\frac{s}{c^k})}{\sigma^2(f(\frac{s}{c^k}))} ds \right\} \geq \\
&\geq \exp \left\{ \phi^2(c^k) J_c(f) [P_1 m - P_2 pl] \right\} \mathbb{E}\theta \rho_k(l, m) I_{C_k}(\omega) I_{L_{k,p}}(\omega) \times \\
&\times \exp \left\{ -l \left(\frac{\phi(c^k)}{\sqrt{c^k}} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\sigma(\eta(s))}{\sigma(f(\frac{s}{c^k}))} \dot{f}(\frac{s}{c^k}) dw(s) - p \frac{\phi^2(c^k) P_2}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} \frac{\dot{f}^2(\frac{s}{c^k})}{\sigma^2(f(\frac{s}{c^k}))} ds \right) \right\} \geq \\
&\geq \exp \left\{ \phi^2(c^k) J_c(f) [P_1 m - P_2 pl - P_2 \delta l] \right\} \mathbb{E}\theta \rho_k(l, m) I_{C_k}(\omega) I_{L_{k,p}}(\omega).
\end{aligned}$$

Тут ми: домножили/поділили на $\rho_k(l, m)$ та $\exp \left\{ \frac{pl\phi^2(c^k)P_2 J_c(f)}{2} \right\}$; скористались нерівністю виду $1 \geq I_{L_{k,p}}(\omega)$ та нерівністю виду

$$\exp\{-a\} I_{(|a|<b)} \geq \exp\{-b\} I_{(|a|<b)}.$$

Оскільки $I_{C_k}(\omega) I_{L_{k,p}(\delta)}(\omega) \geq 1 - I_{\Omega \setminus C_k}(\omega) - I_{\Omega \setminus L_{k,p}(\delta)}(\omega)$, то

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\theta I_{C_k}(\omega) &\geq \exp \left\{ \phi^2(c^k) J_c(f) (P_1 m - P_2 pl - P_2 \delta l) \right\} \times \\
&\times \mathbb{E}\theta \rho_k(l, m) \left(1 - I_{\Omega \setminus C_k}(\omega) - I_{\Omega \setminus L_{k,p}(\delta)}(\omega) \right).
\end{aligned}$$

Далі, маємо з (5.3.6):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\theta \rho_k(l, m) &= \mathbb{E} \left\{ \theta \mathbb{E} \left\{ \rho_k(l, m) \mid \mathfrak{S}_{k-1} \right\} \right\} = \\
&= \mathbb{E} \left\{ \theta \tilde{\mathbb{E}} \left\{ \exp \left[\frac{\phi^2(c^k)}{2c^k} \int_{c^{k-1}}^{c^k} (l^2 - m^2) \frac{\sigma^2(\eta)}{\sigma^2(f)} \dot{f}^2 ds \mid \mathfrak{S}_{k-1} \right] \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що $l^2 - m^2 > l^2 \frac{P_2}{P_1} - m > 0$, враховуючи ліву нерівність A_2 .

Тому $\mathbf{E}\theta\rho_k(l, m) \geq \exp\left\{\phi^2(c^k)P_1(l^2 - m^2)J_c(f)\right\}\mathbf{E}\theta$.

Продовжимо, скориставшись цією оцінкою і оцінками лем 5.3.5, 5.3.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\theta I_{C_k}(\omega) &\geq \exp\left\{\phi^2(c^k)J_c(f)\left(P_1m - P_2(pl + \delta l)\right)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\phi^2(c^k)P_1(l^2 - m^2)J_c(f)\right\}\left(1 - \sum_{i=1}^{n(\Delta)} a_k(i) - b_k(\delta)\right)\mathbf{E}\theta \geq \\ &\geq \exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left(P_1(m^2 - l^2 - m) + P_2(pl + \delta l)\right)\right\}\mathbf{E}\theta. \end{aligned}$$

Враховуючи A_3 , маємо:

$$\mathbf{E}\theta I_{C_k}(\omega) \geq \exp\left\{-\phi^2(c^k)J_c(f)\left(1 + P_2\delta l\right)\right\}\mathbf{E}\theta. \quad (5.3.13)$$

Зрозуміло, що

$$J_c(f)\left(1 + P_2\delta l\right) \leq \left(1 + P_2\delta l\right)\frac{h^2}{2}.$$

Виберемо $\delta < \frac{G^2 - h^2}{3h^2} \frac{1}{P_2l}$. З останньої нерівності отримаємо, що

$$J_c(f)\left(1 + P_2\delta l\right) \leq \frac{G^2}{2} - v, \quad (5.3.14)$$

де $v = \frac{G^2 - h^2}{3}$. Твердження лема 5.3.7 випливає з (5.3.13), (5.3.14). ■

З ліпшецевості функції κ (див. (3.2.8)) випливає наступний результат.

Лема 5.3.8. *Нехай для довільних одновимірних функцій $\{f_n\}$ і g має місце*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - g(t)| = 0\right\} = 1.$$

Тоді для функції κ , заданої формулою (3.2.8), має місце

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} |\kappa(f_n(t)) - \kappa(g(t))| = 0\right\} = 1.$$

5.4. Функціональний закон повторного логарифма для косоного броунівського руху

Розглядаємо косий броунівський рух як розв'язок стохастичного рівняння з локальним часом (5.1.1). Покладемо

$$Y(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt, & \text{якщо } f \in H^2[0, 1], f(0) = 0, \\ +\infty, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Далі визначимо $\mathcal{F}_D = \left\{ h \in \mathbb{C}[0, 1] : h(0) = 0; Y(h) \leq \frac{D^2}{2} \right\}$. Якщо $D^2 = \infty$, то $\mathcal{F}_\infty = \{h \in \mathbb{C}[0, 1] : h(0) = 0\}$.

Для довільного $T > 0$ розглянемо випадкові процеси

$$\xi_T(t) = \frac{\xi(Tt) - x}{\sqrt{T}\phi(T)} = \frac{\beta L^\xi(tT, 0) + w(tT)}{\sqrt{T}\phi(T)}. \quad (5.4.2)$$

Теорема 5.4.1. *Нехай $|\beta| < 1$, $\phi \in \Phi$, G задається (5.1.3). Тоді при $T \rightarrow \infty$ послідовність $\{\xi_T(t)\}$ має в $\mathbb{C}[0, 1]$ множину граничних точок, що співпадає з \mathcal{F}_G м.н.*

Доведення теореми 5.4.1. За лемою 3.2.2 та формулами (3.2.8)-(3.2.9) маємо, що $\zeta(t) = \varphi(\xi(t))$ або ж $\xi(t) = \kappa(\zeta(t))$, де

$$\zeta(t) = \varphi(x) + \int_0^t \frac{dw(s)}{1 + \beta \operatorname{sgn} \zeta(s)}, \quad t \in [0, 1]. \quad (5.4.3)$$

Тобто процес $\zeta(t)$ має вигляд (5.2.1) з $y = \varphi(x)$ та

$$\sigma(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x)^{-1}.$$

Для процесу $\zeta_T(t) = \frac{\zeta(Tt) - \varphi(x)}{\sqrt{T}\phi(T)}$ має місце твердження теореми 5.2.1 з

множиною граничних точок $\mathcal{K}_G = \left\{ f \in \mathbb{C}[0, 1] : f(0) = 0; J(f) \leq \frac{G^2}{2} \right\}$. А з означення функцій $L(f(s), \dot{f}(s))$ – формули (5.2.4) – маємо властивість

$$L(f(s), \dot{f}(s)) = \left(\frac{d\kappa(f(s))}{ds} \right)^2,$$

тобто $Y(\kappa(f)) = J(f)$, значить з того, що $f \in \mathcal{K}_G$, випливає, що $\kappa(f) \in \mathcal{F}_G$.

Скористаємось теоремою 5.2.1. Маємо: для довільної $f \in \mathcal{K}_G$ існує під-
 послідовність $\{T_m\}$ така, що

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{T_m \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,1]} |\zeta_{T_m}(t) - f(t)| = 0\right\} = 1.$$

Водночас

$$\begin{aligned} \zeta_T(t) &= \frac{\zeta(Tt) - \varphi(x)}{\psi(T)} = \frac{\frac{\xi(Tt)}{1+\beta \operatorname{sgn} \xi(Tt)} - \frac{x}{1+\beta \operatorname{sgn} x}}{\psi(T)} = \\ &= \varphi(\xi_T(t)) + \frac{\frac{x}{1+\beta \operatorname{sgn} \xi(Tt)} - \frac{x}{1+\beta \operatorname{sgn} x}}{\psi(T)}. \end{aligned}$$

Тоді з лем 3.2.2, 5.3.8, формул (3.2.8), (3.2.9), (5.1.1), (5.2.1) та того, що
 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1+\beta \operatorname{sgn} \xi(Tt)} - \frac{x}{1+\beta \operatorname{sgn} x}}{\psi(T)} = 0$, будемо мати твердження теореми 5.4.1.

Теорему 5.4.1 доведено.

Висновки до розділу 5. В даному розділі доведено функціональний закон типу повторного логарифму для стохастичного рівняння Іто з нульовим зносом та розривним коефіцієнтом дифузії, який проте є відокремленою від нуля обмеженою функцією обмеженої варіації.

Також доведено функціональний закон типу повторного логарифму для косоого броунівського руху.

РОЗДІЛ 6

ЯВИЩЕ ПЕАНО

ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Питання про збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з малою дифузиею виду

$$x_\varepsilon(t) = \int_0^t b(x_\varepsilon(s))ds + \varepsilon w(t),$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ до міри, що зосереджена на розв'язку відповідної задачі Коші

$$x'(t) = b(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

за умови єдиності цього розв'язку, розглянуто в кількох роботах, серед яких згадаємо книги А. Д. Вентцеля і М. І. Фрейдліна [9] та Д. Струка, С. Р. С. Варадана [92].

Випадок неєдиності розв'язку відповідної задачі Коші (так зване "явище Пеано") також розглядався. В роботах П. Балді [62], П. Балді і Р. Бафіко [63] за умов неперервності функції $b(x)$ і виконання умови $\int_0^\delta \frac{1}{h(y)} dy < \infty$ в деякому околі точки $x = 0$. Тут $h(x) = \min_{[x, x+\delta]} b(\cdot)$ для деякого $\delta > 0$. Доведена слабка збіжність мір до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші з певними вагами. В роботі А. Ю. Веретеннікова [12] функція $b(x)$ неперервна, непарна і опукла догори на $(0, \infty)$. В цьому випадку гранична міра зосереджена на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші з вагами, рівними $1/2$. В роботі М. Градінару, С. Херман, Б. Ройнет [68] для функції $b(x) = |x|^\gamma \text{sign}(x)$, $\gamma \in (0, 1)$, вивчена збіжність щільності розподілу $p_t^\varepsilon(x)$ відносно міри Лебега при $\varepsilon \rightarrow 0$. В роботі Р. Букдана, М. Квінкампа, У. Оукніна [64] за умов лінійного росту функції $b(x)$ (без

неперервності) встановлена збіжність x_ε за підпоследовністю ε_n до розв'язку диференційного включення за Філіпповим виду $x(t) \in b(x(t))$.

