3 % загального обсягу портфеля для забезпечення достатнього рівня диверсифікації кредитного портфеля.

Кредитна політика банку з часом може змінюватися залежно від кон'юнктури ринку або зміни стратегічних цілей банку. У такому разі система обмежень моделі може бути скоригована і дасть інший оптимальний розподіл кредитного портфеля.

Література

1. Банківський нагляд. Основні показники діяльності банків України // сайт НБУ [Електронний ресурс]. − Режим доступу : http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/article?art_id=36807&cat_id=36798

2. *Терещенко О.* Оцінка кредитних ризиків: відповідність новацій НБУ міжнародній практиці / О. Терещенко // Вісник НБУ. – 2012. − № 9. – С. 4–8.

3. *Волошин І.* Ціноутворення кредитів на основі підходу «грошовий потік під ризиком»: комплексний погляд на кредитний ризик і ризик ліквідності / І. Волошин // Вісник НБУ. – 2013. − № 6. – С. 26–30.

4. *Сало І. В.* Фінансовий менеджмент банку : Навчальний посібник / І. В. Сало, О. А. Криклій. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. – 314 с.

5. *Ковалев А. П.* Кредитный риск-менеджмент : Монография / А. П. Ковалев. − К. : Сузір'я, 2007. – 406 с.

6. Інструкція «Про порядок регулювання діяльності банків в Україні», затверджена Постановою Правління Національного банку України від 28 серпня 2001 р. № 368 // сайт НБУ [Електронний ресурс]. − Режим доступу : http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat_id=58478

7. Положення «Про порядок формування та використання банками України резервів для відшкодування можливих втрат за активними банківськими операціями», затверджене Постановою Правління Національного банку України від 25 січня 2012 р. № 23 // сайт НБУ [Електронний ресурс]. − Режим доступу : http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat_id=58478

8. Програми кредитування фізичним особам, корпоративному бізнесу, малому та середньому бізнесу // сайт ПАТ «Всеукраїнський банк розвитку» [Електронний ресурс]. − Режим доступу : http://www.vbr-bank.com.ua

УДК 336+519.8

В. Р. Кігель
професор кафедри математичних методів і статистики, кандидат економічних наук, доцент, Університет економіки та права «КРОК»

Задача Марковиця: оновлена постановка, аналітичне розв'язування, межі та можливі сфери використання аналітичного методу

У статті обґрунтовано метод аналітичного розв'язування задачі Марковиця в оновленій постановці, а також окреслено межі та зазначено можливі сфери – ринок цінних паперів і валютний ринок – його використання. Теоретичні дослідження проілюстровано конкретними прикладами.

Ключові слова: задача Марковиця, фінансовий портфель, валютний резерв, ризик, оптимізація, аналітичний метод

В. Р. Кигель
профессор кафедры математических методов и статистики, кандидат экономических наук, доцент, Университет экономики и права «КРОК»

Задача Марковица: обновленная постановка, аналитическое решение, границы и возможные сферы применения аналитического метода

В статье обоснован метод аналитического решения задачи Марковица в обновленной постановке, а также очерчены пределы и отмечены возможные сферы – рынок ценных бумаг и валютный рынок – его использования. Теоретические исследования проиллюстрированы конкретными примерами.

Ключевые слова: задача Марковица, финансовый портфель, валютный резерв, риск, оптимизация, аналитический метод

V. Kigel
PhD in Economics, Associate Professor, Professor of the Mathematical Methods and Statistics Department, «KROK»

The Markowitz problem: updated staging, analytical problem solving, borders and possible areas of analytical method use

The method of analytical solution of Markowitz problem in the updated formulation was justified, and also the borders and possible areas of its use – securities market and foreign exchange market – are outlined. Theoretical study is illustrated with specific examples.

Keywords: the Markowitz problem, the finance portfolio, the currency reserve, risk, optimization, the method of analytical solution

Постановка проблеми

Визначення найдохіднішого портфеля фінансових інвестицій за умов ризику щодо показників майбутньої дохідності потенційно можливих напрямів інвестування є важливою задачею фінансового менеджменту. Тому актуальною є проблема вдосконалення аналітичного інструментарію дослідження та розв'язування цієї задачі, з огляду на сучасні досягнення теорії та методології підтримки прийняття фінансових рішень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Фінансове інвестування завжди пов'язане з ризиком щодо майбутнього доходу фінансового портфеля. Майбутні дохідності фінансових інструментів слушно розглядати як випадкові величини. Так, Г. Марковиць – засновник портфельної теорії – запропонував оцінювати випадковий дохід $D(x)$ детермінованого фінансового портфеля x двома показниками – очікуваним (у математичному сенсі) рівнем $E[D(x)]$ і дисперсією $V[D(x)]$, а найкращий фінансовий портфель обирати з множини ефективних планів двокритеріальної задачі:

$$E[D(x)] \to \max, \quad V[D(x)] \to \min, \quad x \in X, \tag{1}$$

де X – множина допустимих детермінованих фінансових портфелів (у Марковиця $X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1; x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}\}$). Він запропонував також розв'язувати цю задачу або шляхом максимізації $E[D(x)]$ при заданому рівні $V[D(x)]$, або шляхом мінімізації $V[D(x)]$ при заданому рівні $E[D(x)]$ [1; 2].

