

Про слабку збіжність стохастичних диференціальних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами

ІВАН Г. КРИКУН

(Представлена В. Я. Гутлянським)

Анотація. В роботі розглядаються одновимірні стохастичні диференціальні рівняння Іто та стохастичні диференціальні рівняння з локальним часом, що залежать від малого параметру ε та мають нерегулярні коефіцієнти (наприклад, необмежений коефіцієнт зносу або неліпшицевий коефіцієнт дифузії). Узагальнюються існуючі результати щодо умов існування взаємнооднозначної відповідності між стохастичними рівняннями Іто та стохастичними рівняннями з локальним часом. Досліджується слабка збіжність розв'язків таких рівнянь при $\varepsilon \rightarrow 0$. Встановлено вигляд коефіцієнтів граничного процесу. Доведені необхідні й достатні умови слабкої збіжності розв'язків цих рівнянь до граничного випадкового процесу.

2010 MSC. 60H10, 60G20.

Ключові слова та фрази. Стохастичні диференціальні рівняння Іто; локальний час; міри, породжені випадковими процесами; слабка збіжність мір.

Вступ

В теорії стохастичних диференціальних рівнянь добре відомо, що збіжності коефіцієнтів недостатньо для слабкої збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто (див. [1], [2]). Необхідними є додаткові умови на коефіцієнти стохастичних диференціальних рівнянь. Наприклад, в [1, теорема 11.3.3], припускається, що коефіцієнт дифузії задовольняє умові типу умови Ліпшиця.

В роботах Г. Кулініча [3] та М. Портенка [4] було розглянуто наступні стохастичні диференціальні рівняння Іто:

$$x_\varepsilon(t) = x + \int_0^t b_\varepsilon(x_\varepsilon(s))ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(x_\varepsilon(s))dw(s).$$

Стаття надійшла в редакцію 12.02.22

В статті [3] було встановлені необхідні та достатні умови слабкої збіжності деяких функцій від розв'язків цих стохастичних рівнянь до розв'язку певного стохастичного рівняння Іто, а також, в окремих випадках, для слабкої збіжності процесів x_ε до узагальнених дифузійних процесів. У [4, §3, розділ III] було розглянуто збіжність функції $b_\varepsilon(x)$ до δ -функції, що зосереджена у нулі, при $\sigma_\varepsilon(x) \equiv 1$ та було доведено слабку збіжність розв'язків цього стохастичного рівняння до узагальненого дифузійного процесу. В роботах С. Махна [6, 7] було отримано умови слабкої збіжності розв'язків деяких стохастичних рівнянь Іто, до розв'язку стохастичного рівняння з локальним часом.

В роботі розглядаються стохастичні диференціальні рівняння, що містять локальний час. Подібні стохастичні рівняння було вперше розглянуто Дж. Харрісоном & Л. Шеппом [8] та Ж.-Ф. Ле Галлем [9]. В цих роботах розв'язки стохастичних рівнянь, що містять локальний час, було пов'язано з т.зв. косим броунівським рухом – випадковим процесом, визначеним К. Іто & Х. Маккіном [10]. В подальшому в роботах Ж.-Ф. Ле Галла [9], Х.-Й. Енгельберта & В. Шмідта [11], С. Махна [12] було отримано формули зв'язку між розв'язками стохастичних рівнянь Іто та розв'язками стохастичних рівняння з локальним часом.

В даній роботі ми розглядаємо стохастичні диференціальні рівняння Іто та стохастичні диференціальні рівняння з локальним часом та з нерегулярними коефіцієнтами, що залежать від малого параметру ε . Основна ідея роботи полягає в узагальненні відомих результатів щодо умов існування взаємнооднозначної відповідності між стохастичними рівняннями Іто та стохастичними рівняннями з локальним часом. Досліджується слабка збіжність розв'язків (у сенсі слабкої збіжності мір, породжених процесами на певному функціональному просторі) цих рівнянь при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Схожі питання та близькі теми до тих, що вивчаються в даній роботі, були також розглянуто в роботах С. Махна [13], [14, Глави 3–5], [15, 16], І. Крикуна [17–21] та І. Крикуна & С. Махна [22, 23].

В книгах С. Махна [14], Дж. Жакода & А. Шіряєва [24], Ф. Проттера [25], А. Бородіна & П. Салмініна [26] містяться детальні огляди результатів інших авторів.

1. Позначення

Наведемо позначення та означення, які будуть використовуватись в подальшому тексті.

Будемо використовувати звичайні позначення: $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ – для ймовірнісного простору з потоком σ -алгебр $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]$ та $(w(t), \mathfrak{F}_t)$

для стандартного одновимірного вінерівського процесу відносно потоку σ -алгебр $\mathfrak{F}_t$.

Індикаторну функцію множини A будемо позначати $I_{\{A\}}(x)$.

Розглянемо одновимірне стохастичне диференціальне рівняння, що містить локальний час

$$\xi(t) = x + \beta L^\xi(t, 0) + \int_0^t b(\xi(s))ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))dw(s), \quad (1.1)$$

де β є константою, а $b(x), \sigma(x)$ – вимірні функції.

Означення 1. Згідно [11, означення 4.7 (1)], будемо говорити, що рівняння (1.1) має *слабкий розв'язок*, якщо для даних функцій $b(x)$, $g(x)$ і $\sigma(x)$ та для константи β існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ з потоком σ -алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$, неперервний семіmartингал $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ та стандартний одновимірний вінерівський процес $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ такі, що локальний час процесу ξ в точці 0 за час t (будемо в подальшому позначати його $L^\xi(t, 0)$), який визначається рівністю

$$L^\xi(t, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{\{(-\delta, \delta)\}}(\xi(s))\sigma^2(\xi(s))ds \quad (1.2)$$

існує майже напевно і рівняння (1.1) виконується майже напевно.

Зауважимо, що в означенні вище ми використовуємо т.зв. напівмартингальний (або семіmartингальний) локальний час, який має незначні відмінності від броунівського локального часу (з детальною побудовою напівмартингального локального часу можна ознайомитися в [25, Chapter IV], а порівняти ці локальні часи можна в [26, Chapter V]).