В даному розділі проведені дослідження в кількох напрямках. По-перше, встановлено слабку збіжність підпоследовностей мір, породжених розв'язками рівнянь Іто з неперервним коефіцієнтом зносу та з коефіцієнтом дифузії, відмінним від одиниці (навіть, можливо розривним). Останнє, звісно, не впливає на екстремальні розв'язки відповідної задачі Коші, але впливає на значення ваг граничної міри. По-друге, завдяки використанню техніки асимптотичних припущень роботи Є. І. Островського [43] вдалось спростити умови даної збіжності. По-третє, встановлена слабка збіжність підпоследовностей мір, породжених розв'язками стохастичного рівняння з локальним часом з неперервним коефіцієнтом зносу та малою дифузією, до мір, зосереджених з певними вагами на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші та вказані формули для обчислення цих ваг. Широко використовуються ідеї роботи [63] та, як і в попередніх розділах, формули зв'язку між рівняннями з локальним часом та рівняннями Іто.

6.1. Позначення та умови

Розглядаємо простір $\mathbb{C}[0, \infty)$ з метрикою рівномірної збіжності на компактах з $[0, \infty)$:

$$\rho(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{\sup_{t \in [0, N]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup_{t \in [0, N]} |f(t) - g(t)|}.$$

Означення 6.1.1. Будемо говорити, що функції $f(x)$ та $g(x)$ *асимптотично еквівалентні* при $x \rightarrow x_0$ та позначати $f(x) \sim g(x)$, якщо має місце

рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Розглянемо стохастичне рівняння з локальним часом та малою дифузиею

$$\xi_\varepsilon(t) = \beta L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t b(\xi_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(\xi_\varepsilon(s)) dw(s), \quad t \in [0, 1], \quad (6.1.1)$$

та поставимо йому у відповідність задачу Коші

$$\dot{y}(t) = b(y(t)), \quad y(0) = 0. \quad (6.1.2)$$

Для коефіцієнтів рівняння (6.1.1) введемо наступну умову:

Умова (V).

V_1 . Функція $b(x)$ неперервна і точка ноль є її єдиним нулем.

V_2 . Існує константа Λ така, що для $a(x) = \sigma^2(x)$

$$(b, a) \in \mathcal{L}(\Lambda^{-1}, \Lambda).$$

V_3 . Функція $\sigma(x)$ не змінює знак і є функцією локально обмеженої варіації:

для будь-якого $N < \infty$

$$\sup_{-N=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k=N} \sum_{i=1}^k |\sigma(x_i) - \sigma(x_{i-1})| < \infty.$$

V_4 . Константа $|\beta| < 1$.

Зауважимо, що за умов V_2 і V_4 існує єдиний слабкий розв'язок рівняння (6.1.1) [67, теорема 4.35].

6.2. Результати для звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо докладно задачу Коші (6.1.2). Будемо вважати, що для неї завжди мають місце умови V_1 і V_2 для функції $b(x)$. Тоді ця задача має принаймні один – нульовий – розв’язок і всі її розв’язки проходять через точку $(0; 0)$. Множину інтегральних кривих називають *інтегральною воронкою*. Позначимо її через \mathfrak{R} . За теоремою Кнезера [53, теорема III.4.1] множина \mathfrak{R} є зв’язною замкненою множиною. Таким чином, з існування двох різних розв’язків випливає, що їх нескінченно багато. При цьому кожен розв’язок з інтегральної воронки можна розташувати між двома спеціальними розв’язками – які будемо називати *екстремальними* – відповідно *верхнім* $\bar{y}(t)$ і *нижнім* $\underline{y}(t)$:

$$\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}(t),$$

де $\bar{y}(t) = \sup\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$, $\underline{y}(t) = \inf\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$ [19, теорема II.1.2]. Будь-який переріз $t = t_1$ інтегральної воронки є замкненим відрізком $[\underline{y}(t_1), \bar{y}(t_1)]$.

Зауваження 6.2.1. *Відмітимо, що якщо $b(x)x < 0$ для $x \neq 0$, то задача (6.1.2) має лише нульовий розв’язок.*

Справді, нехай ненульовий розв’язок $y(t)$ існує. Тоді, домноживши (6.1.2) на $y(t)$ і проінтегрувавши отримаємо

$$y^2(t) = 2 \int_0^t b(y(s))y(s)ds \leq 0,$$

що можливо лише для $y(t) \equiv 0$.

Зауваження 6.2.2. [60, теорема 1.2.8] *Для існування ненульового розв’язку (6.1.2) необхідна збіжність (з деяким $\delta > 0$) хоча б одного з ін-*

тегралів

$$\int_0^\delta \frac{1}{b(y)} dy, \int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(y)} dy. \quad (6.2.1)$$

Можливі наступні три випадки:

$$\text{Для довільного } \delta > 0 \text{ інтеграли } \int_0^\delta \frac{1}{b(y)} dy \text{ і } \int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(y)} dy \text{ збіжні.} \quad (6.2.2)$$

$$\text{Для довільного } \delta > 0 \text{ інтеграл } \int_0^\delta \frac{1}{b(y)} dy \text{ розбіжний.} \quad (6.2.3)$$

В цьому випадку верхній розв'язок $\bar{y}(t) = 0$, [60, теорема 1.2.8].

$$\text{Для довільного } \delta > 0 \text{ інтеграл } \int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(y)} dy \text{ розбіжний.} \quad (6.2.4)$$

В цьому випадку нижній розв'язок $\underline{y}(t) = 0$, [60, теорема 1.2.8].

Відмітимо, що якщо одночасно мають місце умови (6.2.3) і (6.2.4), то задача (6.1.2) має єдиний розв'язок $y(t) \equiv 0$.

Таким чином, ненульові розв'язки (6.1.2) існують в таких випадках:

A₁. Функція $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і обидва інтеграли в (6.2.1) збіжні.

A₂. Функція $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (6.2.1) збіжний, а другий - розбіжний.

A₃. Функція $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (6.2.1) розбіжний, а другий - збіжний.

A₄. Функція $b(x) > 0$ при $x \neq 0$ і перший з інтегралів в (6.2.1) збіжний.

A₅. Функція $b(x) < 0$ при $x \neq 0$ і другий з інтегралів в (6.2.1) збіжний.

Лема 6.2.1. *Якщо для двох ненульових розв'язків $y_1(t)$, $y_2(t)$ задачі (6.2.1) існує $t_1 > 0$, таке, що $y_1(t_1) = y_2(t_1) \neq 0$, то ці розв'язки співпадають при всіх $t \geq 0$.*

□ Нехай існує точка t_2 , в якій функції $y_1(t)$ і $y_2(t)$ не співпадають. Визначимо функцію

$$Y(t) = \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} \frac{1}{b(z)} dz.$$

Тоді $Y(t_1) = 0$, але $Y(t_2) \neq 0$. В силу того, що $y_1(t)$, $y_2(t)$ - розв'язок задачі (6.1.2), для тих t , для яких $y_i(t) \neq 0$, $i = 1, 2$, отримаємо

$$Y'(t) = \frac{y_2'(t)}{b(y_2(t))} - \frac{y_1'(t)}{b(y_1(t))} = 0.$$

Тобто для таких t функція $Y(t) = const$ і, оскільки $Y(t_1) = 0$, то $Y(t) \equiv 0$, що неможливо. ■

Позначимо $H(x) = \int_0^x \frac{1}{b(y)} dy$ для $x \geq 0$ і $K(x) = \int_x^0 \frac{1}{b(y)} dy$ для $x \leq 0$. За умови V_1 дані функції строго монотонні. Позначимо через $H^{-1}(x)$, $K^{-1}(x)$ обернені до них функції.

Лема 6.2.2. *У випадку A_1 всі ненульові розв'язки задачі (6.1.2) мають вигляд:*

$$y_\lambda(t) = H^{-1}((t - \lambda)^+), \quad \lambda \geq 0, \quad (6.2.5)$$

$$y_\mu(t) = K^{-1}(-(t - \mu)^+), \quad \mu \geq 0. \quad (6.2.6)$$

При цьому екстремальними розв'язками є $\bar{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.

□ Те, що функції (6.2.5), (6.2.6) є розв'язками задачі (6.1.2) перевіряється підстановкою. Для довільних $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $K^{-1}(-t) \leq y_\mu(t) \leq y_\lambda(t) \leq H^{-1}(t)$. Нехай $y(t)$ - довільний розв'язок задачі (6.1.2), що лежить в криволінійній області $[K^{-1}(-t), H^{-1}(t)]$ і перетинає її переріз $t = t_0$ в точці $y_0 = y(t_0) > 0$. Існує точка $t^* \leq t_0$ така, що $H^{-1}(t^*) = y_0$. Взявши $\lambda^* = t_0 - t^*$ для функції $y_{\lambda^*}(t)$ отримаємо $y_{\lambda^*}(t_0) = y_0$. В силу леми 6.2.1 взятий розв'язок має вигляд (6.2.5). Аналогічно розглядається випадок $y_0 = y(t_0) < 0$.

Доведемо тепер, що $\bar{y}(t) = H^{-1}(t)$. Припустимо, що існує розв'язок $\hat{y}(t)$ задачі (6.1.2) такий, що $\hat{y}(t) > H^{-1}(t)$. Тоді при будь-якому $R > 0$ функція $\hat{y}((t - R)^+)$ також є розв'язком задачі (6.1.2). Зрозуміло, що знайдеться таке R^* при якому функції $\hat{y}((t - R^*)^+)$ і $H^{-1}(t)$ перетнуться. З леми 6.2.1 тоді випливає, що $R^* = 0$ і $\hat{y}(t) = H^{-1}(t)$. Так само встановлюється, що $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$. ■

Зауваження 6.2.3. Важливо відмітити, що у випадку A_1 з усіх розв'язків задачі (6.1.2), що виходять з $[-r, r]$ в точці r , $\bar{y}(t)$ є "найшвидшим" і час виходу для нього дорівнює $\int_0^r \frac{1}{b(y)} dy = H(r)$.

Аналогічно $\underline{y}(t)$ є тим розв'язком, який найшвидше з усіх виходить з $[-r, r]$ в точці $(-r)$ і час виходу для нього дорівнює $\int_0^{-r} \frac{1}{b(y)} dy = -K(-r)$.

Аналогічно лемі 6.2.2 доводиться наступна лема.

Лема 6.2.3. 1. У випадках A_2 і A_4 всі ненульові розв'язки задачі (6.1.2) мають вигляд (6.2.5). При цьому екстремальними розв'язками є $\bar{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = 0$.

2. У випадках A_3 і A_5 всі ненульові розв'язки задачі (6.1.2) мають вигляд (6.2.6). При цьому екстремальними розв'язками є $\bar{y}(t) = 0$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.