Науковцями в галузі дослідження операцій та оптимізації доведено Карлин С. [3], Подиновский В. В. [4], що множиною ефективних планів задачі Марковиця (1) є множина розв'язків задачі параметричного програмування:

$$E[D(x)] - \lambda V[D(x)] \to \max, \quad 0 < \lambda < +\infty; \quad x \in X, \tag{2}$$

причому якщо індивідуальні переваження інвестора щодо рівня майбутнього доходу відтворюються функцією корисності експоненційного типу, а майбутній дохід є нормально розподіленою випадковою величиною, детермінований еквівалент *D(x)* цього випадкового доходу $D(x)$ саме й визначається цільовою функцією задачі (2): $D(x) = E[D(x)] - \lambda V[D(x)]$, де знак параметра λ відповідає одному з основних типів індивідуального ставлення до ризику: $\lambda > 0$ у разі несхильності, $\lambda < 0$ у разі схильності та $\lambda = 0$ у разі нейтрального ставлення до ризику, а значення параметра λ визначається особливостями індивідуальних переважань конкретного інвестора в конкретній ситуації прийняття фінансових рішень [5].

Оскільки переважна більшість інвесторів ставиться до ризику несхильно, основна увага математиків-економістів була прикута до задачі (2) (див., наприклад, [6-8]). Для задачі Марковиця було також сформульовано умови та виведено формули аналітичного подання розв'язку (наприклад, [9-11]), а також запропоновано ітераційні алгоритми пошуку розв'язку для випадків, коли аналітичний інструментарій явного опису розв'язку не спрацьовує (наприклад, [12; 13]).

Критично оцінюючи існуючий математичний інструментарій розв'язування задачі Марковиця, слід зазначити таке. По-перше, при відбитті індивідуальних переважань функцією корисності може йтися скоріше про наближене, а не точне відбиття цих переважань. По-друге, досить сильним є припущення про нормальний закон розподілу майбутнього випадкового доходу. Тобто формулу «очікуване значення – дисперсія» (таку назву використано в [14]) можна розглядати лише як наближену оцінку детермінованого еквівалента випадкового доходу. По-третє, критерій «очікуване значення – дисперсія» має методичні вади через несумірність одиниць виміру його окремих складових.

Позбутися зазначених недоліків можна з використанням критерію «очікуване значення – стандартне відхилення», теоретичне обґрунтування якого наведено, зокрема, у Кігель В. Р. [15]: $\hat{D}(x) \approx E[D(x)] - \lambda \sigma[D(x)]$, де $\sigma[D(x)]$ – стандартне відхилення майбутнього випадкового доходу від його очікуваного рівня, яке обчислюється як квадратний корінь із дисперсії доходу: $\sigma[D(x)] = \sqrt{V[D(x)]}$, а значення множника λ визначається індивідуальним ставленням інвестора до ризику: $\lambda > 0$ у разі несхильності, $\lambda < 0$ у разі схильності та $\lambda = 0$ у разі нейтрального ставлення до ризику; за абсолютною величиною значення цього множника є тим більшим, чим сильніше ставлення до ризику відрізняється від нейтрального типу, наприклад: $\pm 0{,}2.\ 0{,}3$ – якщо дещо відрізняється; $\pm 0{,}5.\ 0{,}6$ – якщо впевнено відрізняється; $\pm 0{,}9$ *і більше* – якщо значно відрізняється.

Не вирішені раніше частини загальної проблеми

З метою ефективного користування критерієм «очікуване значення – стандартне відхилення» для оптимізації фінансового портфеля потрібно розробити техніку аналітичного розв'язування задачі Марковиця в оновленій постановці, а також окреслити межі та можливі сфери використання аналітичного методу.

Формулювання цілей статті

Метою статті є розроблення та обґрунтування методу аналітичного розв'язування задачі Марковиця в оновленій постановці, а також висвітлення меж і можливих сфер використання запропонованого аналітичного методу.

Виклад основного матеріалу дослідження

Задача Марковиця, яка є важливою проблемою фінансового менеджменту, полягає у визначенні найдохіднішого портфеля фінансових інвестицій за умов ризику щодо показників майбутньої дохідності потенційно можливих напрямів інвестування. Нехай відомі: n – кількість потенційних напрямів інвестування, d_j – дохідність j-го напряму інвестування ($j=\overline{1,n}$), I – вільний капітал інвестора; невідомі: x_j – обсяг інвестицій за j-м напрямом інвестування ($j=\overline{1,n}$), z – інвестиційний дохід сформованого інвестором фінансового портфеля. Тоді у детермінованому випадку – коли дохідності кожного з потенційно можливих напрямів інвестування вважаються відомими – задача інвестора набирає вигляду:

$$\begin{cases} z=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = I, \quad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