Нехай $(C[0, T], C_t), t \in [0, T]$ позначає простір неперервних функцій на інтервалі $[0, T]$. Позначимо через μ_ε міру, породжену процесом ξ_ε на функціональному просторі $(C[0, T], C_t)$.

Будемо вивчати слабку збіжність мір, породжених процесами. Цей тип збіжності будемо позначати знаком $\Rightarrow$.

Означення 2. Через $\mathbb{D}h(x)$ будемо позначати *симетричну похідну функції h в точці x* та визначати її рівністю

$$\mathbb{D}h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(x + \varepsilon) - h(x - \varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

Через $\mathbf{n}_h(dx)$ будемо позначати *другу похідну функції $h(x)$ в сенсі розподілів* та визначати її для довільної нескінченно диференційованої функції $H(x)$ з компактним носієм за допомогою функціональної рівності

$$\int \frac{d^2 H(x)}{dx^2} h(x) dx = \int H(x) \mathbf{n}_h(dx).$$

Будемо використовувати функцію $sgnx$ такого вигляду:

$$sgnx = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Для пари вимірних функцій $(f(x), g(x))$ будемо позначати

$$(f, g) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda),$$

якщо існують деякі константи λ, Λ , $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ такі, що для довільного x виконуються нерівності

$$|f(x)| \leq \Lambda, \quad \lambda \leq g(x) \leq \Lambda.$$

2. Умови на коефіцієнти

Наведемо тут обмеження на коефіцієнти рівнянь, які будуть використовуватись в подальшому тексті.

Умова (I).

Нехай $f_1(x), f_2(x)$ – деякі двічі диференційовані функції, що мають властивості:

$$I_1. \quad f_1(0) = f_2(0) = 0; \quad f'_1(x) > 0, \quad f'_2(x) > 0; \quad f'_1(0) = f_1, \quad f'_2(0) = f_2;$$

$$I_2. \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x \geq 0 \end{cases}.$$

Умова (II).

Нехай β та γ – константи, а $g(x), \sigma(x)$ – деякі вимірні функції, що мають властивості:

$$II_1. \quad |\beta| < 1, \quad |\gamma| < 1.$$

$$II_2. \quad \text{Пара функцій } (g, \sigma^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda).$$

Умова (III).

Нехай β_ϵ – константа, $g_\epsilon(x), b_\epsilon(x), \sigma_\epsilon(x)$ – деякі вимірні функції, що мають властивості:

$$III_1. \quad \text{При будь-якому } \epsilon > 0 \quad |\beta_\epsilon| < 1.$$

$$III_2. \quad \text{При будь-якому } \epsilon > 0 \text{ існує єдиний слабкий розв'язок стохастичного рівняння.}$$

III₃. Пара функцій $(g_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.

III₄. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{\sigma_\varepsilon^2(y)} dy \right| \leq \Lambda.$$

3. Слабка збіжність стохастичних рівнянь Іто

Розглянемо випадковий процес $X(t)$ як розв'язок стохастичного рівняння Іто

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(X(s)) ds + \int_0^t \gamma(X(s)) dw(s). \quad (3.1)$$

Припустимо, що пара функцій $(\alpha, \gamma^2) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$, тоді згідно [11, теорема 4.35] рівняння (3.1) має єдиний слабкий розв'язок.

З [11, формула 4.3] випливає, що якщо для функції $f(x)$ існують введені раніше в означенні 2 функції $\mathbb{D}f(x)$ та $\mathbf{n}_f(dx)$, то для функції $f(x)$ та процесу $X(t)$ має місце формула Танака [14, Теорема 3, стор.103], [27, Theorem 1.5, p. 223], яка є узагальненням формули Іто:

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t \mathbb{D}f(X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int L^X(t, y) \mathbf{n}_f(dy). \quad (3.2)$$

Тепер побудуємо деяку функцію $u(x)$, яка складається з двох частин (залежно від знаку аргументу). А саме, припустимо, що $u_i(x)$, $i = 1, 2$ – деякі двічі диференційовані функції, що задовольняють Умову (I). Тоді будемо мати

$$\mathbb{D}u(x) = \frac{1}{2}(u_2'(x) + u_1'(x)) + \frac{1}{2}(u_2'(x) - u_1'(x)) \operatorname{sgn} x;$$

$$\mathbf{n}_u(dx) = (u_2 - u_1) \delta_0(x) dx + \mathbb{A}_u(x) dx;$$

де ми визначили функцію $\mathbb{A}_u(x)$ таким чином

$$\mathbb{A}_u(x) = \frac{1}{2}[(u_2''(x) + u_1''(x)) + (u_2''(x) - u_1''(x)) \operatorname{sgn} x], \quad (3.3)$$

і $\delta_0(x)$ – це δ -функція Дірака, що зосереджена в нулі.

Далі нехай функція $v(x) = u^{-1}(x)$ позначатиме обернену функцію для функції $u(x)$.

Лема 1. Нехай випадковий процес $X(t)$ задано рівнянням (3.1), а функція $u(x)$ задовольняє Умову (I). Припустимо, що для деякого випадкового процесу $Y(t)$ має місце рівність $Y(t) = u(X(t))$. Тоді виконуються наступні рівності

$$L^Y(t, 0) = \frac{u_1 + u_2}{2} L^X(t, 0), \quad (3.4)$$

$$Y(t) = Y(0) + \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} L^Y(t, 0) + \int_0^t \hat{\alpha}(Y(s)) ds + \int_0^t \hat{\gamma}(Y(s)) dw, \quad (3.5)$$