Фіксуємо деяке $r > 0$ і розглянемо диференціальне рівняння другого порядку з малим параметром:

$$\frac{\varepsilon^2}{2} a(x) \phi_\varepsilon''(x) + b(x) \phi_\varepsilon'(x) = -1, \quad x \in (-r; r) \quad (6.2.7)$$

$$\phi_\varepsilon(-r) = \phi_\varepsilon(r) = 0. \quad (6.2.8)$$

Задача (6.2.7), (6.2.8) має явний розв'язок

$$\phi_\varepsilon(x) = C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)A_\varepsilon(x) - B_\varepsilon(x),$$

де

$$B_\varepsilon(x) = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^x \frac{1}{a(z)} \left[\int_z^x \exp \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} \int_z^p \frac{b(v)}{a(v)} dv \right\} dp \right] dz,$$

$$A_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{b(v)}{a(v)} dv \right\} dz, \quad (6.2.9)$$

$$C_1(\varepsilon) = B_\varepsilon(r) \frac{-A_\varepsilon(-r)}{A_\varepsilon(r) - A_\varepsilon(-r)} + B_\varepsilon(-r) \frac{A_\varepsilon(r)}{A_\varepsilon(r) - A_\varepsilon(-r)}, \quad (6.2.10)$$

$$C_2(\varepsilon) = \frac{B_\varepsilon(r) - B_\varepsilon(-r)}{A_\varepsilon(r) - A_\varepsilon(-r)}.$$

Нас буде цікавити поведінка $\phi_\varepsilon(0) = C_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лема 6.2.4. *Припустимо, що $b(x) > 0$ на $(0, r)$ і $\int_0^r \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$. Тоді*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon(r) = \int_0^r \frac{1}{b(y)} dy = H(r).$$

Аналогічно для $b(x) < 0$ на $(-r, 0)$ і $\int_0^{-r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$ отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon(-r) = - \int_{-r}^0 \frac{1}{b(y)} dy = -K(-r).$$

□ Для доведення леми використаємо метод Лапласа для асимптотики інтегралів [17]. Позначимо $F(p) = - \int_z^p \frac{b(v)}{a(v)} dv$, $p \in [z, r]$, $z > 0$. Зрозуміло, що $F(p) \leq 0$ і монотонно спадає, а значить точка $p = z$ є точкою максимуму. При цьому, $F(p) = 0$, $F'(p) \neq 0$. Використаємо результат [17, Теорема 1.2.3]. Маємо,

$$\int_z^r \exp \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} \int_z^p \frac{b(v)}{a(v)} dv \right\} dv \sim \frac{\varepsilon^2 a(z)}{2b(z)}, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

За теоремою Лебега,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon(r) = \int_0^r \frac{1}{b(y)} dy.$$

Аналогічно,

$$B_\varepsilon(-r) = -\frac{2}{\varepsilon^2} \int_{-r}^0 \frac{1}{a(z)} \left[\int_{-r}^z e^{\frac{z}{\varepsilon^2} G(p)} dp \right] dz,$$

де $G(p) = \int_p^z \frac{b(v)}{a(v)}$, $p \in [-r, z]$, $z < 0$. Очевидно, що $G(p) \leq 0$, $G(p)$ зростає і її точкою максимуму є $p = z$. Знову застосовуючи використану вище теорему, отримуємо друге твердження леми. ■

Дослідження ваг граничної міри приводить до обчислення виразу

$$\Gamma_K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-A_\varepsilon(-K)}{A_\varepsilon(K) - A_\varepsilon(-K)}, \quad (6.2.11)$$

де $A_\varepsilon(x)$ визначено в (6.2.9).

Відмітимо окремий випадок, коли значення Γ_K легко обчислити.

Лема 6.2.5. *Нехай функція $b(x) > 0$ для $x > 0$, функція $\frac{b(x)}{a(x)}$ непарна, виконується умова V_2 і для довільного $\delta > 0$ є збіжним інтеграл $\int_0^\delta \frac{1}{b(x)} dx$.*

Тоді збіжним є інтеграл $\int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(x)} dx$ і $\Gamma_K = \frac{1}{2}$.

□ За умови V_2 інтеграли

$$\int_0^\delta \frac{1}{b(x)} dx \quad \text{і} \quad \int_0^\delta \frac{a(x)}{b(x)} dx$$

збіжними є одночасно. Аналогічно і для інтегралів

$$\int_{-\delta}^0 \frac{1}{b(x)} dx \quad \text{і} \quad \int_{-\delta}^0 \frac{a(x)}{b(x)} dx.$$

Враховуючи непарність, отримуємо, що

$$\int_0^x \frac{a(y)}{b(y)} dy = - \int_{-x}^0 \frac{a(y)}{b(y)} dy.$$

Тобто $A_\varepsilon(r) = -A_\varepsilon(-r)$. Звідси випливає твердження леми. ■

Для обчислення Γ_K в інших випадках використаємо результат теореми роботи [43], який сформулюємо у вигляді леми. Нехай $S(x)$ – числова функція, λ – великий параметр: $\lambda \rightarrow \infty$. Покладемо $M = \sup_{x \in [a, b]} S(x)$ і для $u \geq 0$

$$X(u) = \{x : M - u < S(x) < M\}, \quad H(u) = \text{Leb}\{X(u)\}.$$

Далі,

$$I(\lambda) = \int_a^b \exp\{\lambda S(x)\} dx.$$

Лема 6.2.6. [43]. *Нехай при $u \rightarrow 0+$, $\alpha > 0$ і довільному β*

$$H(u) \sim Cu^\alpha |\ln u|^\beta, \quad (6.2.12)$$

Тоді при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I(\lambda) \sim C\Gamma(\alpha + 1) \exp\{M\} \lambda^{-\alpha} |\ln \lambda|^\beta. \quad (6.2.13)$$

Покладемо

$$L(x) = \int_0^x \frac{b(y)}{a(y)} dy. \quad (6.2.14)$$

Лема 6.2.7. *Нехай $xb(x) > 0$ для $x \neq 0$, тоді:*

1. *Якщо для деяких констант $d > 0$, $\delta > 0$ і довільному γ при $x \rightarrow 0+$*

$$L(x) |\ln L(x)|^\gamma \sim dx^\delta, \quad (6.2.15)$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$A_\varepsilon(r) \sim \left(\frac{2^{\gamma-1}}{d}\right)^{\frac{1}{\delta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \varepsilon^{\frac{2}{\delta}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\gamma}{\delta}}. \quad (6.2.16)$$

2. *Якщо для деяких констант $k > 0$, $\mu > 0$ і довільному θ при $x \rightarrow 0-$*

$$L(x) |\ln L(x)|^\theta \sim k|x|^\mu, \quad (6.2.17)$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$-A_\varepsilon(-r) \sim \left(\frac{2^{\theta-1}}{k}\right)^{\frac{1}{\mu}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \varepsilon^{\frac{2}{\mu}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\theta}{\mu}}. \quad (6.2.18)$$

□ Відмітимо, що функція $(-L(x)) \leq 0$ для довільних x , спадає при $x > 0$ і зростає при $x < 0$,

$$\sup_{x \in [0, r]} (-L(x)) = \sup_{x \in [-r, 0]} (-L(x)) = L(0) = 0.$$

Розглянемо перший пункт. Щоб скористатися лемою 6.2.6, покладемо $S(x) = -L(x)$, $\lambda = \frac{2}{\varepsilon^2}$. У функції $L(x)$ існує обернена $L^{-1}(x)$ і

$$X(u) = \{x : 0 < L(x) < u\} = \{x : 0 < x < L^{-1}(u)\}, \quad H(u) = L^{-1}(u).$$

Умова (6.2.15) еквівалентна умові (6.2.12) з $C = (\frac{1}{d})^{\frac{1}{\delta}}$, $\alpha = \frac{1}{\delta}$, $\beta = \frac{\gamma}{\delta}$. Твердження (6.2.16) випливає з (6.2.13).

Зауважимо, що

$$-A_\varepsilon(-r) = \int_0^r \exp \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} (-L(-x)) \right\} dx.$$

Поклавши $S(x) = -L(-x)$, аналогічно доводимо другу частину леми. ■

Використовуючи лему 6.2.7, нескладно довести наступне твердження.

Лема 6.2.8. *Нехай $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$, виконуються умови (6.2.15) і (6.2.17). Тоді величина Γ_K не залежить від K (тому будемо позначати її просто Γ) і мають місце наступні твердження:*

1. Якщо $\delta = \mu$ і $\gamma = \theta$, то

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{1}{\delta}}}.$$

2. Якщо $\delta < \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma < \theta$, то $\Gamma = 1$.

3. Якщо $\delta > \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma > \theta$, то $\Gamma = 0$.

Виходячи з формул (6.2.10), (6.2.11) и лем 6.2.4, 6.2.5, 6.2.7, 6.2.8, отримуємо наступний результат:

Лема 6.2.9. *В умовах лем 6.2.5, 6.2.8*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(0) = \Gamma H(r) + (1 - \Gamma)(-K(-r)).$$

Позначимо

$$\widehat{b}_n(x) = \begin{cases} b(x) & , \text{ при } x \geq 0, \\ -\frac{b(-\frac{x}{n})a(x)}{na(-\frac{x}{n})}, & \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

$$\bar{b}_n(x) = \begin{cases} -\frac{b(-\frac{x}{n})a(x)}{na(-\frac{x}{n})}, & \text{ при } x > 0, \\ b(x) & , \text{ при } x \leq 0, \end{cases}$$

Замінивши функцію $b(x)$ на одну з цих двох, аналогічно формулам (6.2.9), (6.2.11) визначимо вирази $\widehat{A}_{\varepsilon,n}(x)$, $\bar{A}_{\varepsilon,n}(x)$ і $\widehat{\Gamma}_{r,n}$, $\bar{\Gamma}_{r,n}$ відповідно.

Лема 6.2.10. *Припустимо, що функція $b(x) > 0$ для $x \neq 0$, $a(x) \geq \Lambda^{-1}$ і має місце умова (6.2.15). Тоді для функції*

$$\widehat{L}_n(x) = \int_0^x \frac{\widehat{b}_n(y)}{a(y)} dy$$

мають місце умови (6.2.15) і (6.2.17) з коефіцієнтами γ, d, δ і $\theta = \gamma, k = \frac{d}{n^\delta}, \mu = \delta$ відповідно. Величина $\widehat{\Gamma}_{r,n} = \frac{n}{n+1}$.

Якщо функція $b(x) < 0$ для $x \neq 0$, $a(x) \geq \Lambda^{-1}$ і має місце умова (6.2.17), то для функції

$$\bar{L}_n(x) = \int_0^x \frac{\bar{b}_n(y)}{a(y)} dy$$

мають місце умови (6.2.15) і (6.2.17) з коефіцієнтами $\gamma = \theta, d = \frac{k}{n^\mu}, \delta = \mu$ і θ, k, μ відповідно. Величина $\bar{\Gamma}_{r,n} = \frac{1}{n+1}$.

□ Доведемо твердження для функції $\widehat{L}_n(x)$, для функції $\bar{L}_n(x)$ доведення аналогічне. Маємо при $x < 0$:

$$\widehat{L}_n(x) = -\frac{1}{n} \int_0^x \frac{b(-\frac{y}{n})}{a(-\frac{y}{n})} dy = \int_0^{-\frac{x}{n}} \frac{b(y)}{a(y)} dy = L\left(\frac{|x|}{n}\right),$$

де функція $L(x)$ задається в (6.2.14). Враховуючи те, що з умов леми випливає, що при $x \rightarrow 0+$ $L(x) \ln^\theta L(x) \sim dx^\delta$, тоді при $x \rightarrow 0-$

$$\widehat{L}_n(x) \ln^\gamma \widehat{L}_n(x) = L\left(\frac{|x|}{n}\right) \ln^\gamma L\left(\frac{|x|}{n}\right) \sim d\left(\frac{|x|}{n}\right)^\delta = \frac{d}{n^\delta} |x|^\delta,$$

звідки отримуємо твердження леми. ■

6.3. Результати для рівнянь Іто

Доведемо деякі загальні результати теорії стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) – такі, як існування сильних розв'язків одновимірних СДР і теорему порівняння для них при, взагалі кажучи, розривних коефіцієнтах, але при невиродженому коефіцієнту дифузії.

Розглянемо стохастичні рівняння Іто

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t b(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s), \quad (6.3.1)$$

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t B(\eta(s))ds + \int_0^t \sigma(\eta(s))dw(s). \quad (6.3.2)$$

Розв'язки рівнянь (6.3.1) та (6.3.2) можна розуміти як сильний розв'язок - [8, розділ IV, означення 1.6] і як слабкий - [8, розділ IV, означення 1.2].