У разі ризику – саме на цей випадок було спрямовано дослідження Г. Марковиця – майбутні дохідності можливих напрямів інвестування розглядаються як випадкові величини. Тому загальний дохід z інвестора теж є випадковою величиною. Оцінювання цього випадкового доходу здійснюється за показником його детермінованого еквівалента $\hat{z}$, який наближено може обчислюватися за формулою:

$$\hat{z} = \bar{z} + k\sigma_z, \tag{4}$$

де $\bar{z}$ – загальний очікуваний дохід фінансового портфеля, а σ_z – стандартне відхилення випадкового загального доходу від його очікуваного рівня:

$$\bar{z}=\sum_{j=1}^{n}\bar{d}_j x_j \qquad \sigma_z=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j} \tag{5}$$

(відомими зараз вважаються: $\bar{d}_j$ – математичне очікування випадкової дохідності за j-м напрямом, σ_j – стандартне відхилення цієї випадкової дохідності від її очікуваного рівня ($j=\overline{1,n}$), а також ρ_{ij} – коефіцієнти кореляції між випадковими дохідностями d_i та d_j ($i,j=\overline{1,n}$)).

Значення множника у в формулі (4), у свою чергу, визначається індивідуальним ставленням до ризику ($k=0$, якщо інвестор є нейтральним щодо ризику, $k>0$, якщо він схильний до ризику та $k<0$, якщо він є несхильним до ризику; за абсолютною величиною можуть використовуватися такі значення цього множника: $0{,}2.\ 0{,}3$ – якщо ставлення до ризику дещо відрізняється від нейтрального; $0{,}5.\ 0{,}6$ – якщо воно впевнено відрізняється від нейтрального; $0{,}9...$ – якщо значно відрізняється від нейтрального). Тип ставлення до ризику (нейтральність, схильність або несхильність) та значення множника k визначаються за результатами досить простого та адаптованого до конкретної проблемної ситуації опитування конкретного інвестора [16].

Отже, за умов ризику задачу інвестора – тобто задачу Марковиця в оновленій постановці – можна записати так:

$$\hat{z} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j x_j + k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = I, \quad x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

у якій невідомими виступають $x_1, \ldots, x_n$ – обсяги вкладень за кожним із напрямів інвестування та $\hat{z}$ – цільова змінна, яка характеризує детермінований еквівалент випадкового загального доходу фінансового портфеля, обчислений згідно з індивідуальним ставленням інвестора до ризику.

Знайдемо розв'язок задачі (6) для кожного з можливих типів ставлення інвестора до ризику.

Випадок 1 – нейтральне ставлення до ризику: $k = 0$. У такому разі задача (6) є схожою на задачу для детермінованого випадку (3), за тим лише виключенням, що замість детермінованих значень показників дохідності можливих напрямів інвестування використовуються математичні очікування відповідних випадкових величин:

$$\hat{z} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j x_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = I, \quad x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Розв'язок задачі (7) визначається так: вкладати всі кошти за таким із напрямів інвестування, очікувана дохідність за яким є найвищою. Коли ж напрямів інвестування з максимальною очікуваною дохідністю є декілька, оптимальним також є довільний розподіл інвестицій за зазначеними напрямами.

Випадок 2 – схильне ставлення до ризику: $k > 0$. Цільова функція задачі (6) схильного до ризику інвестора є опуклою – як сума лінійної (перший доданок) та опуклої (другий доданок) функцій. Тому її максимум на многограннику допустимих фінансових портфелів можна шукати лише серед його вершин. Отже, оптимальним для схильного до ризику інвестора є рішення вкладати весь вільний капітал за таким лише одним із напрямів інвестування j^*, за яким детермінований еквівалент його випадкової дохідності є максимальним: $j^*: \;\; \bar{d}_{j^*} + k\sigma_{j^*} = \max_{j=\overline{1,n}}\{\bar{d}_j + k\sigma_j\}$, проте, на відміну від аналогічної ситуації для випадку нейтрального ставлення до ризику, зараз розподіл інвестицій за кількома напрямами інвестування з одночасною максимальною очікуваною дохідністю може вже виявитися неоптимальним.

Випадок 3 – несхильне ставлення до ризику: $k < 0$. Уведемо до розгляду нові змінні: $t_j = \sigma_j x_j$ ($j = \overline{1,n}$), а також обчислимо нові відомі величини:

$$a_j = \frac{\bar{d}_j}{\sigma_j}, \qquad b_j = \frac{1}{\sigma_j}, \qquad j = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

Тоді задача (6) несхильного до ризику інвестора у векторно-матричній формі запису набере вигляду:

$$\hat{z} = at + k\sigma_z \to \max, \quad \sigma_z^2 = t^T R t, \quad bt = I, \quad t \geq 0, \qquad (9)$$

де $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – відомі вектори-рядки, $t = (t_1, \ldots, t_n)^T$ – вектор-стовпчик невідомих, ^{T} – знак операції транспонування, $R = \| \rho_{ij} \|_{(n)}$ – відома матриця парних коефіцієнтів кореляції між випадковими дохідностями, яка є симетричною.