де функція $\mathbb{A}_u(x)$ визначена (3.3), а

$$\hat{\alpha}(x) = \mathbb{D}u(v(x))\alpha(v(x)) + \frac{1}{2}\gamma^2(v(x))\mathbb{A}_u(v(x)),$$

$$\hat{\gamma}(x) = \mathbb{D}u(v(x))\gamma(v(x)).$$

Доведення. Для функції $u(x)$ та для процесу $X(t)$ за формулою Танака (3.2) отримуємо рівність:

$$\begin{aligned} Y(t) = Y(0) + \\ + \int_0^t \left[\mathbb{D}u(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{A}_u(X(s)) \right] ds + \\ + \int_0^t \mathbb{D}u(X(s))\gamma(X(s))dw + \frac{u_2 - u_1}{2} L^X(t, 0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оскільки $X(s) = v(Y(s))$, то рівність (3.5) випливає з (3.6) та (3.4). Для доведення (3.4) застосуємо формулу Танака (3.2) до процесу (3.1) та функції $\bar{u}(x) = |u(x)|$. Будемо мати:

$$\mathbb{D}\bar{u}(x) = \frac{1}{2}(u'_2(x) - u'_1(x)) + \frac{1}{2}(u'_2(x) + u'_1(x))\operatorname{sgn}x;$$

$$\mathbf{n}_{\bar{u}}(dx) = (u_2 + u_1)\delta_0(x)dx + \mathbb{B}_u(x)dx;$$

де ми позначили через $\mathbb{B}_u(x)$ наступну функцію:

$$\mathbb{B}_u(x) = \frac{1}{2} \left[(u''_2(x) - u''_1(x)) + (u''_2(x) + u''_1(x))\operatorname{sgn}x \right]. \quad (3.7)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} |Y(t)| = |Y(0)| + \\ + \int_0^t \left[\mathbb{D}\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s)) \right] ds + \\ + \int_0^t \mathbb{D}\bar{u}(X(s))\gamma(X(s))dw + \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

За формулами (3.2) та (3.8) маємо:

$$\begin{aligned} L^Y(t, 0) &= \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \\ &+ \int_0^t \left[\mathbb{D}\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s)) \right] ds + \\ &+ \int_0^t \mathbb{D}\bar{u}(X(s))\gamma(X(s))dw - \int_0^t \operatorname{sgn}Y(s)dY(s). \end{aligned}$$

Останній інтеграл в цій рівності виведемо з формули (3.6) та з використанням наступної властивості процесів: $\operatorname{sgn}X(s) = \operatorname{sgn}Y(s)$. Будемо мати

$$\begin{aligned} L^Y(t, 0) &= \frac{u_2 + u_1}{2} L^X(t, 0) + \\ &+ \int_0^t \left[\mathbb{D}\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s)) \right] ds + \\ &+ \int_0^t \mathbb{D}\bar{u}(X(s))\gamma(X(s))dw + \int_0^t \frac{u_2 - u_1}{2} \operatorname{sgn}X(s)L^X(ds, 0) - \quad (3.9) \\ &- \int_0^t \operatorname{sgn}X(s) \left[\mathbb{D}u(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{A}_u(X(s)) \right] ds - \\ &- \int_0^t \operatorname{sgn}X(s)\mathbb{D}u(X(s))\gamma(X(s))dw. \end{aligned}$$

Оскільки функція $L^X(s, 0)$ зростає лише в точках s таких, що $X(s) = 0$, то

$$\int_0^t \operatorname{sgn}X(s)L^X(ds, 0) = 0.$$

Тепер приведемо подібні в правій частині (3.9), зауважимо що

$$\mathbb{D}\bar{u}(X(s)) - \operatorname{sgn}X(s)\mathbb{D}u(X(s)) = I_{\{0\}}(X(s)) \frac{u'_2(X(s)) - u'_1(X(s))}{2};$$

$$\mathbb{B}_u(X(s)) - \operatorname{sgn}X(s)\mathbb{A}_u(X(s)) = I_{\{0\}}(X(s)) \frac{u''_2(X(s)) - u''_1(X(s))}{2},$$

та продовжимо перетворення інтегралів, що додаються до локального часу в правій частині (3.9):

$$\int_0^t \left[\mathbb{D}\bar{u}(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{B}_u(X(s)) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -sgnX(s) \left[\mathbb{D}u(X(s))\alpha(X(s)) + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))\mathbb{A}_u(X(s)) \right] ds + \\
& + \int_0^t \left[\mathbb{D}\bar{u}(X(s))\gamma(X(s)) - sgnX(s)\mathbb{D}u(X(s))\gamma(X(s)) \right] dw = \\
& = \int_0^t \left(\alpha(X(s))I_{\{0\}}(X(s))\frac{u'_2(X(s)) - u'_1(X(s))}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\gamma^2(X(s))I_{\{0\}}(X(s))\frac{u''_2(X(s)) - u''_1(X(s))}{2} \right) ds + \\
& + \int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\frac{u'_2(X(s)) - u'_1(X(s))}{2}\gamma(X(s))dw = \\
& = \int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\frac{u'_2(X(s)) - u'_1(X(s))}{2}dX(s) + \\
& + \frac{1}{4}\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\gamma^2(X(s))(u''_2(X(s)) - u''_1(X(s)))ds = \\
& = \frac{u_2 - u_1}{2} \int_0^t I_{\{0\}}(X(s))dX(s) + \\
& + \frac{1}{4}\gamma^2(0)(u''_2(0) - u''_1(0)) \int_0^t I_{\{0\}}(X(s))ds = 0,
\end{aligned}$$

оскільки з [28, Лема 5, стор. 590] маємо $\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))dX(s) = 0$, а рівність нулю другого доданку випливає з наступного результату:

$$\begin{aligned}
\int_0^t I_{\{0\}}(X(s))dX(s) &= \int_0^t I_{\{0\}}(X(s))\frac{\alpha(X(s))}{\gamma^2(X(s))}\gamma^2(X(s))ds = \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_{\{0\}}(y)\frac{\alpha(y)}{\gamma^2(y)}L^X(t, y)dy = 0.
\end{aligned}$$

Тут перша рівність – результат з [27, стор. 217], а друга рівність випливає з [27, Розділ VI, Наслідок 1.6]. $\square$

Означення 3. Для деякої сталої $|\beta| < 1$ визначимо функцію $\kappa(x)$ наступним чином

$$\kappa(x) = \begin{cases} (1 - \beta)x, & x < 0 \\ (1 + \beta)x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

і через

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \beta}, & x < 0 \\ \frac{x}{1 + \beta}, & x \geq 0 \end{cases}$$

будемо позначати функцію, обернену до функції $\kappa(x)$. В подальшому для будь-якої функції f будемо позначати через $\tilde{f}$ функцію, визначену так:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(\kappa(x))}{1 + \beta \operatorname{sgn} x}. \quad (3.11)$$

Розглянемо два наступних стохастичних рівняння:

$$\xi(t) = x + \beta L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s), \quad (3.12)$$

$$\zeta(t) = \varphi(x) + \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s)) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s)) dw(s). \quad (3.13)$$

Добре відомо ([11, теорема 4.35], [29]), що якщо Умова (II) виконується, то і рівняння (3.12), і рівняння (3.13) мають єдиний слабкий розв'язок.

