МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
Первомайська філія НУК

І. Г. Крикун

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою НУК

Миколаїв • НУК • 2017

УДК 519.21 (075.8)
К 85

Автор:

І. Г. Крикун, кандидат фізико-математичних наук, доцент Первомайської філії НУК імені адмірала Макарова, науковий співробітник ІПММ НАН України

Рецензенти:

В. С. Білецький, доктор технічних наук, професор, професор НТУ «Харківський політехнічний інститут»;

О. О. Мочалов, доктор технічних наук, професор, директор Навчально-наукового центру заочної та дистанційної освіти НУК імені адмірала Макарова;

Є. О. Севостьянов, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор Житомирського державного університету імені Івана Франка;

А. В. Баєв, кандидат фізико-математичних наук, декан факультету математики та інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса

Рекомендовано Вченою радою НУК імені адмірала Макарова (протокол № 10 від 27.10.2017 року)

Крикун І. Г.

К 85 Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник / І. Г. Крикун. – Миколаїв : НУК, 2017. – 148 с.

ISBN 978–966–321–337–8

Подано основи теорії ймовірностей та математичної статистики. Кожен розділ містить теоретичні відомості та результати, приклади розв’язання типових задач, питання та задачі для самоперевірки, а також таблиці математичної статистики, які будуть корисними при розв’язанні теоретичних та практичних задач.

Призначено для студентів економічних та технічних спеціальностей усіх форм навчання, а також може бути використаний за основу студентами інших спеціальностей та викладачами, які застосовують теорію ймовірностей та математичну статистику у власних курсах та дослідженнях.

УДК 519.21 (075.8)

ISBN 978–966–321–337–8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У кожній науці стільки науки,
скільки в ній математики.
Іммануїл Кант

В наш час теорія ймовірностей та, особливо, математична статистика є саме тими науками, з використанням яких ми часто зіштовхуємося в дорослому і професійному житті. Вибори та агітаційні кампанії, різноманітні соціологічні опитування та економічні показники в новинах, релігійна пропаганда, з якими хоч-не-хоч, а повсякчас зустрічаєшся, потребують для сучасної людини не лише **знання** про що саме говорять ті чи інші цифри, факти, показники, та **розуміння** того, як ці цифри було отримано, а навіть **усвідомлення** того, що цими цифрами та фактами можуть маніпулювати, приховувати ними справжній стан справ. Водночас, теорія ймовірностей та математична статистика – самостійні математичні дисципліни, які є теоретичною основою викладання багатьох економічних, соціологічних та спеціальних дисциплін. Тому ці теорії становлять обов'язкову частину математичного циклу дисциплін усіх вищих навчальних закладів.

Теорія ймовірностей як наука є однією з наймолодших математичних дисциплін. Період її бурхливого розвитку почався в 30-ті роки XX століття і триває і нині. Приємно відмітити, що значний в світовому масштабі внесок в розвиток теорії ймовірностей і її підрозділів зробили саме українські вчені. Й. І. Гіхман та А. В. Скороход разом з японцем К. Іто є засновниками найдинамічнішої частини математики – теорії випадкових процесів. В теорії ймовірностей помітним також є внесок таких вчених як А. А. Дороговцев, В. С. Королюк, С. Я. Махно, Ю. С. Мішура, М. І. Портенко, А. Ф. Турбін, М. І. Ядренко та їхні численні учні, одним із яких є автор даного посібника.

Курс "Теорія ймовірностей та математична статистика" є ознайомленням з основами математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач, його застосуванням на практиці, розвиток навичок самостійної роботи з навчальною і спеціальною літературою. Курс повинен сприяти формуванню у студентів діалектико-матеріалістичного світогляду, розвитку їх розумових здібностей, прищеплювати вміння точно і логічно мислити, аргументувати свої твердження, розвивати абстрактне мислення, творчу та просторову уяву, сприяти підвищенню наукової і, зокрема, математичної культури.

Навчальний посібник розроблено згідно вимог кредитно-модульної системи та відповідно до діючої навчальної програми дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», затвердженої Міністерством освіти і науки України. Крім теорії, він містить розв'язані типові приклади, питання та задачі для самостійної роботи, таблиці математичної статистики, список рекомендованої літератури, а також чимало суттєвих доповнень, зауважень і математичних результатів, які допоможуть краще пізнати принади справжньої науки. Для зручності орієнтування в тексті посібника в ньому є ще й предметний покажчиків термінів, що використовуються.

В основі даного навчального посібника лежить курс теорії ймовірностей та математичної статистики, який викладався автором протягом шести семестрів студентам переважно економічних дисциплін в Первомайському політехнічному інституті НУК імені адмірала Макарова.

Позначення та символи, що використовуються

В даному навчальному посібнику для наочності та зручності поняття, формули та факти різної новизни та важливості виділяються текстуально:

– нові поняття виділяються словом **Означення** та набираються р о з р і д ж е н и м ш р и ф т о м;

– важливі формули нумеруються з правого боку – (5.3);

– важливі результати виділяються словами **Теорема** або **Наслідок**;

– найважливіші результати та формули додатково виділяються $\boxed{\text{рамкою}}$;

– значком ● помічені різні підказки та зауваження, які будуть корисними для кращого розуміння тексту;

– значком * помічений матеріал, який є додатковим і на який не спирається подальший текст. При першому читанні його можна пропустити. Цим же значком помічені задачі підвищеної складності.

Про рекомендовану літературу

В списку літератури в кінці даного навчального посібника наведено перелік рекомендованої літератури. Для зручності читача список літератури розбито на три частини: теоретичні підручники, практикуми та довідники. Всі ці книги доступні в електронному варіанті в мережі Інтернет.

* * *

Автор буде радий отримати відгуки та пропозиції щодо даного навчального посібника на електронну пошту iwanko@i.ua

ЧАСТИНА І. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Вступ. Основні означення. Події

Усі процеси, що ми спостерігаємо в реальному житті, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Такі фактори дуже часто є випадковими, невідомими – погода, час очікування, майбутня урожайність, тривалість життя – але, при цьому, і такими, що мають певні закономірності. Такі закономірності і вивчає теорія ймовірностей.

Означення 1. Результат спостереження, досліду, експерименту називають *подією*. Позначають події великими латинськими буквами A, B, C, а описують їх словами в лапках "…" або фігурних дужках {…}:

A = "монета після підкидання випаде гербом".

● Для того, щоб результат експерименту був подією, має бути можливою повторюваність експерименту при незмінних умовах.

Події називають:

1) *достовірними* – коли подія обов'язково відбувається;

2) *неможливими* – коли подія обов'язково не відбувається;

3) *випадковими* – коли подія може відбутися, а може і не відбутися.

● В подальшому будемо працювати саме з випадковими подіями, тому слово "випадкова", як правило, будемо пропускати.

Означення 2. Подія, що відбувається внаслідок проведення одного і лише одного експерименту називається *елементарною (простою) подією* (коротко ЕП). Позначають малими грецькими літерами[1] ω_1, ω_2, ω_3.

● Елементарні події не можна розкласти на простіші.

[1] ω – грецька буква, яка вимовляється *омега* [*маленьке*].

Означення 3. Множина **всіх** елементарних подій, що можуть відбутися в експерименті, називається простором елементарних подій (в подальшому тексті ПЕП). Позначається великою грецькою буквою[2] Ω.

Означення 4. Якщо подію можна розкласти на елементарні події, то вона називається складеною (складною) подією. Якщо подія *A* складається з елементарних ω_1, …, ω_n, то елементарні події ω_1, …, ω_n називають подіями, що сприяють події *A*.

Приклад 1. Монету підкидають 1 раз. Які елементарні події виникають в цьому експерименті?

Розв'язання. Це дві елементарні події: ω_1={монета випала гербом} та ω_2={монета випала цифрою}. Як правило, використовують скорочені (але зрозумілі) позначення: ω_1={Г}, ω_2={Ц}.

Означення 5. Якщо простір елементарних подій містить із скінченне число елементів, то його називають дискретним. Інакше – неперервним.

1.2. Операції (дії) над подіями. Діаграми Ейлера-Венна

Для кращого розуміння дій над подіями використовують їх геометричну інтерпретацію – діаграми Ейлера-Венна. Це прямокутник і кола (овали), які повністю лежать в прямокутнику і перетинаються (знаходяться в загальному випадку). Прямокутник сприймають як весь простір елементарних подій Ω, а кола (овали) сприймаються як події. Штриховкою позначають відповідну частину геометричних частин, що утворилися.

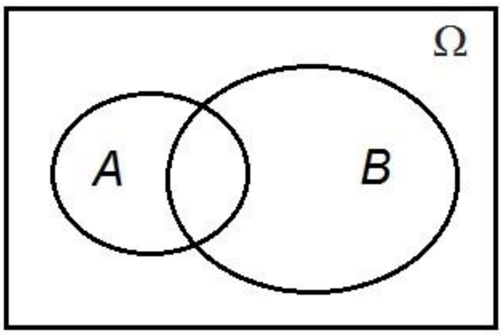


Рис.1.1. Діаграма Ейлера-Венна

[2] Ω – грецька буква, вимовляється *омега* [*велике*].

● Для подібного геометричного тлумачення використовують і інші назви: круги Ейлера або діаграми Венна.

● Поняття "подія" є окремим випадком такого поняття, як "множина". З множинами оперують як теорія множин, так і теорія логіки. Тому в теорії ймовірностей широко використовують позначення з обох згаданих теорій.

Отже, над множинами/подіями розглядають такі операції:

1. **Об'єднання** (додавання). Об'єднанням (сумою) подій A і B називається подія C, яка відбувається тоді, коли настає **хоча б одна** з подій A чи B, тобто відбулася або подія A, або подія B, або обидві події одночасно.

Позначають: $C = A \bigcup B$ або $C = A + B$.

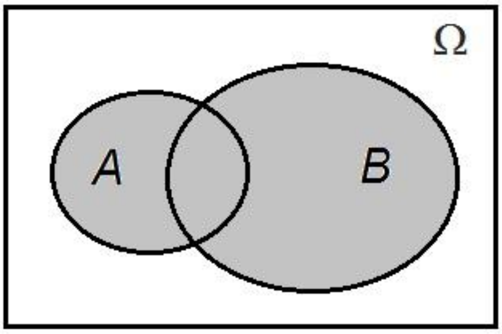


Рис.1.2. Об'єднання подій A і B

2. **Перетин** (множення). Перетином (добутком) подій A і B називають подію C, яка відбувається тоді, коли одночасно настають **обидві** події A і B.

Позначають $C = A \bigcap B$ або $C = AB$.

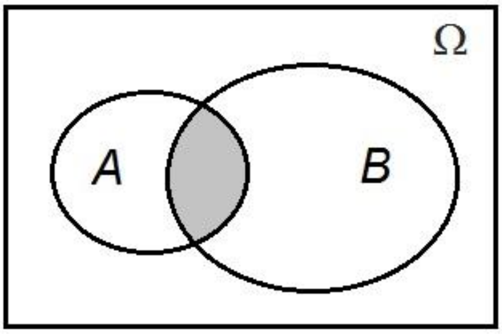


Рис.1.3. Перетин подій A і B

Приклад 2. Підкидають по черзі 2 монети. Подія A полягає в тому, що на першій монеті випав герб, подія B полягає в тому, що герб випав на другій монеті. Описати події $A \bigcup B$ і $A \bigcap B$.

Розв'язання. $A\bigcup B$ – подія, яка полягає в тому, що герб випав на першій монеті, на другій, або на обох монетах, тобто "герб випав хоча б на 1 монеті".

Подія $A\bigcap B$ полягає в тому, що "герб випав на обох монетах одночасно".

3. **Різниця** (мінус). Різницею подій *A* і *B* називається подія *C*, яка відбувається тоді, коли подія *A* настане, а подія *B* – не настане.

Позначають $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.

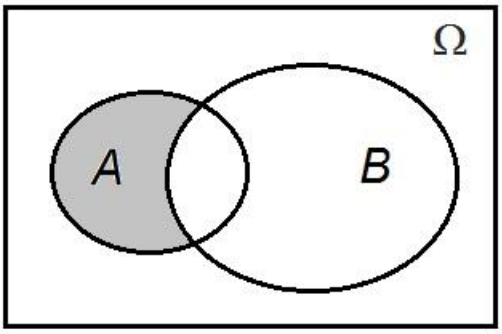


Рис.1.4. Різниця подій *A* і *B*

4. **Доповнення** (заперечення). Доповненням (запереченням) події *A* називається така подія *C*, яка відбувається тоді, коли подія *A* не настає.

Позначають $C = \overline{A}$.

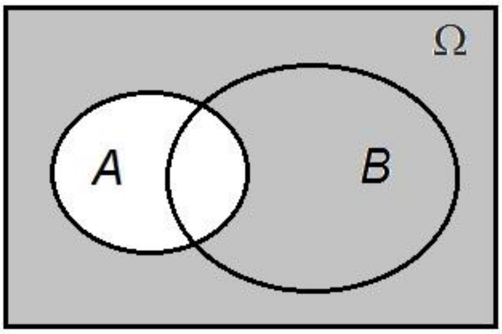


Рис.1.5. Доповнення (заперечення) події *A*

● Подію $\overline{A}$ ще називають подією, протилежною до *A* або не *A*.

Означення 6. Подію–доповнення до ПЕП Ω називають порожньою множиною. Позначають спеціальним символом: $\varnothing$.

Означення 7. Події *A* і *B*, які в одному випробуванні не можуть настати одночасно, називаються несумісними. Це позначають так:

$$A\bigcap B = \varnothing$$

Інакше події називаються сумісними.

Властивості операцій над подіями.

1. $A\bigcup A=A,\ A\bigcap A=A;\quad A\bigcup\Omega=\Omega,\ A\bigcap\Omega=A;\quad A\bigcup\varnothing=A,\ A\bigcap\varnothing=\varnothing.$

2. Комутативність операцій об'єднання і перетину:

$$A\bigcup B=B\bigcup A,\ \ A\bigcap B=B\bigcap A\,.$$

3. $\overline{A}=\Omega\setminus A,\qquad \overline{\Omega}=\varnothing;\qquad A\setminus B=A\bigcap\overline{B}\,.$

4. Асоціативність операцій об'єднання і перетину :

$$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup B\bigcup C,\ \ A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap B\bigcap C.$$

*5. Дистрибутивність об'єднання подій відносно перетину і навпаки :

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C),\qquad A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$$

*6. Правила де Моргана: $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\,,\qquad \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\,.$

Зауваження 1. Для доведення цих властивостей, як і для розв'язання задач на операції з подіями, потрібно на діаграмах Ейлера-Венна розглянути всі можливі ситуації взаємного розташування подій A і B (відповідних овалів): перетинаються, не перетинаються, співпадають, одна множина міститься в іншій, одна подія є порожньою множиною або всім ПЕП.

Це потрібно зробити для обох частин рівності і якщо штриховки співпадатимуть в усіх випадках, то рівність є доведеною.

1.3. Класичне означення ймовірності

Мірою можливості настання події у випробуванні/досліді/експерименті є число, яке називається **ймовірністю** цієї події. Зокрема:

Означення 8. Ймовірністю події A називається відношення кількості m елементарних подій, які сприяють події A, до загальної кількості n всіх елементарних подій:

$$P(A)=\frac{m}{n}\,. \tag{1.1}$$

З означення випливають наступні **властивості ймовірності**:

1) ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці;

2) ймовірність неможливої події дорівнює нулю;

3) ймовірність будь-якої випадкової події є число між нулем і одиницею :

$$0 \le P(A) \le 1.$$

● Ймовірність – це безрозмірна величина (без одиниць виміру), число між 0 і 1. Ймовірність у відсотках формально слід називати **шансом**.

Приклад 3. Кубик підкинули 1 раз. Яка ймовірність, що число очок, що випало, буде кратним 3?

Розв'язання. На кубику може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Отже, загальне число всіх елементарних подій n = 6. Подія A = "число очок, що випало, буде кратним 3" відбудеться, якщо на кубику випаде 3 або 6 очок, тобто кількість елементарних подій, які сприяють події A, m = 2. Звідси за формулою (1.1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Означення 9. В і д н о с н о ю ч а с т о т о ю або с т а т и с т и ч н о ю й м о в і р н і с т ю події A називається відношення числа випробувань m, в яких подія настала, до загального числа n фактично виконаних випробувань:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

* **Зауваження 2.** В теорії множин використовують спеціальні позначення. Якщо <u>елемент</u> a належить <u>множині</u> A, це позначають значком $\in$, який вимовляється "належить": $a \in A$.