Нагадаємо

Означення 6.3.1. [8, розділ IV, означення 1.5] Будемо говорити, що виконується умова *сильної (потраекторної) єдиності* для рівняння (6.3.1), якщо для будь-яких двох розв'язків ξ та ξ' , визначених на одному й тому ж ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з одним і тим же потоком \mathcal{F}_t і одним і тим же одновимірним вінерівським процесом $(w(t), \mathcal{F}_t)$, з рівності $\xi(0) = \xi'(0)$ м.н. випливає, що $\xi(t) = \xi'(t)$ для всіх $t \geq 0$ м.н.

Зауваження 6.3.1. 1. *З сильної єдиності слабого розв'язку випливає існування сильно єдиного сильного розв'язку (принцип Ямада-Ватанабе [1, теорема 1.3, стор. 45]).*

2. *Зі слабкої єдиності сильного розв'язку випливає існування сильно єдиного сильного розв'язку [57].*

Тобто для сильного розв'язку поняття сильної і слабкої єдиності еквівалентні і в подальшому для сильних розв'язків будемо вживати поняття єдиності без уточнення "сильна" чи "слабка".

Теорема 6.3.1. *Нехай процеси $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є єдиними сильними розв'язками рівнянь (6.3.1) і (6.3.2) відповідно. Припустимо, що виконуються умови:*

$$\xi(0) \leq \eta(0), \quad b(x) \leq B(x), \quad (6.3.3)$$

існує стала Λ така, що (тут $a(x) = \sigma^2(x)$)

$$|b(x)|^2 + |B(x)|^2 + a(x) \leq \Lambda(1 + |x|^2), \quad a(x) \geq \Lambda^{-1}. \quad (6.3.4)$$

Тоді для будь-якого $t \geq 0$ $\xi(t) \leq \eta(t)$ м. н.

Доведення теореми 6.3.1.

Як зазначено при доведенні [8, розділ VI, теорема 1.1], достатньо довести теорему для обмежених коефіцієнтів, тобто замість умови (6.3.4) поставити умову

$$|b(x)| + |B(x)| + a(x) \leq \Lambda, \quad a(x) \geq \Lambda^{-1}. \quad (6.3.5)$$

Нехай, як в [28, §II.6], $\zeta(x)$ — додатна, нескінченно диференційована функція, має носій у $[-1, 1]$ і $\int_{-1}^1 \zeta(x) dx = 1$. Для довільної функції $g(x)$ визначимо $g_n(x) = \int_{-1}^1 g(y) \zeta(x - \frac{y}{n}) dy$. За цим правилом визначимо функції $b_n(x)$, $B_n(x)$, $\sigma_n(x)$. Ці функції є нескінченно диференційованими, обмежені рівномірно по n і збігаються до граничних функцій майже всюди. Розглянемо рівняння

$$\xi_n(t) = \xi(0) + \int_0^t b_n(\xi_n(s)) ds + \int_0^t \sigma_n(\xi_n(s)) dw(s), \quad (6.3.6)$$

$$\eta_n(t) = \eta(0) + \int_0^t B_n(\eta_n(s)) ds + \int_0^t \sigma_n(\eta_n(s)) dw(s). \quad (6.3.7)$$

Рівняння (6.3.6), (6.3.7) мають єдині сильні розв'язки. З (6.3.3) випливає, що $b_n(x) \leq B_n(x)$. Тому в силу [8, розділ VI, теорема 1.1],

$$\mathbf{P}\{\xi_n(t) \leq \eta_n(t), \forall t \geq 0\} = 1. \quad (6.3.8)$$

За умов теореми для моментів розв'язків мають місце нерівності

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\xi_n(t)|^2 + \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |\eta_n(t)|^2 \leq C,$$

для $t, s \in [0, T]$, і

$$\mathbf{E} \sup_{|t-s| \leq h} |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^2 \leq Ch, \quad \mathbf{E} \sup_{|t-s| \leq h} |\eta_n(t) - \eta_n(s)|^2 \leq Ch,$$

зі сталою C , що не залежить від n .

Використовуючи метод Скорохода нового ймовірнісного простору [8, розділ I, теорема 4.2], знайдемо інший ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbf{P}})$, процеси на ньому $\tilde{\xi}_n(t), \tilde{\eta}_n(t), \tilde{\xi}(t), \tilde{\eta}(t)$ такі, що за деякою підпоследовністю, яку знову позначимо n ,

$$\tilde{\mathbf{P}}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}) = 0\} = 1, \quad \tilde{\mathbf{P}}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\tilde{\eta}_n, \tilde{\eta}) = 0\} = 1. \quad (6.3.9)$$

Крім того, розподіл пари $(\tilde{\xi}_n(t), \tilde{\eta}_n(t))$ співпадає з розподілом $(\xi_n(t), \eta_n(t))$. Звідси і з (6.3.8), (6.3.9) випливає

$$\tilde{\mathbf{P}}\{\tilde{\xi}(t) \leq \tilde{\eta}(t), \forall t \geq 0\} = 1. \quad (6.3.10)$$

В доведенні [28, теорема 1, §II.6] встановлено, що на просторі $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbf{P}})$ існують вінерівські процеси $\tilde{w}_n(t)$ такі, що

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_n(t) &= \xi(0) + \int_0^t b(\tilde{\xi}_n(s)) ds + \int_0^t \sigma_n(\tilde{\xi}_n(s)) d\tilde{w}_n(s), \\ \tilde{\eta}_n(t) &= \eta(0) + \int_0^t B(\tilde{\eta}_n(s)) ds + \int_0^t \sigma_n(\tilde{\eta}_n(s)) d\tilde{w}_n(s). \end{aligned}$$

Далі, використовуючи оцінку Крилова, при доведенні цитованої вище теореми встановлюється, що для процесів $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ мають місце рівності

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(t) &= \xi(0) + \int_0^t b(\tilde{\xi}(s))ds + \int_0^t \sigma(\tilde{\xi}(s))d\tilde{w}(s), \\ \tilde{\eta}(t) &= \eta(0) + \int_0^t B(\tilde{\eta}(s))ds + \int_0^t \sigma(\eta(s))d\tilde{w}(s).\end{aligned}$$

з деяким вінерівським процесом $\tilde{w}(t)$. Тобто процеси $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ є слабкими розв'язками рівнянь (6.3.1) і (6.3.2) відповідно. Згідно [14, наслідок 3 теореми 5] процеси $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ насправді є єдиними сильними розв'язками рівнянь (6.3.1), (6.3.2) на ймовірнісному просторі $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$. Тому розподіли процесів $(\xi(t), \eta(t))$ і $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\eta}(t))$ співпадають. Звідси і з (6.3.10) випливає твердження теореми за умови (6.3.5), а, отже, і в загальному випадку (6.3.4). *Теорему 6.3.1 доведено.*

За умови V_2 існує єдиний слабкий розв'язок рівняння (6.3.1) [81, зауваження 2.1 і теорема 2.17]. Нижче буде показано, що за умов V_2, V_3 існує єдиний сильний розв'язок рівняння (6.3.1).

Теорема 6.3.2. *Нехай виконуються умови V_2, V_3 . Тоді рівняння (6.3.1) має єдиний сильний розв'язок.*

Доведення теореми 6.3.2. Доведемо потраекторну єдиність розв'язку рівняння (6.3.1). Тоді твердження теореми буде впливати з [8, розділ IV, теорема 1.1]. Нехай процеси $\xi(t)$ і $\hat{\xi}(t)$ є розв'язками вказаного рівняння. Визначимо моменти $\tau_N = \inf\{t : |\xi(t)| \geq N\}$, $\hat{\tau}_N = \inf\{t : |\hat{\xi}(t)| \geq N\}$. З рівняння (6.3.1) випливає, що

$$\xi(t \wedge \tau_N) = \xi(0) + \int_0^{t \wedge \tau_N} b(\xi(s))ds + \int_0^{t \wedge \tau_N} \sigma(\xi(s))dw(s),$$

або

$$\xi(t \wedge \tau_N) = \xi(0) + \int_0^t b(\xi(s))I_{[0, \tau_N]}(s)ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))I_{[0, \tau_N]}(s)dw(s). \quad (6.3.11)$$

Для функції $f(x)$ і натурального N покладемо

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq N, \\ f(N), & x > N, \\ f(-N), & x < -N. \end{cases}$$

За цим правилом побудуємо функції $b_N(x)$, $\sigma_N(x)$ і визначимо процес $\xi_N(t) = \xi(t \wedge \tau_N)$ як розв'язок рівняння

$$\xi_N(t) = \xi(0) + \int_0^t b_N(\xi_N(s))ds + \int_0^t \sigma_N(\xi_N(s))dw(s). \quad (6.3.12)$$

Згідно [87] розв'язок рівняння (6.3.12) потраєкторно єдиний, тому

$$\mathbf{P}\{\xi(t \wedge \tau_N) = \xi_N(t \wedge \gamma_N) \text{ для довільного } t \geq 0\} = 1,$$

де $\gamma_N = \inf\{t : |\xi_N(t)| \geq N\}$. Аналогічно,

$$\mathbf{P}\{\hat{\xi}(t \wedge \hat{\tau}_N) = \xi_N(t \wedge \gamma_N) \text{ для довільного } t \geq 0\} = 1.$$

Тому

$$\mathbf{P}\{\xi(t \wedge \tau_N) = \hat{\xi}(t \wedge \hat{\tau}_N) \text{ для довільного } t \geq 0\} = 1. \quad (6.3.13)$$

Доведемо, що для будь-якого скінченного T

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tau_N \leq T\} = 0. \quad (6.3.14)$$

Використовуючи умову V_2 , з (6.3.11) стандартно доводиться оцінка

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}|\xi(t \wedge \tau_N)|^2 \leq C(1 + |\xi(0)|^2)$$

зі сталою C , що не залежить від N . Застосовуючи нерівність Чебишева, маємо:

$$\mathbf{P}\{\tau_N \leq T\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0, T]} |\xi_N(t)| > N\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0, T]} |\xi(t \wedge \tau_N)| > N \right\} \leq \frac{C(1 + |\xi(0)|^2)}{N^2}.$$

Звідси випливає (6.3.14). Аналогічно, для будь-якого скінченного T

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\hat{\tau}_N \leq T\} = 0.$$

Оскільки $\tau_N \uparrow \infty$ і $\hat{\tau}_N \uparrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то в силу (6.3.13)

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = \hat{\xi}(t) \text{ для довільного } t \geq 0\} = 1.$$

Звідси і з неперервності процесів $\xi(t)$, $\hat{\xi}(t)$ отримаємо для будь-якого скінченного T

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0, T]} |\xi(t) - \hat{\xi}(t)| = 0 \right\} = 1.$$

Теорему 6.3.2 доведено.

Розглянемо наступне стохастичне рівняння Іто:

$$x_\varepsilon(t) = \int_0^t b(x_\varepsilon(s))ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(x_\varepsilon(s))dw(s), \quad t \geq 0. \quad (6.3.15)$$

Поставимо йому у відповідність задачу (6.1.2). Позначимо через ϑ_ε міру, породжену процесом $x_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(\mathbb{C}[0, \infty), \mathcal{C})$.