Наступна лема випливає з леми 1.

Лема 2. *Припустимо, що коефіцієнти рівняння (3.12) задовольняють Умову (II) і $\zeta(t)$ – розв'язок рівняння (3.13). Тоді процес $\kappa(\zeta(t))$ є розв'язком рівняння (3.12).*

З лем 1 та 2 випливає наступна лема.

Лема 3. *Припустимо, що функція $u(x)$ задовольняє Умову (I), а коефіцієнти процесу (3.12) задовольняють Умову (II). Тоді процес $\eta(t)$, визначений рівністю $\eta(t) = u(\xi(t))$, задовольняє наступне рівняння*

$$\begin{aligned} \eta(t) = & u(x) + \frac{u_2 - u_1 + \beta(u_2 + u_1)}{u_2 + u_1 + \beta(u_2 - u_1)} L^\eta(t, 0) + \\ & + \int_0^t g^*(\eta(s)) ds + \int_0^t \sigma^*(\eta(s)) dw(s), \end{aligned} \quad (3.14)$$

де використано позначення

$$g^*(x) = \mathbb{D}u(u^{-1}(x))g(u^{-1}(x)) + \frac{\sigma^2(u^{-1}(x))}{2} \mathbb{A}_u(u^{-1}(x)),$$

$$\sigma^*(x) = \mathbb{D}u(u^{-1}(x))\sigma(u^{-1}(x)).$$

Доведення. Зауважимо, що для функції $\tau(x)$, визначеної

$$\tau(x) = u(\kappa(x)) = \begin{cases} u_1((1 - \beta)x), & x \leq 0 \\ u_2((1 + \beta)x), & x \geq 0 \end{cases},$$

виконуються рівності $\eta(t) = u(\xi(t)) = u(\kappa(\zeta(t))) = \tau(\zeta(t))$.

Тоді маємо такі результати:

$$\tau_1(0) = \tau_2(0) = 0;$$

$$\tau'_1(x) = (1 - \beta)u'_1((1 - \beta)x) > 0, \tau'_2(x) > 0;$$

$$\tau'_1(0) = \tau_1 = (1 - \beta)u_1, \tau'_2(0) = \tau_2 = (1 + \beta)u_2;$$

для функції $\tau(x)$ існує обернена функція: $\tau^{-1}(x) = \varphi(u^{-1}(x))$; та існують другі похідні $\tau''_1(x), \tau''_2(x)$.

Далі маємо:

$$\mathbb{D}\tau(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x) \mathbb{D}u(\kappa(x));$$

$$\mathbb{A}_\tau(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x)^2 \mathbb{A}_u(\kappa(x));$$

$$\mathbf{n}_\tau(dx) = (\tau_2 - \tau_1)\delta_0(x)dx + (1 + \beta \operatorname{sgn} x)^2 \mathbb{A}_u(\kappa(x))dx.$$

Таким чином, приходимо до висновку, що виконуються вимоги леми 1 на процесі (3.13) та (3.14) з функцією $\tau(x)$. Будемо мати:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(x) &= \mathbb{D}\tau(\tau^{-1}(x))\tilde{g}(\tau^{-1}(x)) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\tau^{-1}(x))\mathbb{A}_\tau(\tau^{-1}(x)) = \\ &= (1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x))\mathbb{D}u(\kappa(\tau^{-1}(x)))\frac{g(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x)} + \\ &+ \frac{\sigma^2(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{2(1 + \beta \operatorname{sgn}(\tau^{-1}(x)))^2}(1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x))^2 \mathbb{A}_u(\kappa(\tau^{-1}(x))) = \\ &= \mathbb{D}u(u^{-1}(x))g(u^{-1}(x)) + \frac{\sigma^2(u^{-1}(x))}{2}\mathbb{A}_u(u^{-1}(x)) = g^*(x); \\ \hat{\gamma}(x) &= \mathbb{D}\tau(\tau^{-1}(x))\tilde{\sigma}(\tau^{-1}(x)) = \\ &= (1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x))\mathbb{D}u(\kappa(\tau^{-1}(x)))\frac{\sigma(\kappa(\tau^{-1}(x)))}{1 + \beta \operatorname{sgn} \tau^{-1}(x)} = \\ &= \mathbb{D}u(u^{-1}(x))\sigma(u^{-1}(x)) = \sigma^*(x). \end{aligned}$$

Застосувавши тепер лему 1, отримаємо твердження леми 3. $\square$

Тепер розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння Іто:

$$v_\varepsilon(t) = x + \int_0^t (b_\varepsilon(v_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(v_\varepsilon(s)))ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(v_\varepsilon(s))dw(s). \quad (3.15)$$

Нехай для коефіцієнтів (3.15) виконується Умова (III); процесу v_ε на просторі $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$ відповідає міра ν_ε .

Введемо функції $F_\varepsilon(x)$ та $f_\varepsilon(x)$

$$F_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)} dy \right\}, \quad f_\varepsilon(x) = \int_0^x F_\varepsilon(y) dy. \quad (3.16)$$

Оскільки $f_\varepsilon(x)$, як функція x , монотонно зростає, то вона має обернену, яку будемо позначати $f_\varepsilon^{-1}(x)$. Припустимо, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x \geq 0 \end{cases}. \quad (3.17)$$

За умови III_4 границя в (3.17) існує рівномірно на компактах. Тоді рівномірно на компактах $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^{-1}(x) = f^{-1}(x)$ і $f^{-1}(x)$ є оберненою функцією до функції $f(x)$.