Якщо ж <u>множина</u> A повністю міститься в <u>множині</u> B (тобто множина A ніби "строго менше" множини B), використовують спеціальний значок $\subset$, який вимовляється "міститься": $A \subset B$, на відміну від ситуації, коли <u>множина</u> A міститься або співпадає з <u>множиною</u> B (множина A ніби "не більше" множини B), це позначають так: $A \subseteq B$.

* *Приклад до зауваження.*

Нехай x = 1; A = (0;2); B = [0;3]. Тоді використовують такі позначення: $x \in A$, $x \in B$, $A \subset B$, $A \subseteq B$.

Питання та задачі до теми

1. Що таке подія? Які події бувають?
2. Яку подію називають елементарною? Складеною? Що таке простір елементарних подій?
3. Що таке події, які сприяють іншій події?
4. Які дії над подіями існують? Зобразіть їх на діаграмах Ейлера-Венна.
5. Яку множину називають таке порожньою множиною?
6. Які властивості операцій над подіями ви знаєте?
7. Наведіть класичне означення ймовірності.
8. Які властивості ймовірності випливають з класичного означення?

Задача 1. Монету підкидають 3 рази. Описати ПЕП цього експерименту.

Задача 2. $\Omega_1 = \{1;2;3\}$, $\Omega_2 = \{1;2;3;4\}$. Утворюють впорядковані пари чисел так, що перше – з Ω_1, а друге – з Ω_2. Описати ПЕП цього експерименту.

Задача 3. Два стрільця стріляють по мішені. Нехай подія A полягає в тому, що перший стрілець влучив, подія B – другий стрілець влучив. Описати словами події $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Задача 4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна подію $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Задача 5. Нехай A, B, C – довільні події. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна та записати символами дій подію “відбулось не більше 1 події з A, B, C”.

Задача 6. Підкидають 2 кубики. Подія – кількість очок, що випали на кубиках. Описати ПЕП та події $A = \{$обидва рази не більше 3 очок$\}$, $B = \{$хоча б раз менше 2 очок$\}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$. Знайти ймовірності всіх цих подій.

Задача 7. У ящику 15 деталей, з них 6 – бракованих. Взяли навмання 1 деталь. Яка ймовірність, що деталь стандартна?

Задача 8. Маємо 3 лампочки, кожна з яких може перегоріти. Описати ПЕП цього експерименту та події $A = \{$перегоріло не більше однієї лампочки$\}$, $B = \{$перегоріло не менше двох лампочок$\}$. Обчислити ймовірності $P(A)$, $P(B)$.

Тема 2. Комбінаторика

2.1. Комбінаторна ймовірність

Часто простір елементарних подій є хоч і простої будови, але містить дуже велику кількість елементів. Тоді всі елементарні події виписувати не варто, а слід використовують певні властивості.

Ймовірність деякої події A знаходять за формулою, аналогічній класичному означенню ймовірності (Означення 8 з Теми 1) :

Означення 1. (Комбінаторна ймовірність)

$$P(A) = \frac{\text{кількість сприятливих (події } A\text{) комбінацій}}{\text{загальна кількість комбінацій}}. \qquad (2.1)$$

Тому треба вміти знаходити число різних комбінацій.

Комбінаторика вивчає кількості підмножин (вибірок), які можна скласти із елементів довільної природи заданої скінченної множини. Формули комбінаторики використовують при обчисленні ймовірностей.

Розглянемо деякий експеримент, в якому є задана множина і з неї деяким способом утворюють вибірку (вибрану підмножину). Наприклад, утворюють виграшну комбінацію в лотереї або вибирають переможців якихось змагань.

2.2. Класифікація множин та операцій

Множини (підмножини, вибірки) бувають:

– впорядковані – коли важливий порядок, за яким елементи входять в множину (призери змагань);

– невпорядковані – коли порядок, за яким елементи входять в множину, є неважливим (виграшні кульки в лотереї; збірна команда).

Операції (з побудови вибірок, підмножин) бувають:

– з повторенням (повторні) – елементи в вибірці можуть повторюватись (призери різних змагань);

– без повторення (безповторні) – елементи в вибірці не можуть повторюватись (призери одного змагання; збірна команда).

Отже, при побудові підмножин можлива одна з чотирьох ситуацій.

Розв'язання будь-якої задачі на комбінаторику слід почати із формалізації умови: перевести задачу в математичну форму і з'ясовувати вид підмножини і спосіб її утворення.

2.3. Комбінаторні формули

Означення 2. Добуток всіх натуральних чисел до числа n включно називають факторіалом числа n і позначають[3]

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{2.2}$$

Крім того, вважають за означенням $0! = 1$.

Означення 3. Перестановка з n елементів – впорядкована безповторна вибірка з n елементів. Кількість всіх можливих перестановок позначають P_n і знаходять за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{2.3}$$

Приклад 1. Маємо 5 кубиків : А Л М О С . а) З них утворюють слова з 5 букв. Яка ймовірність, що утвориться слово "МАСЛО" ? б) З них утворюють слова з 3 букв. Яка ймовірність, що утвориться слово "СОМ" ?

Розв'язання. Користуємося формулою (2.1).

а) Знайдемо загальну кількість комбінацій в експерименті. Маємо 5 місць для букв. На першому місці може стояти будь-яка буква з 5 наявних; на другому місці – будь-яка буква, крім тієї, яка стоїть на першому місці, тобто будь-яка з 4, що залишилися. І так далі: $\underbrace{\textit{перша}}_{5\,шт}\;\underbrace{\textit{друга}}_{4\,шт}\;\underbrace{\textit{третя}}_{3\,шт}\;\underbrace{\textit{четверта}}_{2\,шт}\;\underbrace{\textit{п'ята}}_{1\,шт}$.

Вибір другої букви від вибору першої не залежить. Тому загальна кількість комбінацій дорівнює: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ шт.

Тепер знайдемо кількість сприятливих (утворенню слова "МАСЛО") комбінацій. На першому місці може стояти тільки буква "М" – 1 шт., на

---

[3] Вимовляють : $n!$ – *ен-факторіал.*

другому місці – тільки буква “А”. І так далі: $\underbrace{М}_{1\,шт}\ \underbrace{А}_{1\,шт}\ \underbrace{С}_{1\,шт}\ \underbrace{Л}_{1\,шт}\ \underbrace{О}_{1\,шт}$. Тому кількість сприятливих кількість комбінацій дорівнює: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ шт.

За формулою (2.1) Р(“МАСЛО”) = 1/120 .

б) Знайдемо загальну кількість комбінацій в експерименті. Маємо 3 місць для букв. На першому місці може стояти будь-яка буква з 5 наявних; на другому місці – будь-яка з 4, що залишилися. І так далі: $\underbrace{перша}_{5\,шт}\ \underbrace{друга}_{4\,шт}\ \underbrace{третя}_{3\,шт}$.

Вибір другої букви від вибору першої не залежить. Тому загальна кількість комбінацій дорівнює: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ шт.

Кількість сприятливих (утворенню слова “СОМ”) комбінацій аналогічно попередньому дорівнює 1 шт.

За формулою (2.1) Р(“СОМ ”) = 1/60 .

● Наступна формула отримується аналогічно пункту б) Прикладу.

Означення 4. Нехай треба вибрати *k* **різних** елементів з наявних *n* різних елементів ($0 \le k \le n$), і їх **порядок** у вибірці **важливий**. Таку вибірку називають розміщенням з *n* елементів по *k* елементів. Кількість всіх можливих таких розміщень позначають A_n^k і знаходять за формулою[4]

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.4}$$

Означення 5. Нехай треба вибрати *k* **різних** елементів з наявних *n* різних елементів ($0 \le k \le n$), і їх **порядок** у вибірці **неважливий**. Таку вибірку називають сполукою[5] з *n* елементів по *k* елементів. Кількість всіх можливих таких сполук позначають C_n^k і знаходять за формулою[6]

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.5}$$

---

[4] Вимовляють: A_n^k – “*а із ен по ка*”.

[5] Іноді називають “*комбінацією*”.

[6] Вимовляють: C_n^k – “*це із ен по ка*”.

● Розміщення з n елементів по k елементів A_n^k – **безповторна впорядкована** вибірка з n елементів по k елементів.

● Сполука з n елементів по k елементів C_n^k – **безповторна невпорядкована** вибірка з n елементів по k елементів.

Приклад 2. Нехай маємо множину з трьох елементів a,b,c. Тоді вибірки

– $\{a,b,c\},\{a,c,b\},\{b,a,c\},\{b,c,a\},\{c,a,b\},\{c,b,a\}$ – це перестановки з 3 елементів;

– $\{a,b\},\{b,a\},\{b,c\},\{c,b\},\{a,c\},\{c,a\}$ – розміщення з 3 елементів по 2 елемента;

– $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$ – це сполуки з 3 елементів по 2 елемента.

Порівняйте їх кількість з кількостями, обчисленими за формулами (2.3)–(2.5).

Приклад 3. Маємо групу студентів з 15 осіб. Скількома способами можна вибрати збірну з : а) баскетболу (5 осіб)? б) міні-футболу (5 осіб)?

Розв'язання. а) Згідно правил, всі баскетболісти мають однакові функції. Тому під час вибору збірної не має значення потрапить студент А першим чи п'ятим. Зрозуміло, що в збірній всі баскетболісти – різні люди. Тому вибір збірної здійснюється безповторним і невпорядкованим способом, а значить кількість способів утворення збірної дорівнює кількості сполук, які можна утворити з 15 різних елементів (студентів) вибираючи з них 5 (студентів):

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 10!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 3\cdot 11}{1} = 3003 \text{ шт.}$$

б) Згідно правил, у міні-футболі є 1 воротар і 4 польові гравці. Тому під час вибору збірної спочатку треба вибрати студента-воротаря. Зрозуміло, що з 15 студентів вибрати одного можна 15 способами (15 вийде і за будь-якою формулою A_{15}^1 чи C_{15}^1 – для 1 студента не має значення впорядковано чи ні).

Далі треба вибрати 4 польових з 14 студентів, що залишилися. Це робиться безповторним і невпорядкованим способом аналогічно пункту а):

$$C_{14}^4 = \frac{14!}{4!(14-5)!} = \frac{14!}{5!10!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 10!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 13\cdot 1\cdot 11}{1} = 1001 \text{ шт.}$$

Далі, оскільки вибір польових гравців не залежить від вибору воротаря, загальне число способів дорівнює $15\cdot C_{14}^4 = 15\cdot 1001 = 15015$ шт.

Це були безповторні вибірки. Тепер поговоримо про вибірки з можливим повторенням елементів.

Означення 6. Нехай треба вибрати k елементів, **які можуть повторюватись**, з наявних n різних елементів, і їх **порядок** у вибірці **важливий**. Кількість всіх таких можливих вибірок дорівнює

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ штук}} \tag{2.6}$$

Означення 7. Нехай треба вибрати k елементів, **які можуть повторюватись**, з наявних n різних елементів, і їх **порядок** у вибірці **неважливий**. Кількість всіх таких можливих вибірок дорівнює

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{2.7}$$

Приклад 4. Маємо групу з 15 осіб. Вони відвідають (або ні) наступну лекцію з ТЙМС. а) Скільки варіантів розставлення “нб” в журналі групи? б) Скільки всього існує варіантів кількості “нб” в журналі групи?

Розв’язання. а) Для кожного студента є дві можливі ситуації – або отримати “нб”, або не отримати. Отримання або ні “нб” одним студентом не впливає на інших, тому всього варіантів розставлення “нб” в журналі групи

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{15 \text{ штук}} = 2^{15} = 32768 \text{ шт.}$$

Такий же результат маємо з формули (2.6), оскільки ставимо на 15 місць із важливим порядком (студенти – різні) один з двох значків (“нб” або нічого).

б) Неважко здогадатися, що кількість “нб” в журналі групи може дорівнювати 0, 1, 2, … , 15 шт. Тобто всього існує 16 варіантів кількості “нб” в журналі групи.

За формулою (2.7), вибираючи на 15 місць із неважливим порядком один з двох значків (“нб” або нічого): $C_{2+15-1}^{15} = C_{16}^{15} = \dfrac{16!}{15!(16-15)!} = \dfrac{16 \cdot 15!}{15!1!} = 16$ шт.

***Зауваження 1.** Як видно, комбінаторні формули (крім (2.5) і (2.7)) часто легше отримали виходячи з логічних міркувань, ніж запам’ятати формулу.

Зауваження 2. Контроль: для безповторних вибірок слід пам’ятати, що “місця вибирають з місць” або “людей з людей” (а не “місця з людей” !), а для повторних вибірок ситуація складніша – там спочатку задача зводиться до більш абстрактної (див. Приклад 5).

2.3.1. Таблиця комбінаторних формул

Після формалізації умови (з’ясування того, які множини нам потрібні і яким способом вони утворюються), для вибору k необхідних елементів з n наявних різних елементів потрібно скористатися однією з 4 формул:

ОПЕРАЦІЇ / МНОЖИНИ	БЕЗПОВТОРНІ	ПОВТОРНІ
ВПОРЯДКОВАНІ	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	n^k
НЕВПОРЯДКОВАНІ	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

2.4. Правила комбінаторики

При розв’язуванні задач комбінаторики часто використовують певні правила (вони називаються п р а в и л а в и б о р у).

Правило добутку. Якщо об’єкт *A* може бути вибраний із сукупності об’єктів *m* способами і після кожного такого вибору інший об’єкт *B* може бути вибраний *n* способами, то вибір **пари** “*A* і *B*” може бути здійснений *mn* способами. Це правило справедливе, коли вибір *A* і *B* **незалежний**.

Аналогічно для *k* об’єктів. Якщо кожен з *k* об’єкт можна вибрати $n_1,\ldots,n_k$ способами відповідно, то всі ці *k* об’єктів можна вибрати $n_1\cdot\ldots\cdot n_k$ способами.

Правило суми. Якщо об’єкт *A* може бути вибраний із сукупності об’єктів *m* способами, а інший об’єкт *B* може бути вибраний *n* способами, то вибір **одного об’єкта** “або *A*, або *B*” може бути здійснений *m*+*n* способами. Слід мати на увазі, що вибори *A* і *B* тут є **взаємно виключними**.

Аналогічно для *k* об’єктів. Якщо кожен з *k* об’єктів можна вибрати $n_1,...,n_k$ способами, то один з цих *k* об’єктів можна вибрати $n_1+...+n_k$ способами.

Приклад 5. 2 рази кидають кубик. Результат експерименту – дві цифри, кількість очок, що випало за два рази. Скільки елементарних подій в досліді?

Розв’язання. На першому місці може бути цифра від 1 до 6 і, незалежно від першої, на другому місці – теж цифра від можуть 1 до 6, тобто такі події: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, …, 66. Всього 6 * 6 = 36 шт.

Приклад 6. З пункту А в пункт Б веде 3 дороги, з пункту Б до пункту В – 4 дороги. Скількома способами можна добратись з А в В через Б?

Розв’язання. Вибір дороги з пункту Б в пункт В не залежить від вибору дороги з пункту А в пункт Б. Вибрати треба пару доріг: з А в Б, а потім – з Б в В. Тому за правилом добутку, з пункту А в пункт В через пункт Б можна добратися 3 * 4 = 12 способами.

Приклад 7. З пункту А в пункт Б можна добратись або через пункт К (2 дороги), або через пункт Л (5 доріг). Скількома способами можна добратись з А в Б?

Розв’язання. В цій ситуації треба вибрати треба одну дорогу: з А в Б, або через К, або через Л. Вибір через який пункт – взаємно виключний. Тому за правилом суми, з пункту А в пункт Б можна добратися 2 + 5 = 7 способами.

Питання та задачі до теми

1. Наведіть означення комбінаторної ймовірності.
2. Які види множин і операцій з їх утворення бувають?
3. Що таке $n!$?
4. Наведіть означення перестановки та формулу знаходження P_n .
5. Наведіть означення розміщення та формулу знаходження A_n^k .
6. Наведіть означення сполуки та формулу знаходження C_n^k .
7. Які правила комбінаторики існують? Сформулюйте їх.

Задача 1. Скількома способами можна скласти список з 12 учнів ?

Задача 2. Маємо 10 цифр: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Утворюють з них числа з 4 цифр без повтору. а) Яка ймовірність того, що в підсумку вийде число 2017 ? б) Що зміниться, якщо цифри в числі можуть повторюватись?

Задача 3. Маємо групу студентів з 15 осіб. За заняття вони можуть отримати від 1 до 5 балів. Скільки варіантів розставлення оцінок в журналі?

Задача 4. Скількома способами з 15 осіб можна вибрати групу а) з трьох людей; б) з п'яти людей, одна з яких – голова делегації.

Задача 5. В лотереї випадає 6 виграшних кульок із 49 наявних. Можна вибрати будь-які 6 номерів. Яка ймовірність вгадати: а) всі 6 номерів? б) 5 номерів? в) 4 номера? *г) що зміниться, якщо можна вибрати 7 номерів?