Лема 6.3.1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (6.3.15) виконується умова V_2 . Тоді сім'я мір $\{\vartheta_\varepsilon\}$ слабо компактна і кожна його гранична точка має носій в \mathfrak{A} .*

□ З лінійної обмеженості коефіцієнтів випливають стандартні для теорії стохастичних рівнянь оцінки:

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} |x_\varepsilon(t)|^2 \leq C, \quad \forall T < \infty, \quad \mathbf{E}|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)|^2 \leq C|t - s|, \quad (6.3.16)$$

зі сталою C , що не залежить від ε . З цих оцінок випливає вказана слабка компактність мір [16, пропозиція 4.1, стор.330]. З рівняння (6.3.15) для

$f(\cdot) \in \mathbb{C}[0, \infty)$

$$\mathbb{E}^{\vartheta_\varepsilon} \left(f(t) - \int_0^t b(f(s)) ds \right)^2 = \varepsilon^2 \mathbb{E} \int_0^t a(f(s)) ds.$$

З (6.3.16), неперервності функції $b(x)$ отримаємо для будь-якої граничної міри ϑ при будь-якому $t \geq 0$.

$$\mathbb{E}^\vartheta \left(f(t) - \int_0^t b(f(s)) ds \right)^2 = 0.$$

Звідки і випливає твердження леми. ■

На просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$ для $a \geq 0$ визначимо функціонал

$$\tau_a(f) = \inf\{t > 0 : |f(t)| \geq a\}.$$

Лема 6.3.2. *Нехай $\vartheta_\varepsilon \Rightarrow \vartheta$, тоді для будь-якого $a > 0$*

$$\varliminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \tau_a(f) \vartheta_\varepsilon(df) \geq \int \tau_a(f) \vartheta(df). \quad (6.3.17)$$

□ Доведемо спочатку, що функціонал $\tau_a(f)$ напівнеперервний знизу. Для цього треба перевірити [58, стор.85], що якщо для деякої $f \in \mathbb{C}[0, \infty)$ і довільного $N < \infty$ $\tau_a(f) > N$, то існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якої функції $g(t)$ з множини $\{g : \rho(f, g) < \delta\}$ маємо $\tau_a(g) \geq N$. Оскільки $\tau_a(f) > N$, то $\sup_{t \in [0, N]} |f(t)| = a_0 < a$. Виберемо $\delta = a - a_0$. Тоді

$$\sup_{t \in [0, N]} |g(t)| \leq \sup_{t \in [0, N]} |g(t) - f(t)| + \sup_{t \in [0, N]} |f(t)| < \delta + a_0 = a.$$

Звідси $\tau_a(g) \geq N$ і напівнеперервність знизу встановлена. Рівність (6.3.17) випливає з доведеної напівнеперервності знизу, обмеженості знизу функціонала $\tau_a(f)$ і [61, властивість (5.1.15)]. ■

Використаємо ймовірнісне зображення розв'язку задачі (6.2.7), (6.2.8) [16, §15, теорема 2]. Тоді $\int \tau_r(f) \vartheta_\varepsilon(df) = \phi_\varepsilon(0)$. З лем 6.2.5, 6.2.8 і 6.3.2 випливає

Лема 6.3.3. *Нехай виконуються умови $A_1, V_2, \vartheta_\varepsilon \Rightarrow \vartheta$ і умови або лєми 6.2.5, або лєми 6.2.8. Тоді*

$$\int \tau_r(f) \vartheta(df) \leq \Gamma H(r) - (1 - \Gamma)K(-r). \quad (6.3.18)$$

Лема 6.3.4. *В умовах лєми 6.3.3 для $f(\cdot) \in \mathfrak{R}$*

$$\vartheta(f(\tau_r) = r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta_\varepsilon(f(\tau_r) = r) = \Gamma, \quad (6.3.19)$$

$$\vartheta(f(\tau_r) = -r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta_\varepsilon(f(\tau_r) = -r) = 1 - \Gamma. \quad (6.3.20)$$

□ З нерівності (6.3.18) випливає, що

$$\vartheta\{f : \tau_r(f) = \infty\} = 0.$$

В [16, §15, теорема 2], встановлено, що

$$\vartheta_\varepsilon\{f : \tau_r(f) < \infty\} = 1.$$

Перші рівності в (6.3.19), (6.3.20) випливають тепер з [63, пропозиція 3.4].

Далі, в [16, §15, теорема 4], доведено, що

$$\vartheta_\varepsilon(f(\tau_r) = r) = \frac{-A_\varepsilon(-r)}{A_\varepsilon(r) - A_\varepsilon(-r)}.$$

Другі рівності в (6.3.19), (6.3.20) випливають з лем 6.2.5, 6.2.8. ■

Лема 6.3.5. *В умовах лєми 6.3.3*

$$\int_{\mathfrak{R}} \tau_r(f) \vartheta(df) = \Gamma H(r) - (1 - \Gamma)K(-r).$$

□ Враховуючи те, що найшвидше з інтервалу $(-r, r)$ в множині \mathfrak{R} виходять екстремальні розв'язки (зауваження 6.2.3) і враховуючи (6.3.19), (6.3.20), будемо мати

$$\int \tau(f) \vartheta(df) \geq \tau(\bar{y}) \vartheta\{f : f(\tau_r) = r\} + \tau(\underline{y}) \vartheta\{f : f(\tau_r) = -r\} =$$

$$= \Gamma H(r) + (1 - \Gamma)(-K(-r)).$$

Аналогічна оцінка зверху для $\int \tau_r(f) \vartheta(df)$ встановлена в (6.3.18). ■

Теорема 6.3.3. *Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (6.3.15) мають місце умови V_1 , V_2 , A_1 , (6.2.15), (6.2.17). Тоді для мір $\{\vartheta_\varepsilon\}$, породжених розв'язками (6.3.15), і для довільного неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$, має місце рівність*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(f) \vartheta_\varepsilon(df) = \Gamma F(\bar{y}) + (1 - \Gamma)F(\underline{y}), \quad (6.3.21)$$

де \bar{y} , \underline{y} - екстремальні розв'язки рівняння (6.1.2), а величина Γ задається лемою 6.2.8.

Доведення. Нехай міра ϑ є граничною точкою для послідовності $\{\vartheta_\varepsilon\}_\varepsilon$, тобто за деякою підпослідовністю $\hat{\varepsilon}$ маємо $\vartheta_{\hat{\varepsilon}} \Rightarrow \vartheta$. Представлення міри ϑ отримаємо з леми 6.3.5. Використовуючи (6.3.19), (6.3.20)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} \tau_r(f) \vartheta(df) &= \tau(\bar{y}) \vartheta\{f : f(\tau_r) = r\} + \tau(\underline{y}) \vartheta\{f : f(\tau_r) = -r\} = \\ &= \tau(\bar{y})\Gamma + \tau(\underline{y})(1 - \Gamma) \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Цій рівності задовольняє міра ϑ , що для $A \in \mathcal{C}$ допускає представлення

$$\vartheta(A) = \Gamma I_A(\bar{y}) + (1 - \Gamma)I_A(\underline{y}). \quad (6.3.23)$$

В силу єдиності слабкої границі послідовності мір, це і є гранична міра. Рівність (6.3.22) має місце для будь-якої граничної точки послідовності $\{\vartheta_\varepsilon\}_\varepsilon$, то $\vartheta_\varepsilon \Rightarrow \vartheta$ і міра ϑ визначається через (6.3.23). Формула (6.3.21) є наслідком слабкої збіжності і рівності (6.3.23). *Теорему 6.3.3 доведено.*

Наступний результат узагальнює теорему з [12] і, використовуючи лему 6.2.5, доводиться аналогічно теоремі 6.3.3.

Теорема 6.3.4. *Нехай виконуються умови V_1 , V_2 , функція $b(x) > 0$ при $x > 0$ і функція $\frac{b(x)}{a(x)}$ непарна, інтеграл $\int_0^\delta \frac{1}{b(x)} dx$ збіжний для будь-якого $\delta > 0$. Тоді гранична міра ϑ зосереджена на верхньому і нижньому екстремальних розв'язках задачі (6.1.2) з вагами, рівними $1/2$.*

При дослідженні випадків $A_2 - A_5$ буде застосовуватись теорема порівняння. Тому тут потрібні сильні розв'язки стохастичних рівнянь.

Теорема 6.3.5. *Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (6.3.15) мають місце умови V_1 , V_2 , V_3 .*

1. *У випадках A_2 і A_4 за умови (6.2.15) гранична міра для послідовності $\{\vartheta_\varepsilon\}$ зосереджена на верхньому екстремальному розв'язку задачі (6.1.2).*

2. *У випадках A_3 і A_5 за умови (6.2.17) гранична міра для послідовності $\{\vartheta_\varepsilon\}$ зосереджена на нижньому екстремальному розв'язку задачі (6.1.2).*

Доведення. Дослідження всіх згаданих випадків проводиться аналогічно. Тому розглянемо лише випадок A_2 .

Визначимо послідовність процесів $\hat{x}_{n,\varepsilon}(t)$ як розв'язки рівнянь

$$\hat{x}_{n,\varepsilon}(t) = \int_0^t \hat{b}_n(\hat{x}_{n,\varepsilon}(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(\hat{x}_{n,\varepsilon}(s)) dw(s).$$

Оскільки $\hat{b}_n(x) \leq b(x)$, то з теореми 6.3.1 для будь-якого скінченного T отримаємо

$$\mathbb{P}\{\hat{x}_{n,\varepsilon}(t) \leq x_\varepsilon(t), \forall t \in [0, T]\} = 1.$$

Виберемо довільне $\delta > 0$. Тоді для будь-якого $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{x_\varepsilon(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} \geq \mathbb{P}\{x_{n,\varepsilon}(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\}. \quad (6.3.24)$$

При будь-якому $t \geq 0$ множина $\{f \in \mathfrak{X} : f(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\}$ замкнена в топології рівномірної збіжності на компактах. Оскільки $\vartheta_\varepsilon \Rightarrow \vartheta$, то з властивостей

слабкої збіжності [59, теорема 1, стор. 331], для будь-якого $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \vartheta\{f(t) \in \mathfrak{R} : f(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} &\geq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta_\varepsilon\{f(t) \in \mathfrak{R} : f(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} = \\ &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\{x_\varepsilon(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\{x_{n,\varepsilon}(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\}. \end{aligned}$$

Звідси і з (6.3.24), продовжуючи ланцюжок, будемо мати

$$\vartheta\{f(t) \in \mathfrak{R} : f(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} \geq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\left\{x_{n,\varepsilon}(t) > \bar{y}(t) - \frac{\delta}{2}\right\}.$$

При будь-якому $t \geq 0$ множина $D(t) = \left\{f \in \mathfrak{R} : f(t) > \bar{y}(t) - \frac{\delta}{2}\right\}$ відкрита в топології рівномірної збіжності на компактах, а індикатор цієї множини $I_{D(t)}(y)$ як функція $y \in$ напівнерперервною знизу функцією. Застосовуючи [59, властивість (VII) зауваження 1, стор. 333], (6.3.21) і лему 6.2.10, отримаємо

$$\vartheta\{f(t) \in \mathfrak{R} : f(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} \geq \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} I_{[\bar{y}(t) - \frac{\delta}{2}, \infty)}(\underline{y}(t)).$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо, що для довільного $\delta > 0$

$$\vartheta\{f(t) \in \mathfrak{R} : f(t) \geq \bar{y}(t) - \delta\} = 1.$$

Теорему 6.3.5 доведено.

6.4. Результати для рівнянь з локальним часом

Розглядаємо рівняння (6.1.1). Відомо, що за умов V_2 і V_4 існує єдиний слабкий розв'язок цього рівняння [67, теорема 4.35]. За допомогою зв'язку між розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом і розв'язками рівнянь Іто (лема 3.2.2), доводиться теорема.