Гранична міра ν на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$ буде відповідати процесу

$$v(t) = x + \alpha L^v(t, 0) + \int_0^t g(v(s)) ds + \int_0^t \sigma(v(s)) dw(s). \quad (3.18)$$

Теорема 1. *Нехай для функції $f(x)$ з (3.17) та для коефіцієнтів рівнянь (3.18), (3.15) виконуються Умови (I), (II), (III) відповідно. Для того, щоб $\nu_\varepsilon \Rightarrow \nu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

- i) $\alpha = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2};$
- ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y) \sigma_\varepsilon^2(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(y) \mathbb{D}f(y)} dy$ для всіх $x \in \mathbb{R};$
- iii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{\sigma_\varepsilon^2(y)} dy = \int_0^x \left[\frac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}f(y)}{\mathbb{D}f(y)} \right] dy$ для всіх $x \in \mathbb{R}.$

Доведення. Нехай процес $\pi_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(v_\varepsilon(t))$ і ς_ε – міра, що відповідає йому на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$. З формули Іто випливає, що процес $\pi_\varepsilon(t)$ задовольняє рівняння

$$\pi_\varepsilon(t) = \pi_\varepsilon(0) + \int_0^t \widehat{g}_\varepsilon(\pi_\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \widehat{\sigma}_\varepsilon(\pi_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (3.19)$$

Тут $\widehat{g}_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x)) g_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))$, $\widehat{\sigma}_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x)) \sigma_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(x))$. Нехай $\pi(t) = f(v(t))$ і позначимо через ς міру, що відповідає процесу π на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_t)$.

Згідно [7, лема 5], треба перевірити, що вимоги **i)**, **ii)**, **iii)** необхідні й достатні для слабкої збіжності мір ς_ε до міри ς . В силу Умови (III) пара $(\widehat{g}_\varepsilon, \widehat{\sigma}_\varepsilon^2) \in \mathcal{L}(k, K)$ з деякими константами k, K .

З леми 3 випливає, що процес $\pi(t) = f(v(t))$ задовольняє рівнянню (3.14) з відповідним виразом для коефіцієнта при локальному часі (з заміною констант u_1, u_2, β на f_1, f_2, α , відповідно):

$$\begin{aligned} \pi(t) = & \pi(0) + \frac{f_2 - f_1 + \alpha(f_2 + f_1)}{f_2 + f_1 + \alpha(f_2 - f_1)} L^\pi(t, 0) + \\ & + \int_0^t \widehat{g}(\pi(s)) ds + \int_0^t \widehat{\sigma}(\pi(s)) dw(s), \end{aligned}$$

де позначено $\widehat{g}(x) = \mathbb{D}f(f^{-1}(x))g(f^{-1}(x)) + \frac{\sigma^2(f^{-1}(x))}{2} \mathbb{A}_f(f^{-1}(x))$,

$$\widehat{\sigma}(x) = \mathbb{D}f(f^{-1}(x))\sigma(f^{-1}(x)).$$

З іншого боку, з результатів роботи [6] випливає, що граничний процес для $\pi_\varepsilon(t)$ може бути лише розв'язком рівняння Іто, тобто з коефіцієнтом 0 при локальному часі. Звідси можемо отримати значення для константи α – тому виконується вимога **i)**.

Враховуючи це, з [6, теорема 1] отримаємо, що наступні умови необхідні й достатні для збіжності $\varsigma_\varepsilon \Rightarrow \varsigma$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy &= \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))\sigma_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))} dy = \\ &= \int_0^{f_\varepsilon^{-1}(x)} \frac{1}{F_\varepsilon(z)\sigma_\varepsilon^2(z)} dz \rightarrow \int_0^{f^{-1}(x)} \frac{1}{\mathbb{D}f(z)\sigma^2(z)} dz = \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(f^{-1}(y))[\mathbb{D}f(f^{-1}(y))]^2} dy = \int_0^x \frac{1}{\widehat{\sigma}^2(y)} dy ; \\ \int_0^x \frac{\widehat{g}_\varepsilon(y)}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy &= \int_0^x \frac{g_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))}{F_\varepsilon(f_\varepsilon^{-1}(y))\sigma_\varepsilon^2(f_\varepsilon^{-1}(y))} dy = \int_0^{f_\varepsilon^{-1}(x)} \frac{g_\varepsilon(z)}{\sigma_\varepsilon^2(z)} dz \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^{f^{-1}(x)} \left[\frac{g(z)}{\sigma^2(z)} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_f(z)}{\mathbb{D}f(z)} \right] dz = \\ &= \int_0^x \left[\frac{g(f^{-1}(y))}{\sigma^2(f^{-1}(y))} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_f(f^{-1}(y))}{\mathbb{D}f(f^{-1}(y))} \right] \frac{dy}{\mathbb{D}f(f^{-1}(y))} = \\ &= \int_0^x \left[\frac{g(f^{-1}(y))}{\sigma^2(f^{-1}(y))\mathbb{D}f(f^{-1}(y))} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_f(f^{-1}(y))}{[\mathbb{D}f(f^{-1}(y))]^2} \right] dy = \int_0^x \frac{\widehat{g}(y)}{\widehat{\sigma}^2(y)} dy , \end{aligned}$$

що еквівалентно вимогам **ii)** та **iii)** відповідно. $\square$

4. Слабка збіжність стохастичних диференціальних рівнянь, що містять локальний час

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння, що містить локальний час, та з коефіцієнтами, що залежать від малого параметру:

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) = x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t (b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))) ds + \\ + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Позначимо через μ_ε міру на $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$, породжену процесом ξ_ε .

Нехай $\xi(t)$ – буде слабким розв'язком рівняння наступного стохастичного диференціального рівняння, що містить локальний час:

$$\xi(t) = x + \gamma L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \quad (4.2)$$

Позначимо міру, породжену ξ на просторі $(\mathbb{C}[0, T], \mathcal{C}_T)$, через μ .