Задача 6. Скільки діагоналей є у правильному N-кутнику?

а) $N = 5$; б) $N = 6$; в) $N = 10$; * г) N – довільне.

Задача 7. 10 студентів треба посадити на 10 стільців, які стоять в лінію. Скільки варіантів розміщення студентів існує, якщо а) немає обмежень?

б) студентка Марія не хоче сидіти поруч із студентом Олександром?

в) студентка Марія не хоче сидіти поруч із Олександром і Сергієм ?

* г) що зміниться в обчисленнях та підсумку кожного пункту, якщо стільці стоятимуть не в лінію, а навколо круглого столу?

Задача 8. Нехай маємо множину з трьох елементів a,b,c. Побудуйте з них повторні вибірки згідно означень 6 і 7. Порівняйте результат з Прикладом 2.

* *Задача 9.* На потоці є 30 студентів, серед яких 10 хлопців. З усіх студентів вибирають групу в 8 студентів. Скільки існує варіантів складу цієї групи, щоб в неї хлопців потрапило а) рівно 5? б) не менше 6?

* *Задача 10.* 25 студентів треба розмістити в 3 аудиторіях. Скільки існує варіантів розміщення студентів по аудиторіях, якщо

а) немає жодних обмежень на кількість студентів в аудиторіях?

б) в першій аудиторії має бути не менше 5 студентів?

в) в першій аудиторії має бути не більше 6 студентів?

Тема 3. Геометрична ймовірність. Аксіоми теорії ймовірностей. Умовні ймовірності. Теореми додавання і множення ймовірностей

3.1. Геометрична ймовірність

Іноді при розв'язанні задач теорії ймовірностей будується така математична модель задачі, в якій використовуються геометричні об'єкти і їх міри – довжини, площі, об'єми. Це відбувається тоді, коли немає скінченного простору елементарних подій, а є нескінченно багато елементарних подій.

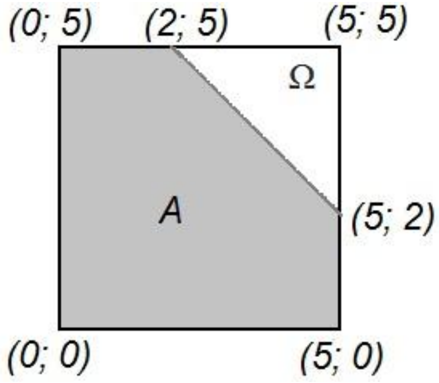
В такій ситуації ймовірність деякої події A знаходять за формулою, аналогічній класичному означенню ймовірності (див. Означення 1.8):

Означення 1. (Геометрична ймовірність)

$$P(A) = \frac{\text{геометрична міра } (A)}{\text{геометрична міра } (\Omega)}. \tag{3.1}$$

Приклад 1. Два студента називають по одному числу між 0 і 5. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не перевищить 7.

Розв'язання. Позначимо через x число, яке назвав перший студент, а через y – число, яке назвав другий студент. Ці числа між собою незалежні. Тому весь простір елементарних подій Ω цього експерименту – це квадрат зі стороною в 5 в просторі Oxy. Тепер перепишемо в термінах x та y подію, ймовірність якої треба знайти: A = "сума цих чисел не перевищить 7", отже $A:\ \ x + y \le 7$ або $A:\ \ y \le 7 - x$. Геометрично в такій інтерпретації події A відповідає частина Ω, яка лежить нижче прямої $y = 7 - x$:



Отже, геометрична міра Ω дорівнює площі всього квадрата зі стороною 5, тобто геометрична міра Ω = 25 кв. одиниць, а геометрична міра події A дорівнює площі заштрихованої частини квадрату, тобто геометрична міра події $A = 25 - 3^2/2 = 21{,}5$ кв. одиниць.

Тому, за формулою (3.1), ймовірність того, що сума названих студентами чисел не перевищить 7 дорівнює

$$P(A) = \frac{\text{геометрична міра } (A)}{\text{геометрична міра } (\Omega)} = \frac{21{,}5}{25} = 0{,}82 .$$

● В умові не було сказано, що студенти називають цілі числа. Інакше задача мала б скінченний ПЕП і простіше розв'язання.

3.2. Аксіоматика теорії ймовірностей

Якщо простір елементарних подій Ω містить багато елементів (n штук), то всі його можливі підмножини – це 2^n штук – буває дуже складно розглядати, а часто і непотрібно. Можна обійтися меншим набором підмножин.

Отже, розглядаємо простір елементарних подій Ω.

Означення 2. Система подій F, побудована з елементів Ω, називається а л г е б р о ю п о д і й, якщо виконуються властивості:

1. $\Omega \in F$.

2. З того, що $A, B \in F$ випливає, що $A \bigcup B \in F$, $A \bigcap B \in F$, $A \setminus B \in F$.

З означення випливає, що $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$ має обов'язково належати алгебрі F.

Для фіксованого Ω можна побудувати різні алгебри. Але **завжди** найменшою буде $F_{\min}=\{ \varnothing ; \Omega \}$; найбільшою буде $F_{\max}$, що складається з 2^n штук всіх можливих підмножин Ω .

Приклад 2. Нехай $\Omega = \{ 1; 2; 3; 4\}$. Побудувати алгебри $F_{\min}$ та $F_{\max}$.

Розв'язання. Як і завжди, $F_{\min}=\{ \varnothing ; \Omega \}$.

$F_{\max}$ складається з $2^4 = 16$ елементів: $F_{\max} =\{ \varnothing$; (1); (2); (3); (4); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4); (1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 3, 4); (2, 3, 4); Ω }.

Означення 3. Нехай на просторі елементарних подій Ω задано алгебру подій F. Числова функція P, що визначена на елементах алгебри F, називається ймовірністю, якщо виконуються такі аксіоми ймовірності:

1. $P(\Omega)=1$.
2. $0 \le P(A) \le 1$ для будь-якої $A \in F$.
3. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{3.2}$$

Означення 4. Трійка об’єктів: простір елементарних подій Ω; побудована на просторі елементарних подій Ω алгебра подій F; визначена на елементах алгебри F ймовірність P – (Ω, F, P) – називається ймовірнісним простором.

Наслідки аксіом.

1. Ймовірність протилежної події :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3.3}$$

2. Ймовірність порожньої множини :

$$P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0.$$

3. Монотонність ймовірності:

   3.1. Якщо $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$.

   3.2. Якщо $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

3.3. Умовні ймовірності. Незалежні події

Події A і B є залежними, якщо поява однієї з них впливає на появу іншої. Інакше події незалежні.

Приклад 3. В скриньці 10 кульок: 6 білих і 4 чорних. Виймають по черзі 2 кульки. Розглянемо події: A = “перша кулька чорна”; B = “друга кулька чорна”.

Розв’язання. Якщо кульки виймають без повернення, то подія B залежить від події A: якщо A відбулася, то в скриньці з 9 кульок буде 3 чорних, а якщо A не відбулася, то в скриньці з 9 кульок – 4 чорних, тобто ймовірності події B змінюються залежно від настання події A. Тому ж подія A від B не залежить. З аналогічних міркувань, якщо кульки виймають з поверненням, то подія *B* не залежить від події *A* і навпаки.

Означення 5. Умовною ймовірністю події *A* за умови, що подія *B* відбулася називається така ймовірність події *A*, яка обчислюється за умови, що подія *B* відбулася :

$$P(A\,|\,B) = P_B(A) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \tag{3.4}$$

Властивості умовних ймовірностей.

1. $P(A|B) = 0$ якщо $A \bigcap B = \varnothing$.
2. $P(A|B) = 1$ якщо $A \bigcap B = B$.
3. В інших ситуаціях $0 \le P(A|B) \le 1$.
4. Якщо мають місце обидві рівності:

$$P(A\,|\,B) = P(A) \quad \text{і} \quad P(B\,|\,A) = P(B),$$

то *A* і *B* є незалежними подіями.

Приклад 4. Нехай простір елементарних подій Ω = { 1; 2; 3; 4; 5; 6 }. Навмання витягають одне число з множини Ω . Розглянемо події: *A* = “вийняте число кратне 2”; *B* = “вийняте число кратне 3”.

а) Обчислити умовні ймовірності $P(A\,|\,B)$ та $P(B\,|\,A)$.

б) Чи є незалежними події *A* і *B*?

Розв’язання. В Ω входять 6 елементарних подій – { 1; 2; 3; 4; 5; 6 }. З умови та властивостей дій над подіями: подія $A \bigcap B$ = “вийняте число кратне 2 і кратне 3” = “вийняте число кратне 6”. Події, що сприяють події *A*: { 2; 4; 6 }; події, що сприяють події *B*: { 3; 6 }; події, що сприяють події $A \bigcap B$: { 6 }.

Тому, за класичним означенням ймовірності (формула (1.1)):

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(A \bigcap B) = \frac{1}{6}.$$

А за формулою (3.4) умовні ймовірності подій:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}; \quad P(B\,|\,A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

3.4. Теореми про додавання і множення ймовірностей

Теорема 3.1 (про додавання ймовірностей довільних подій)

Для довільних подій *A, B* ймовірність об'єднання цих подій дорівнює

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) \tag{3.5}$$

Наслідок (про додавання ймовірностей *n* несумісних подій)

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то ймовірності об'єднання цих подій дорівнює

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) \tag{3.5.1}$$

Теорема 3.2 (про множення ймовірностей двох довільних подій)

Для довільних подій *A, B* ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B) \tag{3.6}$$

Наслідок (про множення ймовірностей *n* довільних подій).

Для довільних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid (A_1 \cup A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})) \tag{3.6.1}$$

Теорема 3.3 (про множення ймовірностей двох незалежних подій)

Якщо події *A* і *B* незалежні, то ймовірність перетину цих подій дорівнює[7]

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{3.7}$$

Наслідок (про множення ймовірностей *n* незалежних подій).

Для незалежних в сукупності подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ має місце формула для обчислення ймовірності перетину цих подій:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{3.7.1}$$

[7] Але якщо (3.7) виконується, то події *A* і *B* не обов'язково будуть незалежними – може зійтись по числах і для залежних подій.

Зауваження 1. Але якщо (3.7) виконується, то події A і B не обов'язково будуть незалежними – може зійтись по цифрах і для залежних.

Приклад 5. Троє студентів складають екзамен. Ймовірності скласти екзамен для кожного з них дорівнюють p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,6 відповідно. Розглянемо події A = "всі складуть", B = "жоден не складе", C = "складуть рівно 2 студента". Знайти ймовірності цих подій.

Розв'язання. Будемо позначати через ІС подію "перший студент складе екзамен" і аналогічно для інших студентів.

Тоді A = "всі складуть" = "ІС і ІІС і ІІІС" = "ІС ∩ ІІС ∩ ІІІС".

Складання першим студентом екзамену не впливає на інших студентів, тобто події ІС, ІІС, ІІІС є незалежними. Тому за теоремою про множення ймовірностей незалежних подій (точніше, за формулою (3.7.1)) маємо

$$P(A) = P(\text{IC} \cap \text{IIC} \cap \text{IIIC}) = P(\text{IC})*P(\text{IIC})*P(\text{IIIC}) = 0{,}9*0{,}8*0{,}6 = 0{,}432\ .$$

Для події B аналогічно маємо

B = "ніхто не складе" = "ІН і ІІН і ІІІН" = "ІН ∩ ІІН ∩ ІІІН".

Будемо використовувати формулу ймовірності протилежної події (3.3):

$$P(\text{IH}) = 1 – P(\text{IC}) = 1 – 0{,}9 = 0{,}1;\ P(\text{IIH}) = 1 – 0{,}8 = 0{,}2;\ P(\text{IIIH}) = 1 – 0{,}6 = 0{,}4.$$

Тепер за теоремою про множення ймовірностей незалежних подій маємо

$$P(B) = P(\text{IH} \cap \text{IIH} \cap \text{IIIH}) = P(\text{IH})*P(\text{IIH})*P(\text{IIIH}) = 0{,}1*0{,}2*0{,}4 = 0{,}008\ .$$

Для події C маємо C = "складуть рівно 2 студента" =

= "рівно 2 студента складуть і рівно 1 студент не складе екзамен" =

= "(ІС і ІІС і ІІІН) або (ІС і ІІН і ІІІС) або (ІН і ІІС і ІІІС)" =

= "(ІС ∩ ІІС ∩ ІІІН) ∪ (ІС ∩ ІІН ∩ ІІІС) ∪ (ІН ∩ ІІС ∩ ІІІС)" .

Події в круглих дужках є несумісним, тому за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій (формула (3.5.1))

$$P(C) = P(\ (\text{IC} \cap \text{IIC} \cap \text{IIIH}) \cup (\text{IC} \cap \text{IIH} \cap \text{IIIC}) \cup (\text{IH} \cap \text{IIC} \cap \text{IIIC})\ ) =$$

$$= P(\text{IC} \cap \text{IIC} \cap \text{IIIH}) + P(\text{IC} \cap \text{IIH} \cap \text{IIIC}) + P(\text{IH} \cap \text{IIC} \cap \text{IIIC})\ ) =$$

$$= P(\text{IC})*\ P(\text{IIC})*\ P(\text{IIIH}) +\ P(\text{IC})*\ P(\text{IIH})*\ P(\text{IIIC}) + P(\text{IH})*\ P(\text{IIC})*\ P(\text{IIIC}) =$$

$$= 0{,}9*0{,}8*0{,}4 + 0{,}9*0{,}1*0{,}6 + 0{,}1*0{,}8*0{,}6 = 0{,}39\ .$$

Питання та задачі до теми

1. Коли використовується формула геометричної ймовірності?
2. Яка система подій називається алгеброю подій?
3. Сформулюйте аксіоми ймовірності.
4. Що таке ймовірнісний простір? З чого він складається?
5. Як знайти ймовірність протилежної події?
6. Які події називаються залежними?
7. Як знайти умовну ймовірність події A за умови, що подія B відбулася?
8. Сформулюйте результати теореми про додавання ймовірностей подій.
9. Сформулюйте результати теореми про множення ймовірностей подій

Задача 1. (Задача про зустріч). Двоє людей домовились про зустріч в певному місці на інтервалі часу $[0;T]$, причому перший, хто прийде, чекає $a < T$ хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що ці особи зустрінуться.

Задача 2. Мішень – це концентричні кола, радіус яких збільшується від 1 см (10 очок) до 10 см (1 очко). Ймовірність влучення в будь-яку частину мішені однакова. Яка ймовірність того, що стрілець, який влучив в мішень, вибив а) рівно 8 очок? б) від 7 до 9 очок? в) парне число очок?

Задача 3. Нехай $\Omega = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \}$.

а) Чи буде алгеброю система підмножин $F_1=\{ \varnothing ; \Omega ; (1, 2); (3, 4, 5)\}$?

б) Доповнити до алгебри систему підмножин $F_2=\{\varnothing; \Omega ; (1, 2); (3, 4); (5)\}$.

Задача 4. За дослідженнями над студентами І курсу відомо, що з першого разу екзамен з математики складає 65% з них, екзамен з історії складає 80%, з них, а хоча б один із цих предметів – 95% з них. Знайти ймовірність того, що навмання взятий студент І курсу складе обидва екзамени з першого разу.

Задача 5. Ймовірність стрільця влучити в “десятку” становить 0,04, в “дев’ятку” – 0,11, у “вісімку” – 0,17. Зроблено один постріл. Яка ймовірність того, що вибито менше 8 очок?

Задача 6. Відомо, що $P(\overline{A}\cap \overline{B}) = 0{,}55$, $P(A\cap \overline{B}) = 0{,}25$, $P(\overline{A}\cap B) = 0{,}1$. $P(A\cap B) = ?$

Тема 4. Формули повної ймовірності та Баєса. Граничні теореми в схемі Бернуллі та їх наслідки

4.1. Формула повної ймовірності. Формула Баєса

Означення 1. Нехай маємо набір з *n* подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$ таких, що:

1. Об'єднання всіх $H_1, H_2, \ldots, H_n$ дає весь простір елементарних подій Ω :

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega .$$

2. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несумісні: $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тоді говорять, що події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють *повну групу подій* або *розбиття* простору елементарних подій Ω. Самі події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називають *гіпотезами*.

Теорема 4.1. Формула повної ймовірності

Ймовірність події *A* дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на умовну імовірність події *A* за умови, що відбулась відповідна гіпотеза:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) \qquad (4.1)$$

Теорема 4.2. Формула Баєса[8]

Якщо в результаті експерименту стало відомо, що подія *A* настала, то ймовірність того, що це мало місце при настанні гіпотези H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обчислюється за формулами Баєса:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)} \qquad (4.2)$$

Зауваження 1. Формулу повної ймовірності використовують тоді, коли в умові мова йде про подію, яка **ще не відбулася**, а формулу Баєса використовують тоді, коли в умові сказано, що деяка подія **вже відбулася.**

[8] Варіанти написання цього прізвища : Байєса, Байеса, Бейеса.