Теорема 6.4.1. *Нехай виконуються умови V_2 , V_3 , V_4 . Тоді рівняння (6.1.1) має єдиний сильний розв'язок.*

Позначимо

$$A_\varepsilon^*(x) = \int_0^x \exp \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^t \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn}s)b((1 + \beta \operatorname{sgn}s)s)}{a((1 + \beta \operatorname{sgn}s)s)} ds \right] dt, \quad (6.4.1)$$

$$\Gamma_K^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-A_\varepsilon^*(-K)}{A_\varepsilon^*(K) - A_\varepsilon^*(-K)}. \quad (6.4.2)$$

Лема 6.4.1. *Нехай $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$, виконуються умови (6.2.15) і (6.2.17). Тоді величина Γ_K^* визначена в (6.4.2) не залежить від K (тому будемо позначати її просто Γ^*) і мають місце наступні твердження:*

1. Якщо $\delta = \mu$ і $\gamma = \theta$, то

$$\Gamma^* = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} \left(\frac{k}{d} \right)^{\frac{1}{\delta}}}.$$

2. Якщо $\delta < \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma < \theta$, то $\Gamma^* = 1$.

3. Якщо $\delta > \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma > \theta$, то $\Gamma^* = 0$.

□ Позначимо

$$L^*(x) = \int_0^x \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn}y)b((1 + \beta \operatorname{sgn}y)y)}{a((1 + \beta \operatorname{sgn}y)y)} dy.$$

Розглянемо випадок $x > 0$. Будемо мати:

$$L^*(x) = \int_0^x \frac{(1 + \beta)b((1 + \beta)y)}{a((1 + \beta)y)} dy = \int_0^{(1+\beta)x} \frac{b(y)}{a(y)} dy = L((1 + \beta)x),$$

де функція $L(x)$ визначена в (6.2.14). Тоді з умови (6.2.15) маємо

$$L^*(x) |\ln L^*(x)|^\gamma \sim d(1 + \beta)^\delta x^\delta = d^* x^\delta,$$

де $d^* = d(1 + \beta)^\delta$.

При $x < 0$ з умови (6.2.17) аналогічно отримуємо

$$L^*(x) |\ln L^*(x)|^\gamma \sim k^* |x|^\mu,$$

де $k^* = k(1 - \beta)^\mu$.

Скориставшись тепер лемою 6.2.8, отримаємо твердження даної. ■

Позначимо через μ_ε міру, породжену процесом $\xi_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(\mathbb{C}[0, \infty), \mathcal{C})$. Основними результатами даного розділу є наступні 2 теореми.

Теорема 6.4.2. *Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (6.1.1) мають місце умови V_1, V_2, V_4, A_1 , (6.2.15), (6.2.17). Тоді для мір $\{\mu_\varepsilon\}$ і для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$ має місце рівність*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(f) \mu_\varepsilon(df) = \Gamma^* F(\bar{y}) + (1 - \Gamma^*) F(\underline{y}), \quad (6.4.3)$$

де \bar{y}, \underline{y} - екстремальні розв'язки задачі (6.1.2), а величина Γ^* визначена лемою 6.4.1.

При дослідженні випадків $A_2 - A_5$ буде застосовано теорему порівняння. Тому тут потрібні сильні розв'язки стохастичних рівнянь.

Теорема 6.4.3. *Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (6.1.1) має місце умова (V).*

У випадках A_2 і A_4 за умов (6.2.15) гранична міра для послідовності $\{\mu_\varepsilon\}$ зосереджена на верхньому екстремальному розв'язку задачі (6.1.2).

У випадках A_3 і A_5 за умов (6.2.17) гранична міра для послідовності $\{\mu_\varepsilon\}$ зосереджена на нижньому екстремальному розв'язку задачі (6.1.2).

Доведення теореми 6.4.2. За формулами (3.2.8)-(3.2.9) введемо функції $\kappa(x), \varphi(x), \tilde{b}(x), \tilde{\sigma}(x)$, та розглянемо таке стохастичне рівняння Іто

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \tilde{b}(\eta_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta_\varepsilon(s)) dw(s), \quad t \in [0, 1]. \quad (6.4.4)$$

Зауважимо, що для функцій $\tilde{b}(t), \tilde{\sigma}(t)$ так само мають місце умови (V) і та ж умова з $A_1 - A_5$, що й для $b(t), \sigma(t)$. Рівняння (6.4.4) має єдиний слабкий розв'язок згідно з [11] і з леми 3.2.2 маємо $\eta_\varepsilon(t) = \varphi(\xi_\varepsilon(t))$.

Рівнянню (6.4.4) відповідає наступна задача Коші:

$$\dot{z}(t) = \tilde{b}(z(t)), \quad z(0) = 0. \quad (6.4.5)$$

За лемами 6.2.2, 6.2.3 для задачі (6.4.5) маємо наступний результат: це рівняння має розв'язки одного з двох типів:

$$z_\lambda(t) = \tilde{H}^{-1}((t - \lambda)^+), \quad \lambda \geq 0,$$

$$z_\mu(t) = \tilde{K}^{-1}(-(t - \mu)^+), \quad \mu \geq 0,$$

де $\tilde{H}(x) = \int_0^x \frac{1}{\tilde{b}(y)} dy$ для $x \geq 0$; $\tilde{K}(x) = \int_x^0 \frac{1}{\tilde{b}(y)} dy$ для $x \leq 0$.

Зрозуміло, що $\tilde{H}^{-1}(t)$ та $\tilde{K}^{-1}(-t)$ є найбільшим і найменшим з усіх і є тими розв'язками, які першими виходять з $[-r, r]$. Будемо називати ці розв'язки екстремальними (відповідно верхнім і нижнім) і позначати $\bar{z}(t)$, $\underline{z}(t)$.

З введеного очевидно, що $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ є додатними (при $t > 0$) та монотонно зростаючими, а $\underline{y}(t)$, $\underline{z}(t)$ - відповідно від'ємними та спадними. Встановимо зв'язок між екстремальними розв'язками (6.1.2) та (6.4.5). Має місце такий результат:

Лема 6.4.2. $\bar{y}(t) = \kappa(\bar{z}(t))$, $\underline{y}(t) = \kappa(\underline{z}(t))$.

□ Доведемо для функції $\bar{y}(t)$, для $\underline{y}(t)$ - аналогічно. Нехай функція $y(t)$ - довільний розв'язок задачі (6.1.2). Розглянемо функцію $z(t) = \varphi(y(t))$. Функції з множини \mathfrak{A} не змінюють свого знаку, тому з (6.1.2) будемо мати

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{y(t)}{1 + \beta \operatorname{sgn} y(t)} = \frac{1}{1 + \beta \operatorname{sgn} y(t)} \int_0^t b(\kappa(\varphi(y(s)))) ds = \\ &= \int_0^t \frac{b(\kappa(\varphi(y(s))))}{1 + \beta \operatorname{sgn} \varphi(y(s))} ds = \int_0^t \tilde{b}(z(s)) ds. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що функція $z(t) = \varphi(y(t))$ є розв'язком задачі (6.4.5). Функція $\varphi(x)$ є строго зростаючою, тому отримуємо

$$z(t) = \varphi(y(t)) \leq \varphi(\bar{y}(t)) = \bar{z}(t). \blacksquare$$

Позначимо через ν_ε міру, породжену процесом $\eta_\varepsilon(\cdot)$ на просторі $(\mathbb{C}[0, \infty), \mathcal{C})$.

З умов теореми 6.4.2 випливає, що для коефіцієнтів процесу $\eta_\varepsilon(t)$ мають місце умови теореми 6.3.3. Тому міри $\{\nu_\varepsilon\}_\varepsilon$ слабо збігаються до деякої міри ν , зосередженої на \bar{z} та \underline{z} , тобто для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$, має місце

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(f) \nu_\varepsilon(df) = \tilde{\Gamma} F(\bar{z}) + (1 - \tilde{\Gamma}) F(\underline{z}), \quad (6.4.6)$$

де гранична міра ν задається правою частиною рівності (6.4.6), тобто

$$\nu(A) = \tilde{\Gamma} I_{\{\bar{z}(\cdot) \in A\}} + (1 - \tilde{\Gamma}) I_{\{\underline{z}(\cdot) \in A\}};$$

\bar{z}, \underline{z} - екстремальні розв'язки задачі (6.4.5), а величина $\tilde{\Gamma}$ визначається формулою (6.2.11) для функцій $\tilde{b}(t), \tilde{\sigma}(t)$. Підставивши в (6.2.11) функції $\tilde{b}(t), \tilde{\sigma}(t)$, отримаємо, що $\tilde{\Gamma} = \Gamma^*$, де величина Γ^* визначена в (6.4.2).

Далі, з означення міри, породженої процесом, маємо:

$$\mu_\varepsilon\{A\} = \mathbf{P}\{\xi_\varepsilon(\cdot) \in A\} = \mathbf{P}\{\kappa(\eta_\varepsilon(\cdot)) \in A\} = \mathbf{P}\{\eta_\varepsilon(\cdot) \in \varphi(A)\} = \nu_\varepsilon\{\varphi(A)\}.$$

З (6.4.6) та леми 6.4.2 можемо отримати

$$\begin{aligned} \nu(\varphi(A)) &= \tilde{\Gamma} I_{\{\bar{z}(\cdot) \in \varphi(A)\}} + (1 - \tilde{\Gamma}) I_{\{\underline{z}(\cdot) \in \varphi(A)\}} = \\ &= \tilde{\Gamma} I_{\{\kappa(\bar{z}(\cdot)) \in A\}} + (1 - \tilde{\Gamma}) I_{\{\kappa(\underline{z}(\cdot)) \in A\}} = \Gamma^* I_{\{\bar{y}(\cdot) \in A\}} + (1 - \Gamma^*) I_{\{\underline{y}(\cdot) \in A\}} = \mu(A), \end{aligned}$$

де міра μ визначається правою частиною рівності (6.4.3).

Використовуючи все це, для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F , заданого на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$, будемо мати

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(y) \mu_\varepsilon\{dy\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(y) \nu_\varepsilon\{\varphi(dy)\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(\kappa(y)) \nu_\varepsilon \{dy\} = \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(\kappa(y)) \nu \{dy\} = \\
&= \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(y) \nu \{\varphi(dy)\} = \int_{\mathbb{C}[0, \infty)} F(y) \mu \{dy\}.
\end{aligned}$$

Теорему 6.4.2 доведено.

Доведення теореми 6.4.3. Аналогічно до доведення теореми 6.4.2 спочатку для процесу $\eta_\varepsilon(t)$ за допомогою теореми 6.3.5 (з відповідними змінами) встановлюємо збіжність мір, породжених розв'язками (6.4.4) до міри, зосередженої на верхньому екстремальному розв'язку відповідної задачі Коші (6.4.5), а потім повертаємось до процесу $\xi_\varepsilon(t)$.

Теорему 6.4.3 доведено.

6.5. Приклади

1. Нехай в рівнянні (6.1.1) коефіцієнти мають вигляд

$$b(x) = \begin{cases} x^{\alpha_1}, & x \geq 0, \\ -C|x|^{\alpha_2}, & x \leq 0, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, & x \geq 0, \\ \sigma_2, & x < 0, \end{cases}$$

зі сталими $C > 0$, $\sigma_i > 0$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2$.

Якщо $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = 1$, то перший з інтегралів в (6.2.1) збіжний, а другий - розбіжний, тобто маємо випадок A_2 і $\underline{y}(t) = 0$ за лемою 6.2.3. Аналогічно, якщо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 < 1$, то маємо випадок A_3 і $\bar{y}(t) = 0$.

Якщо $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, то має місце випадок A_1 і

$$L(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha_1+1}}{\sigma_1^2(\alpha_1+1)}, & x \geq 0, \\ -\frac{C|x|^{\alpha_2+1}}{\sigma_2^2(\alpha_2+1)}, & x < 0. \end{cases}$$

Тобто мають місце умови (6.2.15) і (6.2.17) з константами

$\gamma = 0$, $d = \frac{1}{\sigma_1^2(\alpha_1 + 1)}$, $\delta = \alpha_1 + 1$; $\theta = 0, k = \frac{C}{\sigma_2^2(\alpha_2 + 1)}$, $\mu = \alpha_2 + 1$, а значить, виконуються умови теореми 6.4.2.