З [11, теорема 4.35] випливає, що в умовах наступної теореми рівняння (4.2) має єдиний слабкий розв'язок.

Теорема 2. *Нехай для функції $f(x)$ з (3.17) та для стохастичних рівнянь (4.2), (4.1) виконуються відповідно Умови (I), (II), (III) і $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для того, щоб $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad & \gamma = \frac{f_1 - f_2 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_1 - f_2)}, \\ \text{jj)} \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y) \sigma_\varepsilon^2(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(y) \mathbb{D}f(y)} dy \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}; \\ \text{jjj)} \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{\sigma_\varepsilon^2(y)} dy = \int_0^x \left[\frac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \frac{1}{2} \mathbb{A}_f(y) \right] dy \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Доведення. Аналогічно формулам (3.10)–(3.11), для $|\beta_\varepsilon| < 1$ введемо функції κ_ε , φ_ε , $\tilde{g}_\varepsilon$, $\tilde{\sigma}_\varepsilon$:

$$\kappa_\varepsilon(x) = \begin{cases} (1 - \beta_\varepsilon)x, & x \leq 0 \\ (1 + \beta_\varepsilon)x, & x \geq 0 \end{cases};$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ – обернена функція до $\kappa_\varepsilon(x)$,

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) = \frac{g_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}, \tilde{b}_\varepsilon(x) = \frac{b_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}, \tilde{\sigma}_\varepsilon(x) = \frac{\sigma_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}.$$

Введемо процес $\eta_\varepsilon(t)$ – розв’язок рівняння

$$\eta_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t \left(\tilde{b}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) + \tilde{g}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) \right) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(s)) dw(s).$$

Позначимо

$$\tilde{F}_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{\tilde{b}_\varepsilon(y)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy \right\}, \quad \tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_0^x \tilde{F}_\varepsilon(y) dy.$$

Тоді

$$\tilde{F}_\varepsilon(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \frac{b_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))}{\sigma_\varepsilon^2(\kappa_\varepsilon(y))} (1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} y) dy \right\} = F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x));$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\varepsilon(x) &= \int_0^x \tilde{F}_\varepsilon(y) dy = \int_0^x F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y)) dy = \\ &= \int_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{F_\varepsilon(z)}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} z} dz = \frac{f_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x}. \end{aligned}$$

З (3.17) та з того що $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon = \beta$, маємо, що

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(x))}{1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} x} = \begin{cases} \frac{f_1(\kappa(x))}{1 - \beta}, & x \leq 0 \\ \frac{f_2(\kappa(x))}{1 + \beta}, & x \geq 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \tilde{f}_1(x), & x \leq 0 \\ \tilde{f}_2(x), & x \geq 0 \end{cases} =: \tilde{f}(x). \end{aligned}$$

Значить:

$$\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = 0; \quad \tilde{f}_1'(x) = f_1'(\kappa(x)), \quad \tilde{f}_2'(x) = f_2'(\kappa(x)),$$

$$\tilde{f}_1'(0) = \tilde{f}_1 = f_1, \quad \tilde{f}_2'(0) = \tilde{f}_2 = f_2;$$

існують другі похідні $\tilde{f}_1''(x) = (1 - \beta)f_1''(\kappa(x))$, $\tilde{f}_2''(x) = (1 + \beta)f_2''(\kappa(x))$; та існує обернена $\tilde{f}^{-1}(x) = \varphi(f^{-1}(\kappa(x)))$.

Згідно з лемою 2, $\xi_\varepsilon(t) = \kappa_\varepsilon(\eta_\varepsilon(t))$ – є розв’язком рівняння (4.1). З теореми 1 випливає, що ϑ_ε – міри, породжені η_ε , збігаються до ϑ

– міри, породженої η , при виконанні умов теореми 1 відносно коефіцієнтів $\eta(t)$, де $\eta(t)$ відповідно задовольняє рівнянню

$$\eta(t) = \varphi(x) + \alpha L^\eta(t, 0) + \int_0^t \tilde{g}(\eta(s)) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta(s)) dw(s).$$

Далі маємо

$$\mathbb{D}\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{f}'_2(x) + \tilde{f}'_1(x)}{2} + \frac{\tilde{f}'_2(x) - \tilde{f}'_1(x)}{2} \operatorname{sgn} x = \mathbb{D}f(\kappa(x));$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\tilde{f}}(dx) &= (\tilde{f}'_2(0) - \tilde{f}'_1(0))\delta_0(x)dx + \frac{1}{2}\mathbb{A}_{\tilde{f}}(x)dx = (f_2 - f_1)\delta_0(x)dx + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left((1 + \beta)f''_2(\kappa(x)) + (1 - \beta)f''_1(\kappa(x)) \right) + \right. \\ &\left. + \left((1 + \beta)f''_2(\kappa(x)) - (1 - \beta)f''_1(\kappa(x)) \right) \operatorname{sgn} x \right] dx = \\ &= (f_2 - f_1)\delta_0(x)dx + \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn} x)}{2} \mathbb{A}_f(\kappa(x))dx, \end{aligned}$$

звідки $\mathbb{A}_{\tilde{f}}(x) = (1 + \beta \operatorname{sgn} x) \mathbb{A}_f(\kappa(x))$.