Складемо для задачі (9) функцію Лагранжа, залучивши нові невідомі числові множники λ та μ: $L = at + k\sigma_z + \lambda(\sigma_z^2 - t^T Rt) + \mu(bt - I)$, та скористаємося умовами оптимальності Лагранжа у припущенні, що точка оптимуму задачі (9) є внутрішньою точкою множини її допустимих планів:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_z} = k + 2\lambda\sigma_z = 0\ , \tag{10}$$

$$\nabla_t L = a - 2\lambda t^T R + \mu b = 0, \tag{11}$$

де через $\frac{\partial L}{\partial \sigma_z}$ позначено частинну похідну функції Лагранжа L за змінною σ_z, а через $\nabla_t L$ – вектор-рядок частинних похідних функції Лагранжа, відповідно, за змінними $t_1, \ldots, t_n$.

З рівності (10) одразу ж визначаємо, що $\frac{1}{2\lambda} = -\frac{\sigma_z}{k}$ та що $\lambda > 0$.

А з рівності (11), у свою чергу, випливає:

$$t^T R = \frac{a + \mu b}{2\lambda} = -\frac{\sigma_z}{k}(a + \mu b)\cdot \tag{12}$$

Помножимо рівність (12) справа на матрицю R^{-1}, яка є оберненою до матриці R. Ураховуючи, що добуток $R^{\ -1}$ є одиничною матрицею, одержимо: $t^T = -\frac{\sigma_z}{k}(a + \mu b)R^{-1}$, тобто:

$$t = -\frac{\sigma_z}{k} R^{-1}(a^T + \mu b^T)\cdot \tag{13}$$

Тепер рівність (12) помножимо справа на t, після чого для значення t скористаємося виразом (13): $t^T Rt = -\frac{\sigma_z}{k}(a + \mu b)t = \frac{\sigma_z^2}{k^2}(a + \mu b)R^{-1}(a^T + \mu b^T)$. Ураховуючи, що $t^T Rt = \sigma_z^2$, із цієї рівності одержимо рівняння щодо μ: $(a + \mu b)R^{-1}(a^T + \mu b^T) = k^2$, тобто:

$$(bR^{-1}b^T)\mu^2 + 2(aR^{-1}b^T)\mu + (aR^{-1}a^T - k^2) = 0\ .$$

Дійсні корені цього квадратного рівняння, якщо вони існують, обчислюються за формулою:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(aR^{-1}b^T) \pm \sqrt{(aR^{-1}b^T)^2 - (bR^{-1}b^T)(aR^{-1}a^T - k^2)}}{(bR^{-1}b^T)}\ . \tag{14}$$

Далі, з рівняння $bt = I$ та співвідношення (13) одержимо:

$$I = bt = -\frac{\sigma_z}{k} bR^{-1}(a^T + \mu b^T) = -\frac{\sigma_z}{k}(bR^{-1}a^T + bR^{-1}\mu b^T) =$$

$$= -\frac{\sigma_z}{k}\left(bR^{-1}a^T - aR^{-1}b^T \pm \sqrt{(aR^{-1}b^T)^2 - (bR^{-1}b^T)(aR^{-1}a^T - k^2)}\ \right) =$$

$$= \mu\frac{\sigma_z}{k}\sqrt{(aR^{-1}b^T)^2 - (bR^{-1}b^T)(aR^{-1}a^T - k^2)}\ , \tag{15}$$

оскільки з симетричності матриць R і, відповідно, R^{-1} випливає рівність $bR^{-1}a^T - aR^{-1}b^T = 0$.

Беручи до уваги, що $k < 0$, та відкидаючи сторонній корінь, із рівності (15) знаходимо:

$$\sigma_z = \frac{-kI}{\sqrt{(aR^{-1}b^T)^2 - (bR^{-1}b^T)(aR^{-1}a^T - k^2)}} \ .$$

Для зручності запису кінцевого результату введемо проміжні розрахункові сталі:

$$\alpha = aR^{-1}a^T, \quad \beta = bR^{-1}b^T, \quad \gamma = aR^{-1}b^T \ . \qquad (16)$$

Із використанням наведених розрахункових сталих кінцеві вирази набирають вигляду:

$$\sigma_z = \frac{-kI}{\sqrt{\gamma^2 - \beta(\alpha - k^2)}} \ , \qquad (17)$$

$$t = \frac{I}{\sqrt{\gamma^2 - \beta(\alpha - k^2)}} R^{-1}\left(a^T + \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \beta(\alpha - k^2)}}{\beta} b^T\right) \cdot \qquad (18)$$

Таким чином, якщо умови (10) – (11) є сумісними, а розв’язок (18) задовольнятиме вимогу невід’ємності, оптимальний фінансовий портфель $x = (x_1, \ldots, x_n)$ несхильного до ризику інвестора визначається за формулою:

$$x_j = \frac{t_j}{\sigma_j}, \ j = \overline{1, n}, \qquad (19)$$

де сталі α, β та γ обчислюються за правилом (16), а значення змінних t_j компонентів вектора $t = (t_1, \ldots, t_n)^T$ – за правилом (18).