Отже, маємо:

1. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha < 1$, то

$$\Gamma^* = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} \left(\frac{C\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}.$$

2. Якщо $\alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, то $\Gamma^* = 1$.

3. Якщо $\alpha_2 < \alpha_1 \leq 1$, то $\Gamma^* = 0$.

З теорем 6.4.2, 6.4.3 маємо, що гранична міра зосереджена з вагою Γ^* на верхньому екстремальному розв'язку і з вагою $1 - \Gamma^*$ на нижньому екстремальному розв'язку відповідної задачі Коші (6.1.2).

2. Нехай в рівнянні (6.1.1) $\sigma(x)$ має вигляд, як в прикладі 1, а коефіцієнт зносу дорівнює

$$b(x) = \begin{cases} x^\alpha (|\ln x| + 1), & x > 0, \\ -|x|^\alpha, & x \leq 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тоді має місце умова A_1 і умови теореми 6.4.2. Границю (6.4.2) можна обчислити за допомогою леми 6.4.1, оскільки мають місце умови (6.2.15) і (6.2.17) з константами $\gamma = -1, d = \frac{1}{\sigma_1^2(\alpha + 1)}, \delta = \alpha + 1; \theta = 0, k = \frac{1}{\sigma_2^2(\alpha + 1)}, \mu = \alpha + 1$.

Отже, згідно лемі 6.4.1 маємо $\Gamma^* = 1$. Отже, за теоремою 6.4.2, гранична міра зосереджена на верхньому екстремальному розв'язку задачі Коші (6.1.2).

3. Нехай в рівнянні (6.1.1) коефіцієнти мають вигляд

$$b(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0, \\ -|x|^\alpha, & x \leq 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2 - \cos x, & x \geq 0, \\ 2 + \cos x, & x < 0. \end{cases}$$

В цьому випадку виконується умова A_1 і умови теореми 6.4.2, значить має місце слабка збіжність. Границю (6.4.2) можна обчислити за допомогою леми 6.4.1, оскільки в цьому випадку будемо мати асимптотичну еквівалентність: при $x \rightarrow 0+$

$$L(x) \sim \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1},$$

а при $x \rightarrow 0-$

$$L(x) \sim \frac{1}{9(\alpha + 1)} |x|^{\alpha+1}.$$

Мають місце умови (6.2.15) и (6.2.17) з константами

$$\gamma = 0, d = \frac{1}{\alpha + 1}, \delta = \alpha + 1; \quad \theta = 0, k = \frac{1}{9(\alpha + 1)}, \mu = \alpha + 1.$$

Отже, за лемою 6.4.1

$$\Gamma^* = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} 9^{\frac{1}{\alpha+1}}}$$

і гранична міра зосереджена з вагою Γ^* на верхньому екстремальному розв'язку і з вагою $1 - \Gamma^*$ на нижньому екстремальному розв'язку відповідної задачі Коші (6.1.2).

Висновки до розділу 6. В даному розділі отримані умови існування єдиного сильного розв'язку для стохастичних рівнянь Іто та для стохастичних рівнянь з локальним часом для розривних коефіцієнтів, але при невідродженій дифузії.

Доведено теорему порівняння для розв'язків стохастичних рівнянь Іто з зазначеними вище коефіцієнтами.

Отримані умови слабкої збіжності мір, породжених стохастичними рівняннями Іто або рівняннями з локальним часом при неперервному зносу та розривній, але невиродженій дифузії, до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші.

ВИСНОВКИ

Основними результатами, отриманими в дисертації, є наступні:

1. Доведена слабка збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто або стохастичних рівнянь з локальним часом, коефіцієнти яких нерегулярно залежать від параметру ε . Встановлені необхідні й достатні умови цієї збіжності. Виписане рівняння для граничних процесів.

2. Обґрунтований принцип великих відхилень на просторі $\mathbb{C}[0, \infty)$ для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами та малим коефіцієнтом дифузії і для мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом та з малим коефіцієнтом дифузії. Знайдені функціонали дії.

3. Встановлений принцип великих відхилень на просторі \mathbf{C}_∞ для мір, породжених парою з розв'язку стохастичного рівняння і часу знаходження цього розв'язку в додатній півплощині. Досліджуються стохастичні рівняння Іто і стохастичні рівняння з локальним часом для розривних коефіцієнтів та з малим коефіцієнтом дифузії. Знайдені функціонали дії.

4. Отримано функціональний закон типу повторного логарифму для стохастичного рівняння Іто з нульовим зносом та розривним коефіцієнтом дифузії, який проте є відокремленою від нуля обмеженою функцією обмеженої варіації.

5. Доведено функціональний закон типу повторного логарифму для косяго броунівського руху.

6. Встановлено теорему порівняння для розв'язків стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами, але невиродженою дифузиею.

7. З'ясовані умови існування єдиного сильного розв'язку для стохастич-

них рівнянь з локальним часом з розривними коефіцієнтами, але не виродженою дифузиею, та для стохастичних рівнянь Іто з розривними коефіцієнтами, але не виродженою дифузиею.

8. Отримані умови слабкої збіжності мір, породжених стохастичними рівняннями Іто з неперервним зносом та розривною, але не виродженою дифузиею, до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші.

9. Встановлені умови слабкої збіжності мір, породжених стохастичними рівняннями з локальним часом і неперервним коефіцієнтом зносу, до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші.

Список використаних джерел

- [1] Анулова С.В. *Стохастическое исчисление* / С.В. Анулова, А.Ю. Веретенников, Н.В. Крылов, Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев // Итоги науки и техники: современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 49. – Москва: ВИНТИ, 1989. – 260 с.
- [2] Бондарев Б.В. *Асимптотическое поведение решения стохастического дифференциального уравнения с малым параметром при коэффициенте сноса* / Б.В. Бондарев // Теория случайных процессов. – 1972. – Т. 2. – С. 7-15.
- [3] Бондарев Б.В. *Асимптотическое поведение решения стохастического дифференциального уравнения с малым параметром и внутренним шумом* / Б.В. Бондарев // Теория случайных процессов. – 1972. – Т. 2. – С. 15-22.
- [4] Бондарев Б.В. *Об усреднении в периодических средах при слабо зависимых случайных воздействиях I* / Б.В. Бондарев // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Т. 45. – С. 12-20.
- [5] Бондарев Б.В. *Об усреднении в периодических средах при слабо зависимых случайных воздействиях II* / Б.В. Бондарев // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1991. – Т. 46. – С. 18-24.
- [6] Бондарев Б.В. *Функциональный закон повторного логарифма для нормированных интегралов от процессов со слабой зависимостью* / Б.В. Бондарев, М.Е. Королев // Украинский математический журнал. – 1997. – Т. 49, № 4. – С. 480-499.

- [7] Булинский А.В. *Новый вариант функционального закона повторного логарифма* / А.В. Булинский // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – Т. XXV, в.3. – С. 502-512.
- [8] Ватанабэ С. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы* / С. Ватанабэ, Н. Икэда – М.: Наука, 1986. – 624 с.
- [9] Вентцель А.Д. *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений* / А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин – М.: Наука, 1979. – 424 с.
- [10] Вентцель А.Д. *Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов* / А.Д. Вентцель – М.: Наука, 1986. – 424 с.
- [11] Веретенников А.Ю. *О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений* / А.Ю. Веретенников // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – Т. XXIV, в.2. – С. 354-366.
- [12] Веретенников А.Ю. *О приближении обыкновенных дифференциальных уравнений стохастическими* / А.Ю. Веретенников // Математические заметки – 1983. – Т. 33, № 6. – С. 929–932.
- [13] Веретенников А.Ю. *О больших отклонениях в принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами* / А.Ю. Веретенников // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1991. – Т. 55, № 4. – С. 691-715.
- [14] Веретенников А.Ю. *О явных формулах для решений стохастических уравнений* / А.Ю. Веретенников, Н.В. Крылов // Математический сбор-

ник – 1976. – Т. 100, № 2. – С. 266-284.

- [15] Гихман И.И. *Стохастические дифференциальные уравнения* / И.И. Гихман, А.В. Скороход - К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.
- [16] Гихман И.И. *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения* / И.И. Гихман, А.В. Скороход - К.: Наукова думка, 1982. – 612 с.
- [17] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции* / М.А. Евграфов - Третье издание, Москва, Наука, 1979. – 320 с.
- [18] Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения глазами физика* / В.И. Кляцкин - Москва, Физматлит, 2001. – 528 с.
- [19] Коддингтон Э.А. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений* / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон - Москва: Иностранная литература, 1958. – 472 с.
- [20] Крикун І.Г. *Гранична теорема для стохастичних рівнянь з локальним часом* / І.Г. Крикун // Труды ИПММ НАНУ. – 2005. – Т. 10. – С. 120-130.
- [21] Крикун І.Г. *Гранична теорема для стохастичних рівнянь з локальним часом* / І.Г. Крикун // Abstracts of Int. conf.: "Modern problem and new trends in probability theory", Chernivtsi. – 2005. – С. 131.
- [22] Крикун І.Г. *Гранична теорема для параболічних рівнянь* / І.Г. Крикун // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених і студентів з диф. рівнянь та їх застосувань, присвяченої 100-річному ювілею Я. Б. Лопатинського, Донецьк. – 2006. – С. 79-80.

- [23] Крикун І.Г. *Принцип великих відхилень для стохастичних рівнянь з локальним часом* / І.Г. Крикун // Тези наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та суміжні питання" (на честь 90-річчя з дня народження Й.І. Гіхмана), Умань. – 2008. – С. 40.
- [24] Крикун І.Г. *Функціональний закон типу повторного логарифма для косоного броунівського руху* / І.Г. Крикун // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Т. 87. – С. 60-77.
- [25] Крыкун И.Г. *Явление Пеано для уравнений Ито* / И.Г. Крыкун, С.Я. Махно // Український математичний вісник. – 2013. – Т. 10, № 1. – С. 87–109.
- [26] Крикун І.Г. *Аналог явища Пеано для стохастичних рівнянь з локальним часом* / І.Г. Крикун // Труды ИПММ НАНУ. – 2013. – Т. 26. – С. 104–112.
- [27] Крикун І.Г. *Явище Пеано для стохастичних рівнянь з локальним часом* / І.Г. Крикун // Доповіді Національної Академії наук України. – 2013. – № 7. – С. 7-12.
- [28] Крылов Н.В. *Управляемые процессы диффузионного типа* / Н.В. Крылов - М.: Наука, 1977. – 400 с.
- [29] Кушнер Г.Дж. *Стохастическая устойчивость и управление* / Г.Дж. Кушнер - М.: Мир, 1969. – 198 с.
- [30] Кулинич Г.Л. *О необходимых и достаточных условиях сходимости решений одномерных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра* / Г.Л. Ку-

- линич // Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – Т. 27, в.4. – С. 795-801.
- [31] Кулинич Г.Л. *О законе повторного логарифма для одномерных диффузионных процессов* / Г.Л. Кулинич // Теория вероятностей и ее применения. – 1984. – Т. 29, в.3. – С. 544-547.
- [32] Кулинич Г.Л. *Об асимптотическом поведении решений систем стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра* / Г.Л. Кулинич, М.В. Харкова // ДАН УССР, сер.А. – 1990, № 2. – С.19-22.
- [33] Кулинич Г.Л. *Предельные теоремы для стохастических дифференциальных уравнений без последствия* / Г.Л. Кулинич, М.В. Харкова // Теория вероятностей и ее применения. – 1995. – Т. 40, № 3. – С. 523-541.
- [34] Махно С.Я. *Сходимость диффузионных процессов* / С.Я. Махно // Український математичний журнал. – 1992. – Т. 44, № 2. – С. 284-289.
- [35] Махно С.Я. *Сходимость диффузионных процессов II* / С.Я. Махно // Український математичний журнал. – 1992. – Т. 44, № 10. – С. 1389-1395.
- [36] Махно С.Я. *Параболические уравнения с малым параметром и большие уклонения для диффузионных процессов* / С.Я. Махно // Математический сборник. – 1994. – Т. 185, № 11. – С. 41-56.
- [37] Махно С.Я. *Теорема о больших уклонениях для одного класса диффузионных процессов* / С.Я. Махно // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39, № 3. – С. 554-566.