Отже з вимог теореми 2 випливає, що виконуються вимоги теореми 1. Тепер перевіримо, що вірно і навпаки – що з вимог теореми 2 випливають вимоги **i)**, **ii)**, **iii)** теореми 1. Маємо :

$$\text{– i) : } \alpha = \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2}{\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2};$$

Отже вимога **i)** рівносильна вимозі **j)**.

$$\text{– ii) : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{\tilde{F}_\varepsilon(y) \tilde{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{(1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} y)^2}{F_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y)) \sigma_\varepsilon^2(\kappa_\varepsilon(y))} dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{(1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} z)}{F_\varepsilon(z) \sigma_\varepsilon^2(z)} dz = (\text{випливає з **jj)**})$$

$$= \int_0^{\kappa(x)} \frac{1 + \beta \operatorname{sgn} y}{\sigma^2(y) \mathbb{D}f(y)} dy = \int_0^x \frac{(1 + \beta \operatorname{sgn} z)^2}{\sigma^2(\kappa(z)) \mathbb{D}f(\kappa(z))} dz = \int_0^x \frac{dz}{\tilde{\sigma}^2(z) \mathbb{D}\tilde{f}(z)}.$$

Отже вимога **ii)** рівносильна вимозі **jj)**.

$$\begin{aligned}
- \text{iii)} : \quad & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\tilde{g}_\varepsilon(y)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon^2(y)} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(\kappa_\varepsilon(y))(1 + \beta_\varepsilon \operatorname{sgn} y)}{\sigma_\varepsilon^2(\kappa_\varepsilon(y))} dy = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\kappa_\varepsilon(x)} \frac{g_\varepsilon(z)}{\sigma_\varepsilon^2(z)} dz = (\text{впливає з } \mathbf{jjj}) = \int_0^{\kappa(x)} \left[\frac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_f(y)}{\mathbb{D}f(y)} \right] dy = \\
& = \int_0^x \left[\frac{g(\kappa(z))}{\sigma^2(\kappa(z))} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_f(\kappa(z))}{\mathbb{D}f(\kappa(z))} \right] (1 + \beta \operatorname{sgn} z) dz = \int_0^x \left[\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{\sigma}^2(z)} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_{\tilde{f}}(z)}{\mathbb{D}\tilde{f}(z)} \right] dz.
\end{aligned}$$

Отже вимога **iii)** рівносильна вимозі **jjj)**.

Таким чином, має місце твердження теореми 1 щодо умов слабкої збіжності мір, породжених процесами η_ε , до міри, породженої процесом η .

Далі, оскільки функції $\kappa_\varepsilon(x)$ і $\varphi_\varepsilon(x)$ збігаються рівномірно на компактах до їхніх відповідних границь $\kappa(x)$ і $\varphi(x)$, то $\xi(t) = \kappa(\eta(t))$ – граничний процес для $\xi_\varepsilon(t)$.

Згідно леми 2, $\eta(t) = \kappa_\alpha(\zeta(t))$ для $|\alpha| < 1$, де

$$\kappa_\alpha(x) = \begin{cases} (1 - \alpha)x, & x \leq 0 \\ (1 + \alpha)x, & x \geq 0 \end{cases},$$

і $\varphi_\alpha(x)$ – обернена до $\kappa_\alpha(x)$; процес $\zeta(t)$ задовольняє рівнянню

$$\zeta(t) = \varphi_\alpha(\varphi(x)) + \int_0^t g^*(\zeta(s)) ds + \int_0^t \sigma^*(\zeta(s)) dw(s),$$

де позначено
$$g^*(x) = \frac{\tilde{g}(\kappa_\alpha(x))}{1 + \alpha \operatorname{sgn} x}; \quad \sigma^*(x) = \frac{\tilde{\sigma}(\kappa_\alpha(x))}{1 + \alpha \operatorname{sgn} x}.$$

Значить $\xi(t) = \kappa(\eta(t)) = \kappa(\kappa_\alpha(\zeta(t))) = \theta(\zeta(t))$, де

$$\theta(x) = \kappa(\kappa_\alpha(x)) = \begin{cases} (1 - \alpha)(1 - \beta)x, & x \leq 0 \\ (1 + \alpha)(1 + \beta)x, & x \geq 0 \end{cases},$$

а обернена до неї функція $\theta^{-1}(x) = \varphi_\alpha(\varphi(x))$.

Далі, $\mathbb{A}_\theta(x) = 0$. Тоді, за лемою 1 будемо мати (для спрощення запису будемо писати в кількох наступних формулах під інтегралами ξ замість $\xi(s)$):

$$\begin{aligned}
& \xi(t) = \theta(\zeta(t)) = \kappa(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(x)))) + \\
& + \frac{(1 + \beta)(1 + \alpha) - (1 - \beta)(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + \alpha) + (1 - \beta)(1 - \alpha)} L^\xi(t, 0) +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \mathbb{D}\theta(\theta^{-1}(\xi))g^*(\theta^{-1}(\xi))ds + \int_0^t \mathbb{D}\theta(\theta^{-1}(\xi))\sigma^*(\theta^{-1}(\xi))dw(s).$$

Далі врахуємо те, що $\mathbb{D}\theta(x) = (1 + \alpha \operatorname{sgn} x)(1 + \beta \operatorname{sgn} x)$, використаємо властивості функцій θ^{-1} , $\tilde{f}^{-1}$ і $\mathbb{A}_{\tilde{f}}$ та підставимо функції g^* і σ^* . Будемо мати :

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} L^\xi(t, 0) + \\ &+ \int_0^t \left[(1 + \alpha \operatorname{sgn} \xi)(1 + \beta \operatorname{sgn} \xi) \frac{\tilde{g}(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(\xi))))}{1 + \alpha \operatorname{sgn} \xi} \right] ds + \\ &+ \int_0^t (1 + \alpha \operatorname{sgn} \xi)(1 + \beta \operatorname{sgn} \xi) \frac{\tilde{\sigma}(\kappa_\alpha(\varphi_\alpha(\varphi(\xi))))}{1 + \alpha \operatorname{sgn} \xi} dw = \\ &= x + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} L^\xi(t, 0) + \\ &+ \int_0^t (1 + \beta \operatorname{sgn} \xi) \tilde{g}(\varphi(\xi)) ds + \int_0^t (1 + \beta \operatorname{sgn} \xi) \tilde{\sigma}(\varphi(\xi)) dw = \\ &= x + \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \end{aligned}$$

Підставимо тепер значення коефіцієнту α , отримане з теореми 1, тобто $\alpha = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$ в вираз $\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$ – отримуємо формулювання вимоги j):

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{f_1 - f_2 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_1 - f_2)}.$$

Остаточно граничний процес $\xi(t)$ має вигляд

$$\xi(t) = x + \gamma L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s),$$