Зазначений аналітичний метод є працездатним, якщо умови (10) – (11) є сумісними та коли всі компоненти вектора $t = (t_1, \ldots, t_n)^T$ у розв’язку (18) невід’ємні. До цих обмежень треба додати також вимогу: $\sigma_j^2 > 0$ ($j = \overline{1, n}$), тобто що серед потенційних напрямів інвестування немає безризикових, а також вимогу існування дійсних коренів рівняння (формула (14)) та вимогу збереження сенсу обчислення змінних за формулами (17)-(19):

$$\gamma^2 - \beta(\alpha - k^2) > 0, \qquad (20)$$

з якої випливає нерівність:

$$k^2 > \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} \ . \qquad (21)$$

У разі порушення нерівності (21) рівень несхильності інвестора до ризику можна вважати в конкретній ситуації невідчутним, тобто обирати фінансовий портфель за технікою, наведеною для нейтральної щодо ризику особи. Проте за наявності одночасно кількох напрямів інвестування з максимальною очікуваною дохідністю в разі несхильності інвестора до ризику інвестиції доцільно не концентрувати, а диверсифікувати за різними напрямами.

Нарешті, до меж використання запропонованого аналітичного методу в разі несхильності до ризику слід віднести вимогу відсутності серед оптимальних фінансових портфелів таких, за яких стандартне відхилення σ_z випадкового загального доходу від його очікуваного рівня дорівнює нулю, а також ситуації, коли кореляційна матриця випадкових дохідностей R є виродженою і, як наслідок, не має оберненої. Ця умова не виконується, наприклад, коли $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, тобто коли між дохідностями двох випадкових напрямів ризикового інвестування існує точний лінійний зв’язок.

Приклад 1. Припустимо, що вільний капітал інвестора $I = 100$ грошових одиниць, який слід у якнайкращий спосіб розподілити за двома напрямами ризикового інвестування ($n = 2$), очікувані дохідності за якими та стандартні відхилення відповідних випадкових дохідностей, відповідно, дорівнюють:

Номер варіанта інвестування	j	1	2
Очікувана дохідність	$\overline{d}_j$	1,5	1,4
Стандартне відхилення	σ_j	0,5	0,4

За показником дохідності напрями інвестування вважаються статистично незалежними, тобто кореляційна матриця випадкових дохідностей R є одиничною: $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ та має обернену матрицю R^{-1}, яка теж є одиничною.

Опитування інвестора показало, що він є несхильним до ризику, причому рівневі його несхильності до ризику наближено відповідає значення множника $k = -0{,}5$, яке дає змогу за формулою (4) обчислювати детерміновані еквіваленти випадкових загальних доходів альтернативних фінансових портфелів.

Обчислимо за формулами (8) та (16) значення проміжних розрахункових сталих (a_1, a_2), (b_1, b_2), α, β і γ, після чого перевіримо умови (21) та (20), обчисливши значення дробу $\dfrac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta}$:

j	1	2
$a_j = \overline{d}_j / \sigma_j$	3	3,5
$b_j = 1/\sigma_j$	2	2,5

$\alpha = aR^{-1}a^T$	21,25
$\beta = bR^{-1}b^T$	10,25
$\gamma = aR^{-1}b^T$	14,75
$(\alpha\beta - \gamma^2)/\beta$	0,02439024

Оскільки умови (21) та (20) справджуються, подальші розрахунки виконаємо за формулами (18) і (19), звертаючи увагу на невід'ємність отриманих результатів (через δ показано допоміжну розрахункову сталу $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \beta(\alpha - k^2)}$ =1,520691, яку використано зараз з метою скоротити записи формул (18) і (19), а в подальшому й формули (17)):

j	1	2
$t^T = \dfrac{I}{\delta}(a + \dfrac{-\gamma + \delta}{\beta} b)R^{-1}$	27,53166	17,97467
$x_j = t_j / \sigma_j$	55,06332	44,93668

Бачимо, що результат розв'язку задачі (усі компоненти вектора t, а також вектора x є невід'ємними, тому для остаточного визначення кінцевих результатів скористаємося формулами (5), (17) і (4):

$\bar{z} = \bar{d}x$	145,50633
$\sigma_z = -kI/\delta$	32,87980
$\hat{z} = \bar{z} + k\sigma_z$	129,06643

Задачу розв'язано: за першим напрямом інвестування потрібно вкласти 55,06332 грошових одиниць (далі – г.о.), а за другим напрямом інвестувати 44,93668 г.о. За таких умов математичне сподівання випадкового загального доходу інвестора дорівнюватиме 145,50633 г.о., а стандартне відхилення відповідного випадкового доходу – 32,87980 г.о. Детермінований еквівалент випадкового загального доходу, обчислений згідно з індивідуальними перевaжаннями інвестора, дорівнює 129,06643 г.о. Порівняння цього плану з недиверсифікованими інвестиційними портфелями $(100; 0)$ і $(0; 100)$, а також із найменш ризиковим із множини всіх допустимих портфелів (портфелем $(30,02439; 60,97561)$) за показником детермінованого еквівалента випадкового загального доходу підкреслює переваги знайденого оптимального варіанта плану.