- [38] Махно С.Я. *Большие отклонения для решений стохастических уравнений* / С.Я. Махно // Теория вероятностей и ее применения. – 1995. – Т. 40, № 4. – С. 764-785.
- [39] Махно С.Я. *Закон повторного логарифма для решений стохастических уравнений с периодическими коэффициентами* / С.Я. Махно // Математические заметки. – 1996. – Т. 59, № 5. – С. 771-773.
- [40] Махно С.Я. *Сходимость решений одномерных стохастических уравнений* / С.Я. Махно // Теория вероятностей и ее применения. - 1999. - Т. 44, № 3. – С. 555-572.
- [41] Махно С.Я. *Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем* / С.Я. Махно // Теория вероятностей и математическая статистика, – 2001. – Т. 64. – С. 106-109.
- [42] Махно С.Я. *Предельная теорема для одномерных стохастических уравнений* / С.Я. Махно // Теория вероятностей и ее применения. – 2003. – Т. 48, № 1. – С. 156-161.
- [43] Островский Е.И. *Точная асимптотика интегралов Лапласа для негладких функций* / Е.И. Островский // Математические заметки – 2003. – Т. 73, № 6. – С. 886-890.
- [44] Понтрягин Л.С. *О статистическом рассмотрении динамических систем* / Л.С. Понтрягин, А.А. Андронов, А.А. Витт // ЖЭТФ – 1933. – Т. 3, № 3. – С. 165-180.
- [45] Портенко Н.И. *Обобщенные диффузионные процессы* / Н.И. Портенко - К.: Наукова думка, 1982. – 208 с.

- [46] Пухальский А.А. *Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения* / А.А. Пухальский - М.: Физматлит, 2005. – 512 с.
- [47] Самойленко А.М. *Якісний та асимптотический анализ дифференциальных уравнений с випадковими збуреннями*/ А.М. Самойленко, О.М. Станжицький - К.: Наукова думка, 2009. – 336 с.
- [48] Скороход А.В. *Исследования по теории случайных процессов* / А.В. Скороход - Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961. – 212 с.
- [49] Скороход А.В. *Случайные процессы с независимыми приращениями* А.В. Скороход - Москва: Наука, 1964. – 280 с.
- [50] Скороход А.В. *Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений* / А.В. Скороход - Киев: Наукова думка, 1987. – 326 с.
- [51] Станжицький О.М. *Усреднения систем с импульсной дією у випадкові моменти часу* / О.М. Станжицький // Вісник Київського університету. – 1993. – Т. 2. – С. 60-67.
- [52] Федерер Дж. *Геометрическая теория меры* / Дж. Федерер - Москва: Наука, 1987. – 761 с.
- [53] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* / Ф. Хартман - Москва: Мир, 1970. – 720 с.
- [54] Хасьминский Р.З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров* / Р.З. Хасьминский - Москва: Наука, 1969. – 367 с.

- [55] Хинчин А.Я. *Асимптотические законы теории вероятностей* / А.В. Хинчин - Москва: ОНТИ, 1936. – 98 с.
- [56] Царьков Е.Ф. *Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений* / Е.Ф. Царьков - Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
- [57] Черный А.С. *О сильной и слабой единственности для стохастических дифференциальных уравнений* / А.С. Черный // Теория вероятностей и ее применения. – 2001. – Т. 46, № 3. – С. 483-497.
- [58] Шварц Л. *Анализ* / Л. Шварц - Москва: Мир, 1972. – 824 с.
- [59] Ширяев А.Н. *Вероятность* / А.Н. Ширяев - Москва: Наука, 1980. – 581 с.
- [60] Agarwal R.P. *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations* / R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham - Singapore: World Scientific Publishers, 1993. – 312 p.
- [61] Ambrosio L. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures* / L. Ambrosio, N. Gigli, S. Savare' - Basel: Birkhauser Verlag, 2005. – 333 p.
- [62] Baldi P. *Petites perturbations d'un phenomene Peano* / P. Baldi // Annales scientifiques de l'Universite de Clermont-Ferrand 2 – 1982. – V. 71, № 20. – P. 41-52.
- [63] Baldi P. *Small Random Perturbations of Peano Phenomena* / P. Baldi, R. Bafico // Stochastics – 1982. – V. 6. – P. 279-292.

- [64] Buckdahn R. *On limiting values of stochastic differential equations with small noise intensity tending to zero* / R. Buckdahn, M. Quincampoix, Y. Ouknine // Bulletin des sciences mathematiques – 2009. – V. 133. – P. 229-237.
- [65] Chiang T.S. *Large deviations of diffusion processes with discontinuous drift and their occupation times* / T.S. Chiang, S.J. Sheu // Ann. Probab. – 2000. – V. 28. – P. 140-165.
- [66] Chiang T.S. *Small perturbations of diffusions in inhomogeneous media* / T.S. Chiang, S.J. Sheu // Ann. Inst. Henri Poincaré – 2002. – V. 38, № 3. – P. 285-318.
- [67] Engelbert H.J. *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations III* / H.J. Engelbert, W. Schmidt // Math. Nachr. – 1991. – V. 151. – P. 149-197.
- [68] Gradinaru M. *A singular large deviations phenomenon* / M. Gradinaru, S. Herrmann, B. Roynette, // Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. – 2001. – V. 37, № 5. – P. 555–580.
- [69] Harrison J.M. *On skew Brownian motion* / J.M. Harrison, L.A. Shepp // Ann. Probab. – 1981. – V. 9, № 2. – P. 309-313.
- [70] Ito K. *Brownian motions on a half line* / K. Ito, H. McKean // Illinois J. Math. – 1963. – V. 7, № 2. – P. 181-231.
- [71] Jacod J. *Limit Theorems for Stochastic Processes* / J. Jacod, A.N. Shiryaev, - New York: Springer, 1987. – 600 p.
- [72] Krykun I.H. *A limit theorem for stochastic equations with local time* /

- I.H. Krykun // Conference materials of International conference "Modern stochastics: theory and applications" (dedicated to the 60th anniversary of the Department of Probability Theory and mathematical Statistics and to the memory of Professor M. Y. Yadrenko), Kyiv. – 2006. – P. 177.
- [73] Krykun I.H. *Large deviations for stochastic equations with local time* / I.H. Krykun // Abstracts of International conference "Skorokhod space. 50 years on", Kyiv. – 2007. – P. 47.
- [74] Krykun I.H. *Large deviation principle for stochastic equations with local time* / I.H. Krykun // Theory of Stochastic Processes. – 2009. – V. 15, № 2. – P. 140-155.
- [75] Krykun I.H. *Functional iterated logarithm law for stochastic equations with local time* / I.H. Krykun // Abstracts of International conference "Modern stochastics: theory and applications II", Kyiv. – 2010. – P. 111.
- [76] Krykun I.H. *A Functional Law of the Iterated Logarithm for skew Brownian motion* / I.H. Krykun // Abstracts of International conference "Conference on Stochastic Models and their Applications", Debrecen (Hungary). – 2011. – P. 45.
- [77] Krykun I.H. *Stochastic Peano Phenomenon* / I.H. Krykun, S.Ya. Makhno // Conference materials of International conference dedicated to 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv. – 2012. – P. 270.
- [78] Krykun I.H. *The Peano phenomenon for Ito equations* / I.H. Krykun, S.Ya. Makhno // Journal of Mathematical Sciences, Lviv. – 2013. – V.192, Issue 4. – P. 441-458.

- [79] Krykun I.H. *Peano phenomenon for stochastic equations with local time* [Электронный ресурс] / I.H. Krykun // Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/1303.6795>
- [80] Krykun I.H. *Functional law of the iterated logarithm type for a skew Brownian motion* / I.H. Krykun // Theor. Probability and Math. Statist. – 2013. – № 87. – P. 79-98.
- [81] Krylov N.V. *On weak uniqueness for some diffusions with discontinuous coefficients* / N.V. Krylov // Stochastic processes and their applications – 2004. – V. 113, № 2. – P. 37-44.
- [82] Kulik O.M. *Absolute Continuity and Convergence in Variation for Distributions of Functionals of Poisson Point Measure* / O.M. Kulik // Jour. of Theor. Probab. – 2011. – V. 24, № 1. – P. 1-38.
- [83] Le Gall J.F. *One dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process* / J.F. Le Gall // Lecture Notes in Mathematics - Springer, Berlin, 1983. – V. 1095. – P. 51-82.
- [84] Makhno S.Ya. *Functional iterated logarithm law for stochastic equations* / S.Ya. Makhno // Stochastics and Stochastics Reports – 2000. – V. 70. – P. 221-239.
- [85] Makhno S.Ya. *A limit theorem for solutions of stochastic equations with local time* / S.Ya. Makhno // Theory Probab. Appl. – 2003. – V. 48. – P. 164-169.
- [86] Makhno S.Ya. *The limit stochastic equation changes type* / S.Ya. Makhno // Theory of Stochastic Processes – 2005. – V. 11(27), № 3-4. – P. 104–109.

- [87] Nakao S. *On the pathwise uniqueness of solutions of one dimensional stochastic differential equations* / S. Nakao // Osaka J. Math. – 1972. – V. 9, № 3. – P. 513-518.
- [88] Pukhalskii A. *Large Deviations and Idempotent Probability* / A. Pukhalskii - London, New York: Chapman&Hall/CRC Press, 2001. – 520 p.
- [89] Pukhalskii A. *On functional principle of large deviations* / A. Pukhalskii // New Trends in Probability and Statistics, VSP, Vilnius. – 1991. – P. 198-218.
- [90] Revuz D. *Continuous martingales and Brownian motion* / D. Revuz, M. Yor - Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1990. – 590 p.
- [91] Strassen V. *An invariance principle for the law of the iterated logarithm* / V. Strassen// Z. Wahrscheinlichkeits-theorie. Verw. Geb. – 1964. – V. 3, № 3. – P. 211-226.
- [92] Stroock D. *Multidimensional Diffusion Processes* / D. Stroock, S.R.S. Varadhan - New York: Springer-Verlag, 1979. – 334 p.
- [93] Varadhan S.R.S. *Large Deviations and Applications* / S.R.S. Varadhan - Philadelphia: SIAM, 1984. – 76 p.

**More
Books!** 



yes
I want morebooks!

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.get-morebooks.com

Kaufen Sie Ihre Bücher schnell und unkompliziert online – auf einer der am schnellsten wachsenden Buchhandelsplattformen weltweit!
Dank Print-On-Demand umwelt- und ressourcenschonend produziert.

Bücher schneller online kaufen
www.morebooks.de

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Bahnhofstr. 28
D - 66111 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIScriptum 