Приклад 1. На заводі є деталі з трьох цехів: 45% з №1, 35% – з №2 і 20% – з №3. Серед деталей є брак: з цеху №1 – 6%, з цеху №2 – 2%, з цеху №3 – 8%.

а) Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде стандартною.

б) Навмання взята деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що вона з другого цеху.

Розв'язання. Введемо події: A = "навмання взята деталь – стандартна";

$$H_1 = \text{"навмання взята деталь - з цеху №1"} \Rightarrow P(H_1) = 0{,}45 \quad P(A|H_1) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$$
$$H_2 = \text{"навмання взята деталь - з цеху №2"} \Rightarrow P(H_2) = 0{,}35 \quad P(A|H_2) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$
$$H_3 = \text{"навмання взята деталь - з цеху №3"} \Rightarrow P(H_3) = 0{,}2 \quad P(A|H_3) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$$

Тоді, з умови маємо, що події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу подій і:

а) За формулою повної ймовірності (4.1)

$$P(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}95$$

б) За формулою Баєса (4.2)

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}98}{0{,}95} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}98}{0{,}95} \approx 0{,}361$$

4.2. Схема Бернуллі

Означення 2. Проводимо серію з n незалежних експериментів. Якщо внаслідок кожного з них може статися **лише одна з двох подій** (їх, як правило, називають "успіх" / "неуспіх") зі **сталими ймовірностями** p і q ($p + q = 1$, отже $q = 1 - p$), то говорять про експерименти за схемою Бернуллі.

● Подію "успіх", як правило, вибирають самостійно, виходячи з умови.

Теорема 4.3. Формула Бернуллі

Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія "успіх" з'явиться рівно k разів, знаходять так:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{4.3}$$

Приклад 2. Ймовірність того, що протягом тижня електрична лампочка не перегорить дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом тижня з 5 лампочок не перегорить: а) 4 штуки; б) не менше 4 штук.

Розв'язання. Лампочки одна на іншу не впливають, значить маємо 5 незалежних експериментів – наслідок роботи протягом тижня першої, другої, …, п'ятої лампочки з двома можливими подіями, які, згідно умови, будемо позначати: "успіх" = "лампочка протягом тижня не перегорить"; "неуспіх" = "лампочка протягом тижня перегорить". Отже, маємо схему Бернуллі з $n = 5$ і ймовірностями "успіху" $p = 0{,}9$ та "неуспіху" $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

а) Тут кількість "успіхів" $k = 4$, тому за (4.3) шукана ймовірність дорівнює

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^{5-4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 5 \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805 \approx 0{,}328$$

б) Тут кількість "успіхів" $k \geq 4$, тобто $k = 4$ або $k = 5$, причому ці події несумісні, тому за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій шукана ймовірність дорівнює сумі $P_5(4) + P_5(5)$. Ймовірність $P_5(4) \approx 0{,}328$ було знайдено вище, а ймовірність $P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^{5-5} = 1 \cdot 0{,}6561 \cdot 1 = 0{,}59049 \approx 0{,}59$.

Тому $$P_5(4) + P_5(5) \approx 0{,}328 + 0{,}59 = 0{,}918$$

4.2.1. Граничні теореми в схемі Бернуллі

При великих значеннях n і k обчислення за формулою Бернуллі стають дуже складними. Тому використовують наближені, асимптотичні формули.

Теорема 4.4. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів та ймовірністю "успіху" p. Тоді при **великих**[9] n ймовірність того, що "успіх" з'явиться рівно k разів, обчислюють за асимптотичною формулою:

$$P_n(k) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{4.4}$$

де $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – ф у н к ц і я Г а у с а, табульована[10]

● Але при наближенні p до 0 точність формули знижується. Для таких ситуацій є спеціальна асимптотична формула Пуассона :

[9] Бажано, щоб: $n > 30$ і $npq > 20$.

[10] Тобто її значення знаходять зі спеціальної таблиці. Див. Таблицю 1 в Додатку 1 даного посібника.

Теорема 4.5. Формула Пуассона для малоймовірних подій

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів, причому

– кількість експериментів n є **великим**[11] числом,

– ймовірність “успіху” дорівнює **малому**[12] числу p ,

– але величина[13] $\boxed{\lambda = np}$ є константою.

Тоді ймовірність того, що “успіх” з’явиться рівно k разів, дорівнює :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{4.5}$$

Теорема 4.6. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів, ймовірність події “успіх” дорівнює р. Тоді при **великих**[14] n ймовірність того, що подія “успіх” з’явиться від k_1 разів до k_2 разів обчислюють за асимптотичною формулою:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{4.6}$$

де $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – функція Лапласа[15]

Приклад 3. Фабрика випускає 75% деталей вищого сорту. Беруть партію в 400 деталей. Знайти ймовірність того, що в партії деталей вищого сорту буде:

а) рівно 305 шт.; б) від 280 до 330 шт.

Розв’язання. Деталі одна на іншу не впливають, значить маємо 400 незалежних експериментів – якість першої, …, чотирьохсотої деталі з двома можливими подіями: “успіх” = “деталь вищого сорту”; “неуспіх” = “деталь не вищого сорту”. Отже, маємо схему Бернуллі з n = 400 і ймовірностями “успіху” p = 0,75 та “неуспіху” q = 1 – p = 1 – 0,75 = 0,25. Оскільки кількість експериментів – велике число, будемо користуватися формулами (4.4) та (4.6).

[11] Бажано: $n > 30$; $npq \le 9$.
[12] $p \le 0{,}1$.
[13] λ – грецька буква, вимовляється *лямбда*.
[14] Бажано: $n > 30$ [а краще $n > 50$] і $npq > 20$.
[15] Її значення знаходять зі спеціальної таблиці. Див. Таблицю 2 в Додатку 1 даного посібника.

а) Тут кількість “успіхів” $k = 305$, тому за (4.4) шукана ймовірність

$$P_{400}(305) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{75}}, \text{ де } x = \frac{305 - 400 \cdot 0{,}75}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58.$$

Тоді, з використанням Таблиці 1, маємо

$$P_{400}(305) = \frac{\varphi(0{,}58)}{\sqrt{75}} = \frac{0{,}3372}{\sqrt{75}} \approx 0{,}039$$

б) Тут кількість “успіхів” $280 \le k \le 330$, тому за (4.4) шукана ймовірність дорівнює $P_{400}(280 \le k \le 330) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_2 = \frac{330 - 400 \cdot 0{,}75}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{30}{\sqrt{75}} \approx 3{,}46$,

$x_1 = \frac{280 - 400 \cdot 0{,}75}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = -\frac{20}{\sqrt{75}} \approx -2{,}31$, тобто, за властивостями функції Лапласа

$$P_{400}(280 \le k \le 330) = \Phi(3{,}46) - \Phi(-2{,}31) = \Phi(3{,}46) + \Phi(2{,}31) = 0{,}49973 + 0{,}4896 \approx 0{,}989$$

4.2.2. Наслідки граничних теорем в схемі Бернуллі

Наслідок 1. Оцінка ймовірності відхилення відносної частоти “успіху” від теоретичної ймовірності на задану величину δ

Нехай маємо n незалежних експериментів за схемою Бернуллі, ймовірність події “успіх” дорівнює p. Тоді для великих n

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right\} = 2\Phi\left(\delta \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наслідок 2. Кількість експериментів n для наближення із заданою точністю теоретичної ймовірності частотою “успіху”

Нехай маємо послідовність експериментів за схемою Бернуллі, з ймовірністю події “успіх” рівною p. Скільки експериментів n треба провести, щоб відносна частота “успіху” $\frac{k}{n}$ з ймовірністю $1 - \alpha$ відрізнялась від теоретичної ймовірності “успіху” p не більше, ніж на δ?

Це **ціле** число n знаходять з умови:

$$\Phi\left(2\delta \cdot \sqrt{n}\right) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Наслідок 3. Кількість експериментів n для спостереження хоча б одного “успіху” із заданою ймовірністю

Нехай маємо послідовність експериментів за схемою Бернуллі, з ймовірністю події “успіх” рівною p. Скільки експериментів n треба провести, щоб з ймовірністю P подія “успіх” відбулась хоча б один раз?

Це **ціле** число n знаходять з умови:

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

4.2.3. <u>Найімовірніше число появи події (мода) в схемі Бернуллі</u>

Означення 3. Найімовірнішим число появи події (модою) в схемі Бернуллі з n експериментів називають таке **ціле число**, для якого ймовірність не менша ймовірності кожного з решти можливих варіантів.

Найімовірніше число появи події (мода) знаходиться як **ціле** число k_0, що задовольняє нерівності

$$np - q \le k_0 \le np + p \qquad (4.7)$$

Питання та задачі до теми

1. За яких умов набір подій називають повною групою подій?
2. Сформулюйте формулу повної ймовірності та формулу Баєса. Як відрізнити ситуації, в яких застосовуються ці формули?
3. За яких умов серію експериментів називають експериментами за схемою Бернуллі?
4. Наведіть та поясніть формулу Бернуллі.
5. В чому відмінності локальної та інтегральної теорем Муавра-Лапласа?
6. В яких випадках використовують формулу Пуассона?
7. Що таке функція Гауса і функція Лапласа та як знайти їх значення?

Задача 1. Двигун може працювати в нормальному і форсованому режимах. Двигун працює в нормальному режимі 80% часу, а в форсованому -

20%. Ймовірність поломки двигуна при нормальному режимі дорівнює 0,01, а при форсованому – 0,04. Найти ймовірність поломки двигуна за час роботи.

Задача 3. В першій скриньці є 8 білих и 7 чорних куль, а в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої скриньки випадковим чином дістають 2 кулі і перекладають їх в другу скриньку. Після цього з другої скриньки дістають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі кулі, що вийняті з другої скриньки – білі.

**Задача 3*. Ймовірність того, що в деякому виробництві виріб задовольняє стандарту, становить 0,96. Пропонується спрощена система перевірки, яка для виробів, що задовольняють стандарту, дає позитивний результат з ймовірністю 0,98, а для виробів, що не задовольняють стандарту, дає позитивний результат з ймовірністю 0,05. Яка ймовірність, що виріб, який двічі пройшов спрощену перевірку, задовольняє стандарту?

Задача 4. Ймовірність запізнення поїзда становить 0,2. Яка ймовірність того, що за 200 днів поїзд запізниться а) 30 разів; б) від 10 до 50 разів?

Задача 5. Під час епідемії ймовірність захворіти грипом протягом 1 дня дорівнює 0,005. В установі працює 300 людей. Яка ймовірність, що протягом дня захворіє: а) рівно 3 людини; б) від 1 до 5 людей; в) ніхто не захворіє?

Задача 6. Фабрика випускає 75% деталей першого сорту. Беруть партію в 400 деталей. Знайти ймовірність того, що в партії відносна частота деталей першого сорту складатиме від 70% до 80%.

**Задача 7*. Фабрика випускає 75% деталей першого сорту. Скільки деталей треба взяти, щоб з ймовірністю 0,9 серед них відносна частота деталей першого сорту складала від 70% до 80%?

**Задача 8*. За годину автомат виготовляє 20 деталей. Ймовірність браку для будь-якої деталі дорівнює 0,01. Через який час (в годинах) ймовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі становитиме не менше 0,952?

Задача 9. В умовах Задачі 4 знайти найімовірніше число людей, яке захворіє протягом 1 дня. Обчислити ймовірність того, що захворілих за день буде саме стільки і порівняти результат з отриманими в Задачі 5.

Тема 5. Випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних випадкових величин

5.1. Випадкові величини, їх типи

Означення 1. Функція, що визначена на просторі елементарних подій Ω (тобто ставить у відповідність будь-якому елементу Ω певне число), називається випадковою величиною. (Скорочено – ВВ).

Якщо ж множиною значень цієї функції є площина або простір (функція ставить у відповідність елементу Ω певну точку – кілька впорядкованих координат), то ця функція називається випадковим вектором.

Якщо множина значень випадкової величини є скінченною, то така випадкова величина називається дискретною. Якщо ж випадкова величина може набувати будь-яке значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку, то випадкова величина називається неперервною.

Випадкові величини, як правило, позначають великими латинськими літерами – X, Y, Z – а їх можливі значення відповідними малими: x, y, z.

5.2. Дискретні випадкові величини

Означення 2. Співвідношення між можливими значеннями дискретної випадкової величини і їх ймовірностями називається законом розподілу. Його можна задати *таблично, аналітично* і *графічно.* Найчастіше використовують табличний спосіб завдання закону розподілу, який називають рядом розподілу і подають у вигляді таблиці

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тут в першому рядку записані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини X, а в другому рядку – відповідні ймовірності того, що випадкова величина X прийме значення x_i : $p_i = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$

● Важливо, щоб "зійшлась" контрольна сума (її називають ще умова нормування):

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.} \qquad (5.1)$$

Щоб надати закону розподілу більш наочного вигляду, часто вдаються до його **графічного зображення**. По осі абсцис відкладаються всі можливі значення випадкової величини, а по осі ординат відповідні ймовірності цих значень. Отримані точки сполучаються відрізками прямих. Така фігура називається багатокутником розподілу. Багатокутник розподілу, так само як і закон розподілу, повністю характеризує випадкову величину. Він є графічною формою закону розподілу.

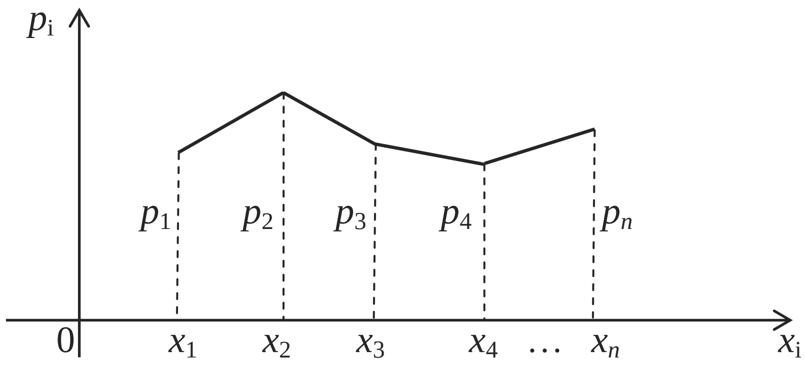


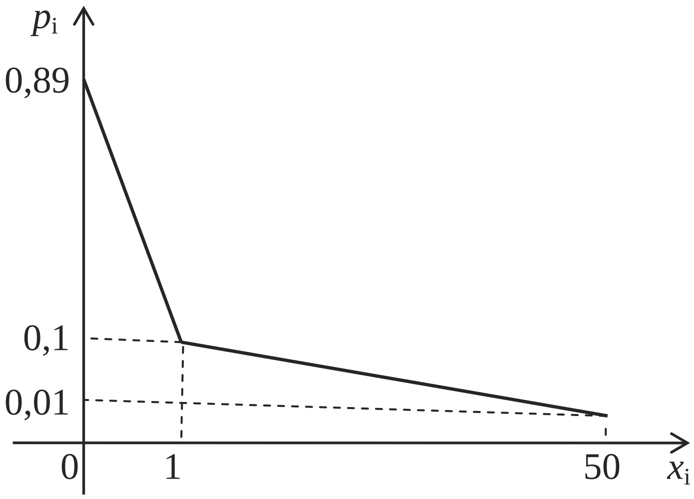
Рис. 5.1. Багатокутник розподілу

Приклад 1. Лотерея містить 100 білетів. Умовами лотереї передбачено 1 виграш в 50 грн. і 10 виграшів в 1 грн. Введемо таку випадкову величину X = "виграш одного навмання взятого білету". Побудувати ряд розподілу ВВ X. Перевірити контрольну суму. Побудувати багатокутник розподілу.

Розв'язання. ВВ X може набувати трьох значень – 0, 1 або 50. Тому, з використанням класичного означення ймовірності маємо такий ряд розподілу

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

За цим рядом розподілу побудуємо багатокутник розподілу (масштаб дотриманий приблизно):



5.3. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Розглянемо основні закони розподілу дискретних випадкових величин. Найпростіші з них отримують зі схеми Бернуллі. Отже, будемо розглядати схему Бернуллі з n незалежних експериментів. Ймовірність "успіху" p, ймовірність "неуспіху" $q = 1 - p$.

Означення 3. Якщо дискретна випадкова величина набуває лише цілих невід'ємних (або натуральних) значень, то її називають ц і л о ч и с л о в о ю .