Назва плану	**Розмір вкладень**		**Очікуваний дохід**	**Стандартне відхилення**	**Детермінований еквівалент**
	І напрям	ІІ напрям			
Оптимальний	55,06332	44,93668	145,50633	32,87980	**129,06643**
З мінім. ризиком	39,02439	60,97561	143,90244	31,23475	**128,28506**
1-й недиверсифік.	100	0	150	50	**125**
2-й недиверсифік.	0	100	140	40	**120**

Іншою сферою можливого використання запропонованого аналітичного методу, крім управління портфелем фінансових активів, є управління валютним резервом. Сучасний валютний ринок характеризується динамічною мінливістю валютних курсів. Щоб за таких умов підтримувати оптимальну цінність валютного резерву, його потрібно постійно переглядати, періодично обмінюючи певну частину валюти, цінність якої в майбутньому зменшиться, на таку, цінність якої зросте. Тобто постійно маємо задачу про оптимальне переформовування наявного валютного резерву [17–19]. У дещо спрощеному вигляді її можна описати так.

Припустимо, що валютний резерв може складатися з n різних іноземних валют, причому в наявному резерві маємо по m_j одиниць кожної валюти ($j = \overline{1, n}$). Якщо поточний курс гривні щодо одиниці j-ї валюти дорівнює K_j, тоді поточна вартість наявного валютного резерву у гривневому еквіваленті – V – дорівнюватиме: $V = \sum_{j=1}^{n} K_j m_j$ (величину V можна трактувати як таку суму гривень, яку сьогодні отримав би власник у результаті продажу за гривні всього наявного у нього валютного резерву).

Нехай далі, y_j – кількість одиниць j-ї валюти, яка міститиметься у валютному резерві після його переформування за поточними курсами ($j = \overline{1, n}$). Тоді повинно справджуватися рівняння: $\sum_{j=1}^{n} K_j y_j = V$ (тобто проблему визначення складу $(y_1, \ldots, y_n)$ переформованого резерву можна розглядати як питання про те, скільки одиниць кожної з валют слушно купити за поточними валютними курсами, якщо наявний капітал для цього дорівнює V гривень).

Позначимо через L_j майбутній (ідеться про певну дату в майбутньому) курс гривні щодо одиниці j-ї валюти ($j=\overline{1,n}$). Тоді майбутня (ідеться про ту саму дату) вартість переформованого валютного резерву $(y_1, \ldots, y_n)$ у гривневому еквіваленті – W – дорівнюватиме: $W=\sum_{j=1}^{n} L_j y_j$.

Хаотична динаміка валютних курсів дає підстави розглядати майбутні валютні курси як випадкові величини. Тож майбутня вартість переформованого валютного резерву W теж є випадковою. Щоб обчислити основні статистичні характеристики (математичне сподівання $\overline{W}$ та стандартне відхилення σ_W) цієї випадкової величини, слід взяти до уваги необхідні статистичні характеристики випадкових майбутніх валютних курсів; отже: $\overline{W}=\sum_{j=1}^{n}\overline{L}_j y_j$ та $\sigma_W=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j y_i y_j}$, де $\overline{L}_j$ – математичне сподівання випадкового майбутнього курсу L_j, σ_j – його стандартне відхилення від очікуваного рівня ($j=\overline{1,n}$), ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між випадковими курсами L_i та L_j щодо i-ої та j-ої валют ($i,j=\overline{1,n}$).

Тож маємо змогу визначити детермінований еквівалент $\hat{W}$ випадкової майбутньої вартості переформованого валютного резерву: $\hat{W}=\overline{W}+k\sigma_W$, де параметр k відбиває ставлення до ризику суб'єкта ризику – власника валютного резерву: $k=0$ – за нейтрального, $k>0$ – за схильного та $k<0$ – за несхильного ставлення до ризику; причому чим більше ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, тим більшим за абсолютною величиною є значення k.

За наведених позначень задача визначення оптимального (найціннішого) валютного резерву за умов ризику щодо майбутніх валютних курсів набирає вигляду:

$$\overline{W}=\sum_{j=1}^{n}\overline{L}_j y_j + k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j y_i y_j} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} K_j y_j = V, \quad y_j \geq 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (22)$$

Бачимо, що за винятком позначень відомих і невідомих, задача визначення оптимального складу валютного резерву (22) є схожою на задачу визначення оптимального фінансового портфеля (6). Проілюструємо процес розв'язування аналітичним методом задачі (22) оптимального управління валютним резервом за умов ризику для ситуації, коли ставлення до ризику є несхильним: $k<0$.

Уведемо, насамперед, нові змінні: $t_j=\sigma_j y_j$, $j=\overline{1,n}$, а також обчислимо нові відомі величини:

$$a_j=\frac{\overline{L}_j}{\sigma_j}, \qquad b_j=\frac{K_j}{\sigma_j}, \qquad j=\overline{1,n}. \qquad (23)$$

Тепер задача (22) перетвориться на оптимізаційну задачу:

$$\hat{W}=at+k\sigma_W \to \max, \quad \sigma_W^2=t^T R t, \quad bt=V, \quad t\geq 0, \qquad (24)$$

яка практично збігається із задачею (9), тобто щодо неї теж може бути задіяно запропонований аналітичний інструментарій.