тобто $\xi(t)$ задовольняє рівнянню (4.2). □

5. Приклад

Дослідимо збіжність розв'язків таких стохастичних диференціальних рівнянь :

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) &= x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t b\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) + \\ &+ \int_0^t g\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(\frac{\xi_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) dw(s). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Припустимо, що константи $|\beta_\varepsilon| < 1$ при будь-якому ε , $|\beta| < 1$, $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і

$$\left| \int_0^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right| < Const, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy = B_1, \quad \int_0^\infty \frac{b(y)}{\sigma^2(y)} dy = B_2$$

та існують границі

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{g(y)}{\sigma^2(y)} dy = A_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{\sigma^2(y)} = A_2 > 0.$$

Тоді виконуються вимоги теореми 2 і для знаходження коефіцієнтів граничного процесу обчислюємо:

$$f_1 = \exp(2B_1), \quad f_2 = \exp(-2B_2), \quad \mathbb{A}_f(x) \equiv 0,$$

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{A_2}, \quad g(x) = \frac{A_1}{A_2},$$

$$\gamma = \frac{\beta + th(B_1 + B_2)}{1 + \beta th(B_1 + B_2)},$$

де через $th(x)$ позначено гіперболічний тангенс x .

Тому граничним процесом для розв'язків (5.1) буде процес

$$\xi(t) = x + \frac{\beta + th(B_1 + B_2)}{1 + \beta th(B_1 + B_2)} L^\xi(t, 0) + \frac{A_1}{A_2} t + \frac{1}{\sqrt{A_2}} w(t).$$

Подяки

Автор висловлює сердечну вдячність героїчним бійцям Збройних Сил України, які з 2014го року захищають автора та його рідних і близьких від кривавих російських терористичних військ.

Також автор висловлює вдячність анонімному рецензенту за уважне вивчення тексту статті та корисні зауваження, які допомогли покращити роботу.

Література

- [1] Stroock, D., Varadhan, S. R. S. (1979). *Multidimensional Diffusion Processes*. New York, Springer-Verlag.
- [2] Махно, С. Я. (1992). Сходимость диффузионных процессов. *Український математичний журнал*, 44(2), 284–289.

-
- [3] Кулинич, Г. Л. (1982). О необходимых и достаточных условиях сходимости решений одномерных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра. *Теория вероятностей и ее применения*, 27(4), 795–801.
- [4] Портенко, Н. И. (1982). *Обобщенные диффузионные процессы*. К., Наукова думка.
- [5] Portenko, N. I. (1976). Generalized diffusion processes. *Proceedings of the Third Japan–USSR Symposium on Probability Theory. Lecture Notes in Mathematics*, v. 550. Berlin, Heidelberg, Springer, 500–523.
- [6] Махно, С. Я. (1999). Сходимость решений одномерных стохастических уравнений. *Теория вероятностей и ее применения*, 44(3), 555–572.
- [7] Махно, С. Я. (2003). Предельная теорема для одномерных стохастических уравнений. *Теория вероятностей и ее применения*, 48(1), 156–161.
- [8] Harrison, J. M., Shepp, L. A. (1981). On skew Brownian motion. *Ann. Probab.*, 9(2), 309–313.
- [9] Le Gall, J.-F. (1983). One dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. *Lecture Notes in Mathematics*, 1095, 51–82.
- [10] Ito, K., McKean, H. (1963). Brownian motions on a half line. *Illinois J. Math.*, 7(2), 181–231.
- [11] Engelbert, H.-J., Schmidt, W. (1991). Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations III. *Math. Nachr.*, 151, 149–197.
- [12] Махно, С. Я. (2001). Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 64, 106–109.
- [13] Makhno, S. Ya. (2005). The limit stochastic equation changes type. *Theory of Stochastic Processes*, 11(27)(3–4), 104–109.
- [14] Махно, С. Я. (2012). *Стохастические уравнения. Предельные теоремы*. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”, Т. 6. К., Наукова думка.
- [15] Махно, С. Я. (2016). Диффузионные процессы в композитных средах. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 94, 130–142.
- [16] Makhno, S. Ya. (2016). One-dimensional stochastic equations in layered media with semi-permeable barriers. *Random Operators and Stochastic Equations*, 24(3), 165–171.
- [17] Крикун, І. Г. (2005). Гранична теорема для стохастичних рівнянь з локальним часом. *Праці Інституту прикладної математики та механіки НАН України*, 10, 120–130.
- [18] Krykun, I. H. (2009). Large deviation principle for stochastic equations with local time. *Theory of Stochastic Processes*, 15 (31)(2), 140–155.
- [19] Крикун, І. Г. (2012). Функціональний закон типу повторного логарифма для косоного броунівського руху. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 87, 60–77.
- [20] Крикун, І. Г. (2016). Збіжність косих броунівських рухів з локальними часами в кількох точках, які стягуються в одну. *Український математичний вісник*, 13(2), 213–223.

- [21] Krykun, I. H. (2017). Convergence of skew Brownian motions with local times at several points that are contracted into a single one. *Journal of Mathematical Sciences*, 221(5), 671–678.
- [22] Крыкун, И. Г., Махно, С. Я. (2013). Явление Пеано для уравнений Ито. *Український математичний вісник*, 10(1), 87–109.
- [23] Krykun, I. H., Makhno, S. Ya. (2013). The Peano phenomenon for Ito equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 192(4), 441–458.
- [24] Jacod, J., Shiryaev, A. N. (1987). *Limit theorems for stochastic processes*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag.
- [25] Protter, P. E. (2005). *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.
- [26] Borodin, A. N., Salminen, P. (1996). *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*. Basel, Boston, Berlin, Birkhauser.
- [27] Revuz, D., Yor, M. (1990). *Continuous martingales and Brownian motion*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer.
- [28] Гихман, И. И., Скороход, А. В. (1982). *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*. К., Наукова думка.
- [29] Веретенников, А. Ю. (1979). О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятностей и ее применения*, XXIV(2), 354–366.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Іван
Григорович
Крикун**

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: iwanko@i.ua