5.3.1. Біноміальний закон розподілу дискретних випадкових величин

Означення 4. Цілочислова випадкова величина X має б і н о м і а л ь н и й (б і н о м н и й) з а к о н р о з п о д і л у , якщо вона дорівнює **кількості успіхів в *n* експериментах за схемою Бернуллі,** тобто набуває $n + 1$ (від 0 до n) можливих значень з ймовірностями, обчисленими за формулою Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, \qquad (5.2)$$

для $i = 0, 1, \ldots, n$

● Позначають $X \sim B(n, p)$.

Отже закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	0	1	…	k	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Числові характеристики (див. Тему 7):

$$MX = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i = np, \qquad DX = \sum_{i=0}^{n} (x_i - MX)^2 p_i = npq. \tag{5.3}$$

Приклад 2. Підкидають монету 3 рази. Випадкова величина X = "кількість гербів, що випало". Побудувати ряд розподілу ВВ X.

Розв'язання. Підкидання монети – незалежні, ймовірність "успіху" – випадіння герба – $p = 1/2$; ймовірність "неуспіху" $q = 1 - p = 1/2$; отже ВВ X розподілена за біноміальним законом. Зрозуміло, що ВВ X може набувати лише значень 0, 1, 2 або 3. Тому, за формулою Бернуллі (5.2):

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Зауваження 1. Цей закон названо "біноміальним" тому, що праву частину рівності (5.2) можна розглядати як загальний член біному Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^0 q^n.$$

* **Зауваження 2.** Розглянемо узагальнення схеми Бернуллі – "замість монети – кубик": нехай маємо n незалежних експериментів, в кожному з яких може настати лише одна з k подій:

подія "*успіх*$_1$" з ймовірністю p_1,

подія "*успіх*$_2$" з ймовірністю p_2, …,

подія "*успіх*$_k$" з ймовірністю p_k, причому $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

Тоді випадковий вектор $X = (x_1; x_2; ...; x_k)$, координати якого дорівнюють кількості відповідних "успіхів", має поліноміальний закон розподілу і ймовірності випадкового вектора X набути певне значення обчислюють так:

$$P\{X = (m_1; m_2; ...; m_k)\} = P\{x_1 = m_1; x_2 = m_2; ...; x_k = m_k\} = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k},$$

тут $m_1 + m_2 + ... + m_k = n.$

Біноміальний закон розподілу є окремим випадком поліноміального для кількості можливих подій (тобто різних "успіхів") $k = 2$.

5.3.2. Геометричний закон розподілу дискретних випадкових величин

Знову розглядаємо схему Бернуллі з ймовірністю "успіху" p, ймовірністю "неуспіху" $q = 1 - p$.

Означення 5. Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу, якщо вона дорівнює **кількості експериментів до настання першого "успіху"** в схемі Бернуллі, тобто набуває будь-яких натуральних значень з ймовірностями, обчисленими як наслідок формули Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = P\{\text{Н...НУ}\} = P\{\text{Н...Н}\}P\{\text{У}\} = P_{i-1}(0)P_1(1) = pq^{i-1}, \qquad (5.4)$$

для $i = 1, \ldots, n, \ldots$

● Позначають $X \sim \mathrm{G}(p)$.

Отже закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	1	2	…	k	…
P	p	pq	…	pq^{k-1}	…

Числові характеристики (див. Тему 7):

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{1}{p}, \qquad DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i = \frac{q}{p^2}. \qquad (5.5)$$

Приклад 3. З гармати стріляють в мішень до першого влучення. Для кожного пострілу ймовірність влучення $p = 0,6$. Знайти ймовірність того, що знадобиться: а) рівно 3 постріли; б) не більше 3 пострілів.

Побудувати ряд розподілу ВВ X = "кількість зроблених пострілів".

Розв'язання. Постріли – незалежні, ймовірності "успіху" $p = 0,6$, "неуспіху" $q = 1 - p = 0,4$; отже ВВ X розподілена за геометричним законом. Тому, за формулою (5.4): а) $p_3 = P\{X = 3\} = pq^{3-1} = 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,096$;

б) $p_1 + p_2 + p_3 = 0,6 \cdot 0,4^0 + 0,6 \cdot 0,4^1 + 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,6 + 0,24 + 0,096 = 0,936$.

X	1	2	…	k	…
P	0,6	0,24	…	$0,6*0,4^{k-1}$	…

5.3.3. Пуассонівський закон розподілу дискретних випадкових величин

Означення 6. Нехай ймовірність події "успіх" дорівнює **малому** числу p, а кількість експериментів n є **великим** числом: $p \to 0, n \to \infty$, але так, що величина $\lambda = np$ **є константою**[16]. Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу (розподіл Пуассона), якщо вона дорівнює **кількості "успіхів" в *n* експериментах за схемою Бернуллі**, тобто ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{5.6}$$

де, повторимо, число $\lambda = n \cdot p$, а $k = 0, \ldots, n, \ldots$

● Позначають $X \sim \Pi(n, p)$.

Тобто закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	0	1	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	…

● Пуассонівський закон розподілу є узагальненням біноміального закону розподілу для великого числа експериментів і малоймовірних успіхів.

***Зауваження 3.** Незважаючи на означення випадкову величину X, розподілену за пуассонівським законом розподілу, розглядають як таку, яка може набувати будь-яких як завгодно великих значень. Це робиться, з одного боку, тому, що ймовірності великих значень випадкової величини X є дуже малими (кажуть *знехтуваними*) порівняно з іншими, а, з іншого боку, для того, щоб виконувалась умова нормування (5.1) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Числові характеристики такої випадкової величини (див. Тему 7):

$$MX = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i = \lambda = np, \quad DX = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i = \lambda = np, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{np}. \tag{5.7}$$

[16] Бажано: $p \le 0{,}1$; $n > 30$; $npq \le 9$

5.3.4. Гіпергеометричний закон розподілу дискретних випадкових величин

Розглянемо таку задачу: маємо партію в N деталей, серед яких десь M мають певну ознаку (наприклад, є стандартними), а решта – не мають (відповідно, є бракованими). Вибираємо з цієї партії n деталей.

Означення 7. Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу, якщо вона дорівнює **кількості стандартних деталей з *n* навмання вибраних**, а значить ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_n(m) = P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \tag{5.8}$$

де, із постановки задачі: $N > M$, $N > n$, $M \geq m$, $N - M \geq n - m$, $m \leq \min(n; M)$.

● Позначають $X \sim \mathrm{HG}(N, M, n)$.

Пояснення формули. Формула (5.8) обчислюється за правилами комбінаторики: в чисельнику стоїть загальне число комбінацій, якими можна вибрати m стандартних деталей із всіх наявних M стандартних та вибрати $n–m$ бракованих деталей із всіх наявних $N–M$ бракованих; в знаменнику стоїть загальна кількість комбінацій, якими можна вибрати n деталей із загального числа N деталей. Тому закон розподілу такої випадкової величини має вигляд :

X	0	1	…	m	…	n
P	$\frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{M \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^n}{C_N^n}$

Числові характеристики (див. Тему 7):

$$MX = \frac{1}{C_N^n} \sum_{m=0}^{n} m C_M^m C_{N-M}^{n-m}, \qquad DX = \frac{1}{C_N^n} \sum_{m=0}^{n} m^2 C_M^m C_{N-M}^{n-m} - (MX)^2 \tag{5.9}$$

Приклад 4. В ящику міститься 10 деталей, серед яких 7 стандартних, а решта – браковані. Навмання беруть 3 деталі. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “кількість стандартних з трьох взятих” .

Розв'язання. Отже, ВВ X ~ HG(10, 7, 3). Можливих значень ВВ X є 4 шт.: 0, 1, 2, 3. Тому за формулою (5.8) маємо такий ряд розподілу:

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{C_{10-7}^{3}}{C_{10}^{3}}=\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{7\cdot C_{10-7}^{3-1}}{C_{10}^{3}}=\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{C_7^2\cdot C_{10-7}^{3-2}}{C_{10}^{3}}=\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{C_7^3\cdot C_{10-7}^{3-3}}{C_{10}^{3}}=\dfrac{35}{120}$

Зауваження 4. Ознака, за якою розподіляють деталі, може бути не лише якісною (стандартні–браковані), але й іншою: колір (зелені – не зелені), харчові ознаки (дієтичне – звичайне або шоколадні – не шоколадні) тощо.

* **Зауваження 5.** Для випадкової величини X ~ HG(N, M, n) виконується умова нормування (5.1):

$$\sum_{m=0}^{n} p_i = \frac{1}{C_N^n}\sum_{m=0}^{n} C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m} = 1.$$

Цей результат можна отримати, розкривши факторіали під знаком суми.

Зауваження 6. Для випадкової величини X ~ HG(N, M, n), не працює схема Бернуллі: n деталей витягаються без повернення, і для кожної наступної деталі змінюється ймовірність "успіху". Проте для великого N і малої вибірки (такої, що $n < N/10$, $n < M/10$, $n < (N–M)/10$) зміна цих ймовірностей досить незначна, тож ймовірності, обчислені за гіпергеометричним законом, дуже близькі до відповідних ймовірностей, обчислених для біноміального закону з параметром $p=\dfrac{M}{N}$.

Зауваження 7. В гіпергеометричний закон розподілу входять 3 параметра: N, M та n. В практичних задачах часто вводять параметр "*ро*" $\rho=\dfrac{M}{N}$ і розглядають задачу з двома параметрами: ρ та n. Для обчислень потрібно ввести довільне число N, потім обчислити значення $M = \rho N$, причому N має бути настільки великим, щоб виконувались нерівності:

$$N > M,\ N > n,\ M \ge m,\ N - M \ge n - m,\ M > n,\ m \le \min(n; M).$$

5.3.5. Рівномірний закон розподілу дискретних випадкових величин

Означення 8. Дискретна випадкова величина X має *рівномірний закон розподілу*, якщо вона набуває k шт. можливих значень з однаковими ймовірностями:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{5.10}$$

Тобто закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
P	$1/k$	$1/k$	$\ldots$	$1/k$

Числові характеристики (див. Тему 7):

$$MX = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad DX = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2. \tag{5.11}$$

Приклад 5. Підкидають 1 раз гральний кубик. ВВ X = “кількість очок, що випало”. Побудувати ряд розподілу ВВ X.

Розв’язання. Отже, ВВ X має рівномірний закон розподілу. Можливих значень ВВ X є 6 шт.: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тому за (5.10) маємо такий ряд розподілу:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

* 5.4. Найпростіший потік подій

Розподіл Пуассона, що було визначено в Означенні 6, широко використовується в задачах контролю якості, в теорії масового обслуговування та інших практичних застосуваннях.

Означення 9. Послідовність подій, що відбуваються у випадкові моменти часу називається *потоком подій*.

Приклади потоків подій: надходження викликів на АТС; прибуття літаків в аеропорт; збої в роботі обладнання; надходження клієнтів в магазин тощо.

Потоки подій можуть мати такі **властивості**:

Стаціонарність : ймовірність настання k подій на будь-якому проміжку часу t залежить лише від числа k і від тривалості проміжку t і не залежить від початку його відліку.

Відсутність післядії : ймовірність настання k подій на будь-якому проміжку часу не залежить від того, з'являлись чи не з'являлись події в моменти часу, які передували початку проміжку.

Ординарність : настання двох чи більше подій за малий проміжок часу практично неможливе.

Означення 10. Потік подій називається пуассонівським (найпростішим) якщо він є стаціонарним, без післядії та ординарним.

Означення 11. Інтенсивністю потоку λ називається середнє число подій, які настають за одиницю часу.

Теорема (формула Пуассона)

Нехай маємо пуассонівський потік подій з інтенсивністю λ. Тоді ймовірність того, що за час t відбудеться рівно k подій, що утворюють даний потік, дорівнює

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad (5.12)$$

Наслідок. Середня довжина проміжку часу між надходженням двох послідовних вимог пуассонівського потоку подій дорівнює $1/\lambda$.

Питання та задачі до теми

1. Що називають випадковою величиною?
2. Які види випадкових величин бувають?
3. Яку випадкову величину називають цілочисловою?
4. Що таке закон розподілу дискретної випадкової величини? Які способи завдання закону розподілу бувають?
5. Що називають рядом розподілу і як його будують?
6. Що таке умова нормування? З яких причин вона виникає?

7. Як будують багатокутник розподілу?
8. В чому полягають відмінності між біноміальним, геометричним та пуассонівським законом розподілу?
9. В яких практичних задачах виникають випадкові величини, розподілені за гіпергеометричним законом розподілу?
10. Що таке потік подій і які властивості він може мати?

Задача 1. Дискретна ВВ X задана рядом розподілу

X	1	2	5	9
P	0,2	0,5	p	0,2

Знайти невідому ймовірність p. Побудувати багатокутник розподілу.

Задача 2. 2 стрільця роблять по 1 пострілу. Ймовірність влучити для першого стрільця становить 0,6, для другого – 0,8. Побудувати ряд розподілу ВВ X = “число влучень в мішень”.

Задача 3. Гральний кубик підкидається доти, доки не випаде 6 очок. Знайти закон розподілу випадкової величини X = “кількість підкидань”.

Задача 4. Перевірити для ряду розподілу геометрично розподіленої випадкової величини умову нормування $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

*Задача 5**. З гармати стріляють до двох підряд влучень. Для кожного пострілу ймовірність влучення p = 0,6. Знайти ймовірність того, що знадобиться: а) рівно 3 постріли; б) не більше 3 пострілів.

Задача 6. Завод відправив замовнику 5000 виробів. Ймовірність виробу розбитися в дорозі становить 0,0002. Побудувати ряд розподілу ВВ X = “кількість виробів, що розбились в дорозі” (обмежитись від 0 до 5).

Задача 7. Ймовірність того, що платіж поступить від клієнта вчасно становить 0,92. Знайдіть ймовірність, того, що з 50 платежів прострочених буде а) 3 шт. б) від 2 до 5 шт.; в) не більше 4 шт.

Задача 8. На АТС в середньому за хвилину надходить 2 виклики. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин на АТС надійде рівно 10 викликів.

Тема 6. Функція розподілу та щільність розподілу ймовірностей випадкових величин. Функції випадкового аргументу

6.1. Функція розподілу ймовірностей випадкових величин

Означення 1. Випадкова величина X називається неперервною, якщо:

а) множина значень X співпадає з усіма можливими значеннями деякого скінченного або нескінченного проміжку числової осі;

б) ймовірність того, що X набуде фіксованого значення дорівнює нулю:

$$P\{X = a\} = 0.$$

● Хоча ймовірність $P\{X = a\} = 0$, проте подія $\{X = a\}$ не є неможливою.

Означення 2. Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X називається функція $F_X(x)$, що при кожному значенні x дорівнює **ймовірності** того, що випадкова величина X набуде значень, менших за x:

$$\boxed{F_X(x) = P\{X < x\}} \tag{6.1}$$

$F_X(x)$ ще називають інтегральною функцією розподілу.

● Якщо немає двозначності, індекс X у функції розподілу не пишуть: $F(x)$

● Функція розподілу – це універсальний спосіб визначення випадкової величини: як дискретної, так і неперервної.

Властивості функції розподілу

1. $0 \le F_X(x) \le 1.$
2. $F_X(x)$ – неспадна функція на $(-\infty;+\infty)$, тобто при $x_1 < x_2$ маємо
$$F_X(x_1) \le F_X(x_2).$$
3. $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad F_X(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$
4. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал $[a; b)$ (набуде значень з цього інтервалу), дорівнює (при $a < b$):
$$\boxed{P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a).} \tag{6.2}$$

4.1. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать лише інтервалу $(a;\, b)$, то $F_X(x)=0$ при $x \le a$ і $F_X(x)=1$ при $x \ge b$.

4.2. Для неперервної випадкової величини X включення або не включення точки не впливає на результат :

$$P\{X < a\} = P\{X \le a\} = F_X(x)$$

4.3. Для неперервної випадкової величини X і для довільного числа a

$$P\{X = a\} = P\{X \le a\} - P\{X < a\} = 0$$

5. Ймовірність протилежної події $P(X \ge x) = 1 - F_X(x)$.

6. Для дискретної випадкової величини X такої, що $p_i = P\{X = a_i\}$

$$F_X(x) = \sum_{i\,:\,a_i < x} p_i$$

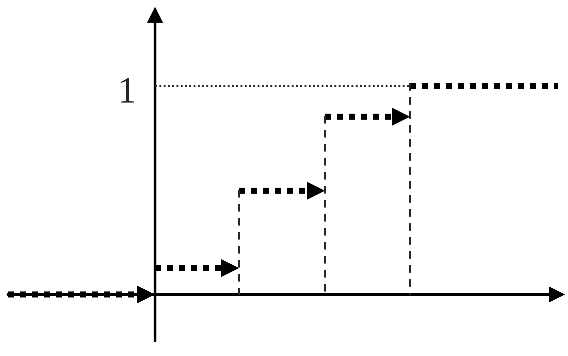
Приклад 1. Монету підкидають 3 рази. X = "кількість гербів, що випало". Побудувати $F_X(x)$ – функцію розподілу ВВ X. Зобразити графічно.