Приклад 2. Припустимо, що валютний резерв може утворюватися з трьох валют: австралійський долар (AUD), англійський фунт стерлінгів (GBP) і євро (EUR), причому наявний валютний резерв містить по 1 000 000 одиниць кожної з валют. За поточні курси гривні щодо цих валют оберемо встановлені Національним банком України (НБУ) станом на 21 лютого 2013 р.: AUD – 8,245229; GBP – 12,237079; EUR – 10,686641 (усі офіційні курси гривні беремо з джерела [20]). Отже, 21 лютого 2013 р. вартість цього валютного резерву у гривневому еквіваленті, обчислена за відомими валютними курсами саме на цю дату, становитиме: V = 31 168 969 грн. З'ясуємо, як саме слушно переформувати 21 лютого цей валютний резерв, щоб станом на 22 лютого 2013 р. детермінований еквівалент його випадкової вартості був якнайбільшим?

Валютні курси, які будуть встановлені НБУ на 22 лютого, 21 лютого ми розглядаємо як випадкові величини. Статистичні характеристики цих випадкових величин знайдемо за відомими даними про валютні курси за період від 8 лютого до 21 лютого 2013 р., упродовж якого було 10 операційних днів. А саме: очікувані на 11-й операційний день (22 лютого 2013 р.) значення валютних курсів визначимо за моделями лінійного тренду: $\overline{L}_j = h_j + q_j \cdot \tau$, $(j = \overline{1,3})$, поклавши параметр часу $\tau = 11$; параметри h_j та q_j цих трендових моделей, а також параметри σ_j та ρ_j випадкових валютних курсів $(i, j = \overline{1,3})$ розрахуємо на основі масивів даних $\{K_j(\tau) \mid \tau = \overline{1,10}\}$, $j = \overline{1,3}$, які є відомими. Вихідні дані та результати обчислень подано в таблицях 1 і 2.

Таблиця 1

Офіційний курс гривні щодо іноземних валют AUD, GBP і EUR та статистичні характеристики майбутнього (станом на 22.02.2013) курсу

Дата	Опер_день	AUD	GBP	EUR
08.02.2013	1	8,243105	12,554868	10,827318
11.02.2013	2	8,259804	12,630517	10,689838
12.02.2013	3	8,215079	12,540628	10,703426
13.02.2013	4	8,194853	12,467781	10,740993
14.02.2013	5	8,265238	12,44176	10,774564
15.02.2013	6	8,271039	12,395009	10,652271
18.02.2013	7	8,259537	12,378745	10,650673
19.02.2013	8	8,243669	12,382241	10,672254
20.02.2013	9	8,268001	12,362247	10,669856
21.02.2013	10	8,245229	12,237079	10,686641
Очікуване значення		8,260532	12,244295	10,641614
Стандартне відхилення		0,0233203	0,1080365	0,0544730
Коефіцієнт варіації, %		0,28%	0,87%	0,51%

Таблиця 2

Кореляційна матриця валютних курсів та обернена до неї

	AUD	GBP	EUR	AUD	GBP	EUR
AUD	1,000000	-0,221138	-0,296438	1,108401	0,123301	0,273697
GBP	-0,221138	1,000000	0,445050	0,123301	1,260707	-0,524526
EUR	-0,296438	0,445050	1,000000	0,273697	-0,524526	1,314575

З табл. 1 помічаємо, що коефіцієнт варіації кожного з випадкових валютних курсів не перевищує 1%. Отже, вплив стандартного відхилення σ_W випадкової вартості валютного резерву на її детермінований еквівалент $\hat{W} = \overline{W} + k \cdot \sigma_W$ стане відчутним за умови, якщо параметр k набиратиме за абсолютною величиною досить великих значень. Оберемо для розрахунків значення $k = -50$, що відповідає надзвичайно високій несхильності власника валютного резерву щодо валютного ризику.

Обчислимо за формулами (23) та (16) значення проміжних розрахункових сталих (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), α, β і γ, після чого перевіримо умови (21) та (20), обчисливши значення дробу $\frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta}$:

Валюта (j)	AUD (1)	GBP (2)	EUR (3)
$a_j = \bar{d}_j / \sigma_j$	354,221269	113,334791	195,355607
$b_j = 1/\sigma_j$	353,565059	113,268002	196,182198

$\alpha = aR^{-1}a^T$	229989,2456
$\beta = bR^{-1}b^T$	229861,9223
$\gamma = aR^{-1}b^T$	229925,0075
$(\alpha\beta - \gamma^2)/\beta$	1,1356

Умови (21) та (20) справджуються, оскільки $k^2 = 2500$, тому виконаємо за формулами (18) і (19) подальші розрахунки, звертаючи увагу на невід’ємність отриманих результатів (через δ показано допоміжну розрахункову сталу $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \beta(\alpha - k^2)}$ =23966,51363, яка використовується задля скорочення записів формул (17)–(19)):

Валюта (j)	AUD (1)	GBP (2)	EUR (3)
$t^T = \frac{I}{\delta}(a + \frac{-\gamma + \delta}{\beta} b)R^{-1}$	62813,0274	12069,9216	38705,4557
$y_j = t_j / \sigma_j$	2 693 496	111 721	710 543

Отже, 21 лютого 2013 р. валютний резерв доцільно переформувати так, щоб він містив валюти AUD близько 2,69 млн., валюти EUR – близько 0,71 млн., та валюти GBP – близько 0,11 млн. (в одиницях відповідної валюти). У порівнянні з попереднім валютним резервом новий резерв має дещо більшу очікувану вартість (у гривневому еквіваленті майже 3,118 млн. грн. проти майже 3,115 млн. грн.) та значно менше стандартне відхилення майбутньої випадкової вартості від її очікуваного рівня (65 тис. грн. проти 136 тис. грн.). І хоча за фактичними офіційними курсами гривні, що були встановлені НБУ 22 лютого 2013 р. (AUD – 8,196259; GBP – 10,53957; EUR – 12,195753), у гривневому еквіваленті вартість двох валютних резервів майже однакова (3,0927931 млн. грн. проти 3,0931582 млн. грн.), переформований валютний резерв є значно стійкішим щодо валютного ризику, аніж резерв, який ми мали до переформування. Задачу розв’язано.