Розв'язання. Отже, ВВ X має біноміальний закон розподілу. Можливих значень ВВ X є 4 шт.: 0, 1, 2, 3. Тому маємо такий ряд розподілу:

За цим рядом розподілу будуємо функцію розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}, & \text{при} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}, & \text{при} \quad 2 < x \le 3 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}, & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}, \text{ тобто } F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{при} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{при} \quad 2 < x \le 3 \\ 1, & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$$

Тоді функція розподілу має такий сxідчастий графік:



6.2. Щільність розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин

Означення 2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X – це похідна від її функції розподілу:

$$\boxed{f_X(x) = \left(F_X(x)\right)'.} \tag{6.3}$$

$f_X(x)$ ще називають диференційною функцією розподілу.

Графік щільності називають кривою розподілу випадкової величини X.

Зауваження 1. У дискретних випадкових величин щільність рівна 0 у всіх точках, тому для дискретних випадкових величин щільність не розглядають.

● Якщо немає двозначності, індекс X у щільності не пишуть: $f(x)$.

Властивості щільності

1. $f_X(x) \geq 0$.

2. Умова нормування: $$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.} \tag{6.4}$$

● Зверніть увагу, що в умові нормування – невласний інтеграл.

2.1. Якщо випадкова величина X визначена лише на інтервалі $(a; b)$,

то умова нормування: $$\boxed{\int\limits_a^b f_X(x)dx = 1.} \tag{6.4.1}$$

3. Функція розподілу випадкової величини X виражається через щільність

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(y)dy.$$

4. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал $(a; b)$

$$\boxed{P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_a^b f_X(x)dx.} \tag{6.5}$$

5. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать лише інтервалу $(a; b)$, то $f_X(x) = 0$ при $x \leq a$ і при $x \geq b$.

***Зауваження 2.** З означення маємо:

$$P(x_0 < X < x_0 + \Delta x) \approx dF_X(x_0) = f_X(x_0)\Delta x,$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в Δ–окіл точки x_0 (в *малий* інтервал $(x_0;\, x_0 + \Delta x)$) **наближено** дорівнює добутку $f_X(x_0)$ – значення щільності випадкової величини X в точці x_0 – на довжину *малого* інтервалу Δx. Аналогічні формули для інтервалів $(x_0 - \Delta x; x_0)$ та $(x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$.

Приклад 2. Неперервну ВВ X задано щільністю розподілу:

$$f_X(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+2}\,, & \text{при} \quad -2 < x \le 7 \\ 0\,, & \text{при інших} \quad x \end{cases}$$

а) Знайти величину a та функцію розподілу $F_X(x)$;

б) Знайти $P(-1 < X < 2)$;

Розв'язання. а) Величину a знайдемо з умови нормування (6.4.1):

$$a\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{18}, \quad \text{оскільки}$$

$$\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx = \begin{vmatrix} y = x+2 & x = -2 \Rightarrow y = 0 \\ dy = dx & x = 7 \Rightarrow y = 9 \end{vmatrix} = \int_0^9 \sqrt{y}\,dy = \left.\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=9} = \left.\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right|_{y=0}^{y=9} = \frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}) = 18.$$

За властивостями щільності знаходимо функцію розподілу $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \frac{1}{18}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{y+2}\,dy = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2 \\ \frac{1}{27}(x+2)^{\frac{3}{2}} & \text{при } -2 \le x \le 7 \\ 1 & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

б) За знайденою функцією розподілу та формулою (6.2)

$$P(-1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-1) = \frac{1}{27}\left((2+2)^{\frac{3}{2}} - (-1+2)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{27}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}(8-1) = \frac{7}{27} \approx 0{,}26$$

* 6.3. Функції випадкового аргументу

Постановка задачі): Нехай маємо випадкову величину X з відомою функцією розподілу $F_X(x)$ (або щільністю $f_X(x)$) та деяку задану функцію $g(x)$. Розглянемо випадкову величину Y, що визначається так: $Y = g(X)$. Як знайти функцією розподілу $F_Y(x)$ (або щільність розподілу $f_Y(x)$)?

Якщо **дискретну** випадкову величину X задано таблицею

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

то випадкова величина $Y = g(X)$ теж буде задана таблицею (цього достатньо для отримання $F_Y(x)$):

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\dots$	$g(x_n)$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

і потрібно врахувати можливість того, що співпадуть значення функції $g(x)$ для різних x (тобто коли $g(x_i) = g(x_j)$) – тоді треба в таблиці для цього значення Y скласти всі відповідні ймовірності: $p_i + p_j$.

Для **неперервної** випадкової величини X можливі такі ситуації:

Теорема 6.1. (для монотонної функції $g(x)$)

Якщо $g(x)$ – монотонна функція, для якої існує обернена $g^{-1}(x)$, то функцією розподілу $F_Y(x)$ та щільністю розподілу $f_Y(x)$ для $Y = g(X)$ будуть

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(g(X) < x) = P\left(X < g^{-1}(x)\right) = F_X\left(g^{-1}(x)\right), \tag{6.6}$$

$$f_Y(x) = \left(F_Y(x)\right)' = \left(F_X\left(g^{-1}(x)\right)\right)' = f_X\left(g^{-1}(x)\right)\cdot\left|\left(g^{-1}(x)\right)'\right|. \tag{6.7}$$

Зауваження 3. (для довільної функції $g(x)$)

Якщо $g(x)$ – довільна функція, для якої існує обернена $g^{-1}(x)$, то функцію розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ для $Y = g(X)$ знаходять так:

$$F_Y(x) = P(Y \in (-\infty; x)) = P(g(X) \in (-\infty; x)) = P\left(X \in g^{-1}(-\infty; x)\right),$$

$$f_Y(x) = \left(F_Y(x)\right)'.$$

Приклад 3. Дискретну випадкову величину *X* задано рядом розподілу:

X	–3	–1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Знайти ряд розподілу та функцію розподілу $F_Y(x)$ для ВВ $Y = 3X^2$.

Розв'язання. З умови будемо мати таку таблицю

$3X^2$	27	3	0	3	12	27
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Тому отримаємо такий ряд розподілу ВВ $Y = 3X^2$:

Y	0	3	12	27
P	0,2	0,3	0,3	0,2

Питання та задачі до теми

1. Що називають функцією розподілу? Для яких випадкових величин її розглядають?
2. Як знайти функцію розподілу для дискретної випадкової величини?
3. Назвіть та поясніть властивості функції розподілу.
4. Дайте означення щільності розподілу. Для яких випадкових величин її розглядають?
5. В чому полягає сенс умови нормування?
6. Чи можна за щільністю знайти функцію розподілу? А навпаки? Як це зробити?
7. Як знайти ймовірність протилежної події за допомогою щільності?
8. Які знайти щільність функції випадкового аргументу?

Задача 1. Дискретну випадкову величину *X* задано рядом розподілу:

X	–4	2	6	13
P	0,3	0,1	0,4	p

Знайти величину *p*. Знайти функцію розподілу $F_X(x)$. Побудувати її графік.

Задача 2. Два стрільця роблять по одному пострілу. Ймовірність влучити для першого стрільця становить 0,6, для другого – 0,8. Випадкова величина X = “число влучень в мішень”. Знайти функцію розподілу $F_X(x)$ та побудувати її графік.

Задача 3. Побудувати графіки $F_X(x)$ та $f_X(x)$ з Прикладу 2.

Задача 4. Знайти функцію розподілу $F_Y(x)$ та побудувати її графік для випадкової величини Y з Прикладу 3.

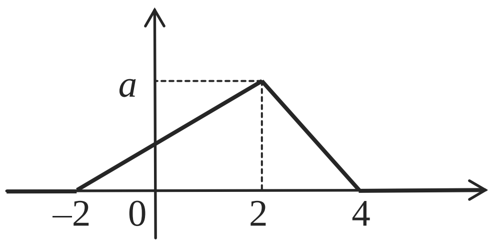
Задача 5. Неперервну випадкову величину X задано функцію розподілу:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -3 \\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & \text{при} \quad -3 < x \le 4. \\ 1, & \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

а) Побудувати графік функції розподілу $F_X(x)$. б) Знайти $P(-1 < X < 2)$.

в) Знайти рівняння щільності $f_X(x)$ та побудувати її графік.

Задача 6. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу. Знайти значення параметру a та $P(-1 < X < 3)$, виходячи з геометричних міркувань.



Задача 7. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}, & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

а) Знайти функцію розподілу $F_X(x)$.

б*) Знайти функцію розподілу $F_Y(x)$ та щільність $f_Y(x)$ для випадкової величини Y, заданої : б1) $Y = 5X$; б2) $Y = 2X^2$.

*Задача 8**. Для неперервної випадкової величини X відома щільність $f(x)$. Якою буде щільність випадкової величини а) $Y = 2X$; б) $Z = 2X - 3$?

Тема 7. Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу дає повну інформацію про випадкову величину, але на практиці зручніше користуватися лише певними числовими характеристиками випадкової величини.

7.1. Математичне сподівання

Означення 1. Математичне сподівання випадкової величини X позначається[17] MX і обчислюється за формулою:

а) для **дискретної** випадкової величини X, що задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{7.1}$$

б) для **неперервної** випадкової величини X, заданою щільністю $f_X(x)$,

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \,. \tag{7.2}$$

б.1) якщо **всі можливі** значення випадкової величини X належать **лише** інтервалу $(a; b)$, то

$$MX = \int_{a}^{b} x f_X(x) dx \,. \tag{7.2.1}$$

- Математичне сподівання – синонім “середнє значення”.

Властивості математичного сподівання

1. $MC = C$, де C – *Const*.
2. $M(CX) = C \cdot MX$, де C – *Const*.
3. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$.

[17] Математичне сподівання ще може позначатися $M(X)$, $M[X]$ або, в іншомовній літературі, EX, $E(X)$.

4. Якщо випадкові величини *X* та *Y* незалежні, то

$$M(X\cdot Y)=MX\cdot MY\,.$$

5. Для невипадкової функції $g(x)$

$$Mg(X)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,f_X(x)dx\,. \tag{7.3}$$

5.1. Якщо випадкова величина *Y* є невипадковою функцією від випадкової величини *X*: $Y=g(X)$, то її математичне сподівання знаходиться за формулою

$$MY=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,f_X(x)dx\,. \tag{7.3.1}$$

Приклад 1. Знайти *MX* дискретної ВВ *X*, що задана рядом розподілу:

X	–4	2	6	13
P	0,3	0,1	0,4	p

Розв'язання. Спочатку знайдемо невідомий параметр *p*. Знаходимо його з умови нормування для дискретних випадкових величин (5.1):

0,3 + 0,1 + 0,4 + *p* = 1, отже *p* = 1 – 0,3 – 0,1 – 0,4 = 0,2

Далі для дискретної випадкової величини користуємось (7.1):

MX = –4*0,3 + 2*0,1 + 6*0,4 + 13*0,2 = 4

Приклад 2. Неперервну ВВ *X* задано щільністю розподілу:

$$f_X(x)=\begin{cases}a\sqrt{x+2}\,, & \text{при}\quad -2<x\le 7\\ 0\,, & \text{при інших}\quad x\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання *MX*.

Розв'язання. В Прикладі 2 попередньої теми було знайдено значення $a=\dfrac{1}{18}$ і $\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}dx=\int_{0}^{9}\sqrt{y}dy=18$. Тоді, аналогічно, за (7.2.1)

$$MX=\int_a^b xf_X(x)dx=\frac{1}{18}\int_{-2}^{7}x\sqrt{x+2}dx=\left|\begin{matrix}y=x+2\Rightarrow x=y-2\\ dy=dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{18}\int_0^9(y-2)\sqrt{y}dy=\frac{61{,}2}{18}=3{,}4$$

оскільки $$\int_0^9 y\sqrt{y}dy = \int_0^9 y^{\frac{3}{2}}dy = \left.\frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=9} = \left.\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right|_{y=0}^{y=9} = \frac{2}{5}(9^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}) = \frac{2}{5}\cdot 243 = \frac{486}{5} = 97{,}2\,,$$

і $$\int_0^9 (y-2)\sqrt{y}dy = \underbrace{\int_0^9 y\sqrt{y}dy}_{97{,}2} - 2\underbrace{\int_0^9 \sqrt{y}dy}_{18} = 97{,}2 - 2\cdot 18 = 61{,}2\,.$$

7.2. Дисперсія

Математичне сподівання дає мало інформації про випадкову величину – як середня температура по лікарні. Тому розглядають і інші характеристики.

Означення 2. Дисперсія[18] випадкової величини X позначається DX і дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX:

$$DX = M\left(X - MX\right)^2\,. \tag{7.4}$$

а) для **дискретної** випадкової величини X, заданою рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$DX = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - MX\right)^2 p_i\,. \tag{7.5}$$

б) для **неперервної** випадкової величини X, заданою щільністю $f_X(x)$,

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - MX\right)^2 f_X(x)dx\,. \tag{7.6}$$

б.1) якщо ж **всі можливі** значення неперервної випадкової величини X належать **лише** інтервалу $(a;\, b)$, то

$$DX = \int_a^b\left(x - MX\right)^2 f_X(x)dx\,. \tag{7.6.1}$$

[18] Від грецького слова “*розсіювання*”.

На практиці і для дискретних, і для неперервних випадкових величин **важливою** для обчислень дисперсії є така **формула**:

$$\boxed{DX = MX^2 - (MX)^2} \tag{7.7}$$

● Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно її середнього значення.

Властивості дисперсії

1. $DX \geq 0$; $DX = 0$, тоді і лише тоді, коли $X = Const$.
2. $D(CX) = C^2 \cdot DX$, де C – $Const$.
3. $D(X \pm C) = DX$, де C – $Const$.
4. $D(X \pm Y) = DX + DY$.

Дисперсія має розмірність квадрату одиниць виміру випадкової величини *X*, що незручно. Тому, особливо в практичних задачах, часто використовують наступну числову характеристику.

Означення 3. Середнім квадратичним[19] відхиленням (або стандартним відхиленням) випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії випадкової величини X:

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX} \; ^{20} \tag{7.8}$$

Приклад 3. Знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X з Прикладу 1.

Розв'язання. Знайдемо двома способами. За формулою (7.4) отримуємо:

$$DX = M(X - MX)^2 = (-4-4)^2 \cdot 0{,}3 + (2-4)^2 \cdot 0{,}1 + (6-4)^2 \cdot 0{,}4 + (13-4)^2 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 64 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 81 \cdot 0{,}2 = 37{,}4$$

За формулою (7.7) отримуємо:

$$MX^2 = (-4)^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}4 + 13^2 \cdot 0{,}2 = 16 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}4 + 169 \cdot 0{,}2 = 53{,}4;$$

[19] Або одним словом – "середньоквадратичним".
[20] σ – грецька буква, вимовляється *сігма*.

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 53{,}4 - 4^2 = 53{,}4 - 16 = 37{,}4\,.$$

Значення звичайно ж співпали. Знайдемо $\sigma(X)$:

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{37{,}4} \approx 6{,}1\,.$$

Приклад 4. Знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X з Прикладу 2.

Розв'язання. Знайдемо за формулою (7.7). Використовуючи (7.3) :

$$MX^2 = \int_a^b x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{18}\int_{-2}^{7} x^2\sqrt{x+2}\,dx = \left|\begin{matrix} y = x+2 \\ dy = dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{18}\int_0^9 (y-2)^2\sqrt{y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^9 (y^2 - 2y + 1)\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{18}\left(\underbrace{\int_0^9 y^2\sqrt{y}\,dy}_{624{,}86} - 2\underbrace{\int_0^9 y\sqrt{y}\,dy}_{97{,}2} + \underbrace{\int_0^9 \sqrt{y}\,dy}_{18}\right) = \frac{1}{18}\cdot 448{,}46 \approx 24{,}91\,,$$

оскільки

$$\int_0^9 y^2\sqrt{y}\,dy = \int_0^9 y^{\frac{5}{2}}dy = \left.\frac{y^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=9} = \left.\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right|_{y=0}^{y=9} = \frac{2}{7}(9^{\frac{7}{2}} - 0^{\frac{7}{2}}) = \frac{2}{7}\cdot 2187 = \frac{4374}{7} \approx 624{,}86\,.$$

Тоді дисперсія $DX = MX^2 - (MX)^2 = 24{,}91 - (3{,}4)^2 = 24{,}91 - 11{,}56 = 13{,}35$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{13{,}35} \approx 3{,}65$.

* **Означення 4.** Для довільної неперервної випадкової величини X можна розглянути випадкову величину

$$Z = \frac{X - MX}{\sigma(X)}\,, \tag{7.9}$$

яку називають стандартною випадковою величиною[21]. Про перехід від випадкової величини X до випадкової величини Z говорять "перейти в Z-шкалу". Цей прийом часто використовують в практичних задачах контролю якості, надійності тощо, де варто очікувати, що спостерігаємо реалізацію випадкової величини, розподіленої за нормальним законом розподілу. Цю випадкову величину Z теж вважають нормально розподіленою (див. Тему 8).

[21] Тому що у всіх таких випадкових величин однакові – стандартні – $MZ = 0$, $DZ = 1$.

* 7.3. Початкові та центральні моменти. Асиметрія. Ексцес

Узагальненням понять математичного сподівання і дисперсія є такі числові характеристики випадкових величин.

Означення 5. [Початковим] моментом[22] k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го порядку випадкової величини X:

$$\nu_k = \nu_k(X) = M\left(X^k\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx. \tag{7.10}$$

Означення 6. Центральним моментом[23] k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го порядку відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX:

$$\mu_k = \mu_k(X) = M(X - MX)^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k f_X(x)dx. \tag{7.11}$$

Зауваження 1. Для дискретних випадкових величин і неперервних випадкових величин, зосереджених лише на $(a;b)$, для обох типів моментів мають місце простіші формули, аналогічні формулам для MX, DX:

$$\nu_k = \int\limits_a^b x^k f_X(x)dx,$$

$$\mu_k = \int\limits_a^b (x - MX)^k f_X(x)dx.$$

Означення 5. Коефіцієнт асиметрії або просто асиметрія випадкової величини X це число

$$As = As_X = As(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}. \tag{7.12}$$

- Це безрозмірна величина – тому це справді "коефіцієнт".

[22] Позначається грецькою буквою ν, яка вимовляється *ню*.
[23] Позначається грецькою буквою μ, яка вимовляється *мю*.

Зауваження 2. Асиметрія характеризує те, наскільки симетрично випадкова величина X розподілена відносно свого середнього значення MX:

якщо $As = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно свого математичного сподівання MX;

якщо $As > 0$, то випадкова величина X несиметрично розподілена відносно свого середнього значення MX, а далеко відхиляється від MX в додатній бік набагато частіше, ніж далеко відхиляється від MX у від'ємний бік.

Означення 6. Коефіцієнт ексцесу або просто ексцес випадкової величини X це величина, що позначається і обчислюється так:

$$Es = Es_X = Es(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3. \tag{7.13}$$

● Це теж безрозмірна величина – тому теж справді "коефіцієнт".

Зауваження 3. Ексцес характеризує плосковершинність або гостровершинність кривої розподілу (тобто графіку щільності) випадкової величини X, порівняно з кривою розподілу стандартної нормально розподіленої випадкової величини (див. Тему 8):

якщо $Es = 0$, то випадкова величина X має дзвіноподібну криву розподілу, таку, як у кривої розподілу стандартної нормальної випадкової величини (див. Тему 8);

якщо $Es > 0$, то випадкова величина X має гостровершинну криву розподілу – набагато частіше приймає значення, близькі до свого середнього значення MX, ніж значення, що помітно відрізняються від MX.

Зауваження 4. У стандартної випадкової величини відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4(X)}$ дорівнює 3, тому в правій частині формули (7.13) віднімається 3 – щоб для такої випадкової величини значення ексцесу дорівнювало 0 і саме з кривою розподілу стандартної випадкової величини можна було б порівнювати задану.

7.4. Мода. Медіана

Означення 7. М о д а дискретної випадкової величини – це те її значення, яке має найбільшу ймовірність появи. Для неперервної випадкової величини м о д а – це точка максимуму щільності. Позначається *Mo*.

Якщо розподіл має моду, він зветься модальним. Якщо існує єдина мода, то розподіл випадкової величини називається одномодальним (або унімодальним); якщо є дві моди, то розподіл випадкової величини називається двомодальним (або бімодальним); якщо є багато мод, то розподіл випадкової величини називається багатомодальним (або полімодальним). Іноді зустрічаються такі розподіли випадкових величин, що мають посередині не максимум, а мінімум. Такі розподіли називаються антимодальними.

Означення 8. М е д і а н а неперервної випадкової величини X – це таке її значення, яке поділяє навпіл розподіл випадкової величини X, тобто те значення Me, для якого

$$P(X < Me) = P(X > Me) = 0{,}5 .$$

● Для дискретних випадкової величини медіана, як правило, не вводиться.

Зауваження 5. Геометрично, медіана – це абсциса точки, в якій площа, що обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, ділиться навпіл.

Питання та задачі до теми

1. Що називають математичним сподіванням випадкової величини X?
2. Які основні властивості математичного сподівання? Поясніть їх.
3. Що таке дисперсія випадкової величини X і що вона характеризує?
4. Які формули знаходження дисперсії існують?
5. Що таке середнє квадратичне відхилення і через що воно вводиться?
6. Початкові і центральні моменти – що це? Аналогом чого вони є?
7. Що таке асиметрія випадкової величини X і яку інформацію вона несе?
8. Що таке ексцес випадкової величини X і про що він може свідчити?
9. Що таке мода та медіана випадкової величини X?

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана ряд розподілу:

X	1	2	3	4	5
P	0,15	0,1	0,35	p	0,25

Необхідно знайти: а) значення невідомої ймовірності p;

б) математичне сподівання MX, дисперсію DX;

в) ймовірності $P\{X<3\}$; $P\{1<X\le 4\}$; $P\{X\ge 2\}$.

Задача 2. Стрілець стріляє 3 рази. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,8. Для випадкової величини X = "число влучень" знайти математичне сподівання MX та дисперсію DX.

Задача 3. Серед 10 студентів 3 відмінника. Навмання обрали 3 студента. Для випадкової величини X = "число відмінників серед обраних студентів" знайти математичне сподівання MX та дисперсію DX.

Задача 4. Дискретна випадкова величина X може приймати лише два значення $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$, з ймовірностями p_1 та $p_2=1-p_1$ відповідно. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо: а) $p_1 = 0{,}5$, $MX = 3{,}5$, $DX = 0{,}25$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $MX = 5$; в) $p_1 = 0{,}2$, $MX = 4$, $Mo\,X = 5$.

Задача 5. Неперервну ВВ X задано щільністю:

$$f_X(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x+1}, & \text{при } -1<x\le 7 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

Знайти величину a, функцію розподілу $F_X(x)$, математичне сподівання MX, дисперсію DX та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Задача 6. Неперервну ВВ X задано щільністю:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0 \text{ і } x>2 \\ \dfrac{3}{4}x(2-x), & \text{при } 0<x\le 2 \end{cases}.$$

Обчислити MX, DX, $\sigma(X)$, $As(X)$, $Es(X)$.

Задача 7. Знайти Mo та Me для випадкової величини X з Прикладу 2.

Задача 8. Неважко зрозуміти, що $\nu_1 = MX$; $\mu_2 = DX$. Але при цьому $\mu_1 \ne \sigma(X)$! А чому ж дорівнює μ_1?

Тема 8. Закони розподілу неперервних випадкових величин. Твірні та характеристичні функції

8.1. Рівномірний розподіл

Означення 3. Рівномірним на відрізку $[a;\, b]$ називається розподіл такої неперервної випадкової величини X, всі значення якої лежать на відрізку (або інтервалі)[24] $[a;\, b]$ і щільність якої всюди на $[a;\, b]$ однакова.

● Позначають $X \sim \mathrm{U}(a;\, b)$.

Отже, щільність та функція розподілу такої випадкової величини

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } \; x \in [a;\, b] \\ 0 \quad , & \text{при } x > b \end{cases} \tag{8.1}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } \; x \in [a;\, b]. \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$MX = \frac{a+b}{2}; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}, \;\; \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{8.2}$$

8.2. Показниковий (експоненційний) розподіл

Означення 4. Неперервна випадкова величина X має показниковий (експоненційний) розподіл, якщо її щільність має вигляд (для $\lambda > 0$)[25]

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}. \tag{8.3}$$

Константа λ називається параметром показникового розподілу.

● Позначають $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$.

Функція розподілу: $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}.$$

---

[24] Пригадаймо, що для неперервної випадкової величини включення чи ні окремої точки – несуттєве.

[25] λ – грецька буква, вимовляється *лямбда*.

Числові характеристики :

$$MX = \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{\lambda}; \quad DX = \int_0^{\infty} (x - MX)^2 f_X(x)dx = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (8.4)$$

Зауваження 1. В задачах часто потрібно оцінити невідомий параметр λ за відомими (знайденими) величинами $MX, DX, \sigma(X)$. Це зручно робити так:

$$\lambda = \frac{1}{MX} \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{1}{\sigma(X)}.$$

<u>* 8.3.1. Елементи теорії надійності</u>

Розглянемо певний елемент. Нехай він починає роботу в момент часу $t_0 = 0$, а в момент t відбувається відмова в його роботі. Позначимо через T неперервну випадкову величину – час безвідмовної роботи елементу, а через $\lambda > 0$ – інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу).

Означення 5. Функцією надійності *R(t)* називають функцію, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елементу протягом часу t :

$$R(t) = P(T > t).$$

Часто (як правило) тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, з функцією розподілу

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Означення 6. Показниковим законом надійності називають таку функцію надійності *R(t)*, яка відповідає показниковому розподілу безвідмовної роботи елемента протягом часу *t*:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \le t) = e^{-\lambda t}.$$

Приклад 1. Час безвідмовної роботи приладу задано щільністю $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$. Знайти $P\{$прилад працюватиме без відмов 100 годин$\}$.

Розв'язання. Щільність задає показниковий розподіл, тому маємо показниковий закон надійності $R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \le t) = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}02t}$. Тому шукана ймовірність дорівнює $R(100) = P(T > 100) = e^{-0{,}02\cdot 100} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}135$.

8.3. Нормальний розподіл

Нормальний закон розподілу відіграє найважливішу роль в теорії ймовірностей, він найчастіше зустрічається на практиці. Головна його особливість полягає в тому, що він є граничним законом, тобто таким законом, до якого часто наближаються інші закони розподілу при типових умовах.

Означення 7. Нормальний розподіл (або розподіл Гауса) – це розподіл випадкової величини *X*, щільність якої має вигляд

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} \tag{8.5}$$

● Позначають $X \sim N(a; \sigma^2)$. Входить два параметра: a та σ^2.

Функція розподілу :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

Числові характеристики[26] :

$$MX = a; \qquad DX = \sigma^2; \qquad \sigma(X) = \sigma. \tag{8.6}$$

Тобто параметри нормального закону a і σ^2 – це його математичне сподівання *MX* і дисперсія *DX* відповідно. Як параметри a і σ^2 впливають на вигляд нормального розподілу?

Означення 8. Графік щільності нормального розподілу (8.5) називається нормальною кривою (або кривою Гауса).

Ескіз графіка нормальної кривої наведено на рисунку 8.1 нижче. Це характерна дзвіноподібна крива. Вона симетрична відносно значення $x = a$, а її вершина має координати $\left(a; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, тому зміна параметру a призводить до зміщення нормальної кривої вправо чи вліво, а зміна параметру σ^2 призводить до її притискання або відтискання відносно осі OX.

[26] Їх можна знайти через характеристичну функцію, яка вводиться нижче. Це зроблено в кінці цієї теми (Приклад 4).

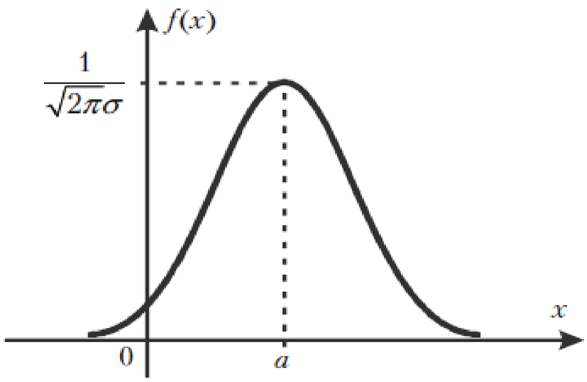


Рис. 8.1. Крива Гауса[27]

Означення 9. Якщо випадкова величина $X \sim \mathrm{N}(0;\,1)$, то вона називається стандартною нормальною. Тоді її щільністю $f_X(x)$ буде функція Гауса, а функцією розподілу $F_X(x)$ буде т.зв. розширена функція Лапласа[28]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,; \qquad F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{2} + \Phi(x)\,.$$

Зауваження 2. Для стандартної нормальної випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(0;\,1)$ має місце рівність $As = Es = Mo = Me = 0$. *А для ВВ* $X \sim N(a;\,\sigma^2)$?

Теорема 8.1. Для нормально розподіленої з параметрами a і σ^2 випадкової величини X (тобто $X \sim \mathrm{N}(a;\,\sigma^2)$)

$$P(b_1 < X < b_2) = \Phi\left(\frac{b_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b_1 - a}{\sigma}\right). \tag{8.7}$$

(тут $\Phi(x)$ – функція Лапласа)

Наслідок 1. Для стандартної нормальної випадкової величини (тобто для $X \sim \mathrm{N}(0;\,1)$) ймовірність потрапити в інтервал

$$\boxed{P(b_1 < X < b_2) = \Phi(b_2) - \Phi(b_1)\,.} \tag{8.7.1}$$

Далі, нехай випадкова величина $X \sim \mathrm{N}(a;\,\sigma^2)$. Тоді з формули (8.7)

$$P(|X - a| < \delta) = P(-\delta < X - a < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

[27] Крива Гауса визначена на $(-\infty;\,\infty)$, але при далеких від a значеннях вона дуже близька до осі OX.
[28] Від звичайної функції Лапласа відрізняється тим, що інтеграл починається від $-\infty$, а не від 0.

Наслідок 2. Отже, маємо такі ймовірності відхилитися від середнього

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right); \tag{8.8}$$

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(0;\, 1)$

$$P\left(|X|<\delta\right)=2\Phi(\delta). \tag{8.8.1}$$

Наслідок 3. “Правило трьох сигм” (“правило 3 σ”).

Підставимо в отриману формулу (8.8) значення $\delta = 3\sigma$. Будемо мати:

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$

$$P\left(|X-a|<3\sigma\right)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973; \tag{8.9}$$

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(0;\, 1)$

$$P\left(|X|<3\right)=2\Phi(3)=0{,}9973. \tag{8.9.1}$$

Тобто внаслідок проведення експерименту значення випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$ з ймовірністю понад 0,997 потрапить в проміжок $(a-3\sigma;\, a+3\sigma)$.

* 8.4. Твірні функції

Розглядаємо цілочислову випадкову величину X, що набуває цілих невід’ємних значень: $p_k = P\{X=k\},\ k=0,1,\ldots,n,\ldots$, причому $p_0+\ldots+p_n+\ldots = 1$.

Означення 10. Твірною функцією [розподілу] цілочислової випадкової величини X називається функція :

$$z_X(y)=My^X=\sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k = p_0 + yp_1 + y^2 p_2 + \ldots + y^n p_n + \ldots \tag{8.10}$$

де $y \in [-1;1]$ (точніше, $|y| \le 1$) – дійна або комплексна змінна.

● Може бути, що деякі (або багато) з p_k дорівнюють 0.

Властивості твірних функцій

1. $z_X(y)$ визначена в кожній точці відрізку [–1; 1].

2. При $y = 1$ $\quad z_X(y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

3. **Формула для знаходження ймовірностей** через твірні функції

$$z'_X(0) = \left(p_0 + yp_1 + y^2 p_2 + \ldots + y^n p_n + \ldots\right)'\Big|_{y=0} = p_1.$$

$$p_k = \frac{1}{k!} z_X^{(k)}(0), \qquad k = 0,1,\ldots,n,\ldots \tag{8.11}$$

4. **Формула для знаходження моментів** через твірні функції

$$z'_X(1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k\right)'\Bigg|_{y=1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} p_k\right)\Bigg|_{y=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = MX.$$

$$MX = z'_X(1); \qquad DX = z''_X(1) + z'_X(1) - \left(z'_X(1)\right)^2.$$

5. **Критерій незалежності випадкових величин.** Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні, то

$$z_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(y) = z_{X_1}(y) \cdot z_{X_2}(y) \cdot \ldots \cdot z_{X_n}(y).$$

Застосування твірних функцій

Приклад 1. Нехай $X \sim B(n, p)$. Її твірна функція дорівнює

$$z_X(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k = \sum_{k=0}^{n} y^k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (py)^k q^{n-k} = (py+q)^n.$$

Остання рівність – з формули біному Ньютона. Тоді за Властивістю 4

$$MX = z'_X(1) = \left((py+q)^n\right)'\Big|_{y=1} = np(py+q)^{n-1}\Big|_{y=1} = np(p+q)^{n-1} = np;$$

$$DX = np(n-1)p + np - (np)^2 = npq.$$

Приклад 2. Нехай $X \sim P(n, p)$. Її твірна функція дорівнює

$$z_X(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda y} = e^{\lambda(y-1)}.$$

Тут передостання рівність – з формули ряду Маклорена для показникової функції. Тоді за Властивістю 4

$$MX = z'_X(1) = \left(e^{\lambda(y-1)}\right)'\Big|_{y=1} = \lambda e^{\lambda(y-1)}\Big|_{y=1} = \lambda$$

$$DX = z''_X(1) + z'_X(1) - \left(z'_X(1)\right)^2 = \lambda^2 e^{\lambda(y-1)}\Big|_{y=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

* 8.5. Характеристичні функції

Розглядаємо неперервну випадкову величину X, тобто зі щільністю $f_X(x)$.