Висновки

Обґрунтовано метод аналітичного розв’язування задачі Марковиця в оновленій постановці, а також окреслено межі та можливі сфери – ринок цінних паперів і валютний ринок – його використання. Теоретичні дослідження проілюстровано конкретними прикладами.

Література

1. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection / H. M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – # 7 (1). – Pp. 77-91.

2. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments / H. M. Markowitz. – N.Y. : John Willey, 1959. – 758 p.

3. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин ; пер. с англ. – М. : Мир, 1964. – 835 с.

4. *Подиновский В. В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

5. *Кини Р. Л.* Принятие решений при многих критериях : предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.

6. *Дубровін В. І.* Оцінювання ризиків інвестиційного портфеля / В. І. Дубровін, В. М. Льовкін // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2010. – № 1. – С. 51-55.

7. *Касимов Ю. Ф.* Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг / Ю. Ф. Касимов. – М. : Анкил, 2005. – 144 с.

8. *Олійник В. М.* Деякі аспекти оптимізації портфеля фінансових інструментів [Електронний ресурс] / В. М. Олійник, С. М. Фролов, Ю. І. Лещенко // Електронний журнал «Маркетинг і менеджмент інновацій». – 2012. – № 1. – С. 140-147. − Режим доступу : http://mmi.fem.sumdu.edu.ua/

9. *Климова Е. Н.* Математическое моделирование оптимального портфеля ценных бумаг с ограничениями на отдельные активы / Е. Н. Климова, В. Л. Шур, О. В. Москалец // Вестник Самарского государственного университета. – Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/2 (67). – С. 263-275.

10. *Новоселов А. А.* Математическое моделирование финансовых рисков : Теория измерения / А. А.Новоселов. – Новосибирск, ИВМ РАН, СО, 2001. – 99 с.

11. *Параев Ю. И.* Исследование инвестиционных стратегий управления портфелем ценных бумаг / Ю. И. Параев, С. А. Цветницкая // Управление, вычислительная техника и информатика. Вестник Томского государственного университета. – 2009. – № 4 (9). – С. 17-25.

12. *Кузнецов М. А.* Алгоритм формирования инвестиционного портфеля на основе метода Марковица и его оптимизация по скорости выполнения [Електронний ресурс] / М. А. Кузнецов, А. В. Авдюхин. − Режим доступу : www.science-education.ru/103–6399

13. *Филимонов Н.* Задача квадратичного программирования с параметром в правых частях ограничений и ее применение при ормировании портфеля ценных бумаг [Електронний ресурс] / Н.Филимонов. – Режим доступа : http://www.referat.ru/referats/view/6157

14. *Таха Х.* Введение в исследование операций. В 2-х книгах / Х. Таха ; пер. с англ. – Кн. 2. – М. : Мир, 1985. – 496 с.

15. *Кігель В. Р.* Наближене обчислення детермінованого еквівалента випадкового прибутку з метою визначення найприбутковішої альтернативи за умов ризику / В. Р. Кігель // Вчені записки (серія «Економіка») / Університет економіки та права «КРОК». – 2009. – Вип. 20, том Ш. – С. 209-214.

16. *Кігель В. Р.* Індивідуальні пріоритети у недетермінованих задачах оптимізації фінансових рішень / В .Р. Кігель / Наукові студії (культура, освіта – антропоцентричні парадигми і сучасний світ). Філософія – Філологія – Педагогіка – Економіка // Наукове видання, Український гуманітарний інститут. – К. : Міленіум, 2012. – Вип. 1, В. XVIII+427 с. – С. 614-632.

17. *Кигель В. Р.* Методы обоснования управленческих решений при формировании финансового портфеля / В. Р. Кигель // Материалы Межвузовской научно-практической конференции «Современные методы и технологии принятия управленческих решений», Киев, 1999 // Персонал. – 1999. – № 6 (54). – Приложение № 5. – С. 116-121. (0,65 п.л.)

18. Економіко-математичне моделювання в управлінні валютними резервами / В. Р. Кігель // Вісник НБУ. – 2000. – № 4. – С. 44-47.

19. *Кігель В. Р.* Як зміцнювати валютний резерв засобами математики, з урахуванням індивідуальних переважань: Посібник / В. Р. Кігель. – К. : Кондор, 2005. – 51 с.

20. Офіційні курси гривні до іноземних валют, що встановлені Національним банком України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bank.gov.ua/control/uk/curmetal/currency/search/form/period