Означення 11. Характеристичною функцією неперервної випадкової величини X називається функція

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx , \qquad (8.12)$$

де $t \in (-\infty; +\infty)$, а число i – уявна одиниця, тобто таке число, що $i^2 = -1$.

Для **дискретної** (не обов'язково цілочислової) випадкової величини X:

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \sum_{i=1}^{n} e^{itx_i} p_i . \qquad (8.12.1)$$

Властивості характеристичних функцій

1. $\varphi_X(t)$ визначена і неперервна в кожній точці;

2. $\varphi_X(0) = Me^0 = M1 = 1$; $\quad |\varphi_X(t)| \le 1$ при $t \in (-\infty; +\infty)$.

3. **Формула для знаходження моментів** через характеристичні функції.

$$\varphi'_X(0) = \left(Me^{itX}\right)'\Big|_{t=0} = M\left(iXe^{itX}\right)\Big|_{t=0} = M(iX) = iMX .$$

$$MX = \frac{1}{i}\varphi'_X(0); \qquad DX = -\varphi''_X(0) + \left(\varphi'_X(0)\right)^2; \qquad MX^n = \frac{1}{i^n}\varphi_X^{(n)}(0). \qquad (8.13)$$

4. Якщо випадкова величина $Y = aX + b$, де a, b – константи, причому випадкова величина X має характеристичну функцію $\varphi_X(t)$, то характеристична функція випадкової величини Y дорівнює:

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

5. **Критерій незалежності випадкових величин.** Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні, то

$$\varphi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

6. Зв'язок між характеристичною функцією $\varphi_X(t)$ випадкової величини X і її щільністю розподілу $f_X(x)$:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Застосування характеристичних функцій

Приклад 3. Розглянемо випадкову величину X ~ N(0; 1). Знайдемо її характеристичну функцію і, через неї, числові характеристики:

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ dy = \dfrac{dx}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2}ity-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2}ity-y^2+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{t^2}{2}} dy = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2} dy = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ми виділили повний квадрат в показнику і використали формулу

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Тоді за Властивістю 3 характеристичних функцій

$$MX = \frac{1}{i}\varphi'_X(0) = \frac{1}{i} \cdot \left(-te^{-\frac{t^2}{2}} \right)\Bigg|_{t=0} = 0;$$

$$DX = -\varphi''_X(0) + \left(\varphi'_X(0)\right)^2 = -\left(-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \right)\Bigg|_{t=0} + 0 = 1.$$

Приклад 4. Нехай ВВ $X \sim \mathrm{N}(a;\sigma^2)$. Знайти її характеристичну функцію.

Розв'язання. Для цього розглянемо відповідну стандартну нормальну ВВ $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$. ВВ $Y \sim \mathrm{N}(0; 1)$, тобто її характеристична функція $\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, а з іншого боку маємо $X = \sigma Y + a$, тоді за Властивістю 4

$$\varphi_X(t) = e^{ita}\varphi_Y(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \tag{8.14}$$

Наслідок 4. **Критерій перевірки нормальності випадкової величини**

Формулу (8.14) використовують в теорії для перевірки того, чи є деяка випадкова величина розподіленою нормально і з якими саме параметрами.

Зауваження 3. Але на практиці для перевірки того, чи "схожа" деяка випадкова величина на нормальну, перевіряють чи для неї $As = Es = 0$.

Питання та задачі до теми

1. Наведіть приклад з життя випадкової величини, яку можна вважати розподіленої за рівномірним неперервним законом розподілу.
2. Скільки параметрів у показникового закону розподілу? В якому вигляді вони входять у щільність та у функцію розподілу?
3. Сформулюйте, яку випадкову величину називають розподіленою за нормальним законом розподілу. Наведіть приклади.
4. Як параметри нормального закону впливають на криву розподілу?
5. Чому дорівнюють As, Es, Mo, Me для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\sigma^2)$?
6. Про що йде мова в правилі трьох сигм?

Задача 1. Розглянути випадкову величину $X \sim \mathrm{G}(0{,}4)$. Знайти її твірну функцію та, з її допомогою, числові характеристики MX і DX.

Задача 2. Для випадкової величини, розподіленої за вказаним законом розподілу, знайти а) MX і DX; б) $P(1 \le X \le 3)$; в) Mo, Me; г)* As, Es.

1) $X \sim \mathrm{U}(1; 5)$; 2) $X \sim \mathrm{E}(2)$; 3) $X \sim \Pi(100; 0{,}1)$; 4) $X \sim \mathrm{N}(0; 1)$; 5) $X \sim \mathrm{N}(1; 4)$.

Тема 9. Закони розподілу, пов'язані з нормальним. Граничні теореми теорії ймовірностей

* 9.1. Гамма-функція. Гамма-розподіл

Означення 1. Гамма–функція[29] – це інтеграл від параметру α :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx . \tag{9.1}$$

Властивості гамма-функції

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4) Якщо α кратне 1/2, то значення $\Gamma(\alpha)$ можна обчислити:

4.1) Якщо n – ціле додатне число, то

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \tag{9.1.1}$$

4.2) Якщо $\alpha = n + 1/2$, де n – ціле додатне число, то

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}. \tag{9.1.2}$$

Приклад 1. Виведемо формулу (9.1.2) з властивостей 2) і 3). Спочатку

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} ;$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

В загальному випадку, для $\alpha = n + 1/2$, де n – ціле додатне число:

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\underbrace{n-\frac{1}{2}}_{\alpha-1}+1\right) = (\alpha-1)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = (\alpha-1)\Gamma\left(\underbrace{n-\frac{3}{2}}_{\alpha-2}+1\right) =$$

$$= (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \underset{\substack{\text{продовжуємо, доки} \\ \text{аргумент гамма-функції} \\ \text{стане рівним } 1/2}}{\cdots} = (\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

---

[29] Або інтеграл Ейлера II роду.

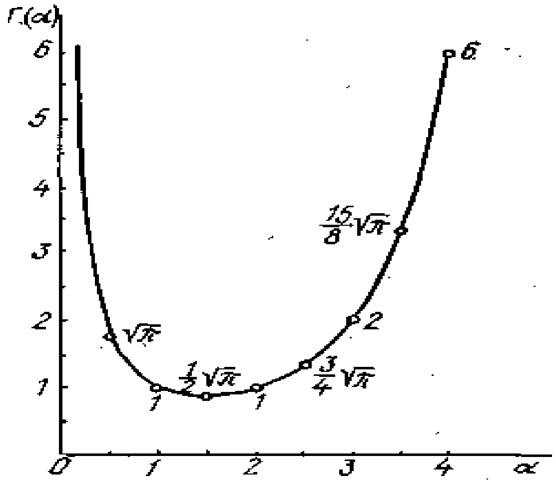


Рис 9.1. Графік гамма-функції[30]

Означення 2. Неперервна випадкова величини X має г а м м а - р о з п о д і л , якщо її щільність ($\alpha > 0, \lambda > 0$)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad x < 0 \\ Cx^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,, & \text{при} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

● Позначають $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

Константа C в означенні знаходиться з умови нормування (6.4):

$$C = \frac{1}{\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}.$$

Звідки: при $\alpha = 1$ константа $C = 1/\lambda$; при $\alpha = 2$ константа $C = 1/\lambda^2$.

Функція розподілу гамма-розподілу $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad x < 0 \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}dy\,, & \text{при} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Числові характеристики гамма-розподілу $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$MX = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$$

Зауваження 1. При $\alpha = 1$ гамма-розподіл стає показниковим розподілом з параметром λ : $\Gamma(1, \lambda) = E(\lambda)$.

[30] Для $\alpha > 0$

9.2. Розподіл хі-квадрат (Пірсона)

Означення 3. Нехай є k незалежних випадкових величин $Y_1,\ldots,Y_k$, кожна з яких розподілена нормально з параметрами 0 і 1. Тоді випадкова величина

$$X = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2 \tag{9.2}$$

має розподіл[31] χ^2 (або Пірсона) з k степенями свободи (вільності).

- Позначають $X \sim \chi^2(k)$ або $X \sim \chi_k^2$.
- Розподіл $\chi^2(k)$ має один параметр k – числа степенів свободи.

Зауваження 2. Число степенів свободи k є абстрактним поняттям, що визначає в даному випадку умови незалежності величин Y_i. Наявність будь-якої залежності між випадковими величинами Y_i зменшує число степенів свободи *k*. Якщо випадкові величини Y_i пов'язані одним лінійним співвідношенням, наприклад, $\sum_{i=1}^{k} Y_i = n\overline{Y}$, то число степенів свободи зменшиться на одиницю: $k-1$.

Щільність розподілу випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$ та її графік :

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{якщо} \quad x \ge 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \end{cases}.$$

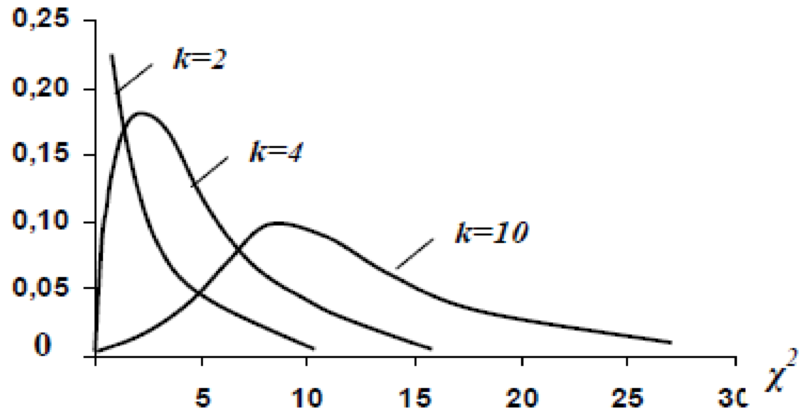


Рис. 9.2. Крива розподілу $\chi^2(k)$ для різного числа степенів свободи k

---

[31] Вимовляють: χ^2 – *хі-квадрат*.

Константа C в означенні щільності знаходиться з умови нормування (6.4):

$$C=\frac{1}{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx}=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Функція розподілу випадкової величини $X\sim\ \chi^2(k)$ має вигляд :

$$F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f_X(y)dy=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^x y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dy, & \text{якщо}\quad x\ge 0\\ 0, & \text{якщо}\quad x<0\end{cases}.$$

Числові характеристики випадкової величини $X\sim\ \chi^2(k)$:

$$MX=k,\quad DX=2k,\quad \sigma(X)=\sqrt{2k}. \tag{9.3}$$

Зауваження 3. Із збільшенням числа степенів свободи розподіл $\chi^2(k)$ наближається до нормального N(k; $2k$). При k > 30 практично не відрізняється.

Зауваження 4. При n = 2, тобто для випадкової величини $X=Y_1^2+Y_2^2$, де незалежні випадкові величини Y_1, Y_2 ~ N(0; 1), отримуємо показниковий розподіл з параметром λ = 1/2, тобто $\chi^2(2)=\mathrm{E}(0{,}5)$.

Означення 4. α - к в а н т и л ь р о з п о д і л у $\chi^2(k)$ (або квантиль рівня α) – це таке значення $\chi^2_{\alpha,k}$, що для випадкової величини $X\sim\ \chi^2(k)$

$$P(X\le\chi^2_{\alpha,k})=\int\limits_0^{\chi^2_{\alpha,k}}f_X(y)dy=\alpha \tag{9.4}$$

Геометрично, α-квантиль $\chi^2_{\alpha,k}$ – це таке значення x, для якого площа заштрихованої криволінійної трапеції (“хвіст” розподілу) дорівнює $1-\alpha$.

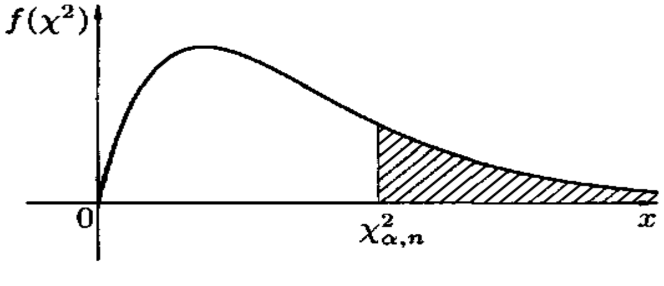


Рис. 9.3. Геометрична інтерпретація α – квантиля розподілу хі-квадрат

● Квантилі розподілу $\chi^2(k)$ залежать від 2 параметрів – рівня значущості α і числа степенів свободи k; ці квантилі є табульованими (див. Таблицю 3).

9.3. Розподіл Стьюдента

Означення 5. Розглянемо $k + 1$ незалежну випадкову величину $Y_0,\dots,Y_k$, розподілених нормально з параметрами 0 і 1. Тоді випадкова величина

$$X = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2}} = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2(k)}} \tag{9.5}$$

має розподіл Стьюдента (або t–розподіл) з k степенями свободи.

● Позначають $X \sim t(k)$ (або $X \sim T(k)$) .

● Розподіл $t(k)$ залежить від параметра k – числа степенів свободи.

Щільність розподілу випадкової величини $X \sim t(k)$ та її графік :

$$f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

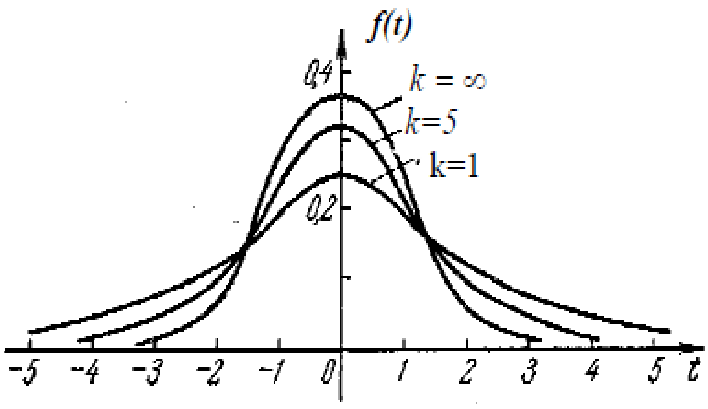


Рис. 9.4. Крива розподілу Стьюдента при різних k

Функція розподілу випадкової величини $X \sim t(k)$ має вигляд :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(y)dy = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t}\left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dy .$$

Числові характеристики випадкової величини $X \sim t(k)$:

$$MX = 0,\ DX = \frac{k}{k-2},\ \sigma(X) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}. \qquad (9.6)$$

Зауваження 5. Із збільшенням числа степенів свободи розподіл $t(k)$ наближається до нормального N(0; 1). При k >30 практично не відрізняється.

Означення 6. α – квантиль (або квантиль рівня α) розподілу Стьюдента – це таке значення $t_{\alpha,k}$, що для випадкової величини $X \sim t(k)$

$$P(X < t_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t)dt = \alpha. \qquad (9.7)$$

● Розподіл Стьюдента симетричний відносно 0, тому

$$P(X < t_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t)dt = \alpha = \int_{-t_{\alpha,k}}^{\infty} f_X(t)dt = 1 - P(X < -t_{\alpha,k}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad P(X < -t_{\alpha,k}) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad -t_{\alpha,k}$ це $(1-\alpha)$-квантиль.

Отже квантилі розподілу Стьюдента мають таку властивість симетрії:

$$t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}\ . \qquad (9.7.1)$$

Зауваження 6. Використовуючи (9.7.1) для розподілу Стьюдента часто розглядають двосторонні α-квантилі : таке додатне **значення** t, що дорівнює **квантилю** $t_{1-\frac{\alpha}{2},k} = -t_{\frac{\alpha}{2},k}$, що для $X \sim t(k)$ ймовірність того, що X за модулем перевищить це значення, дорівнює α :

$$P(|X| > t) = P\left(|X| > t_{1-\frac{\alpha}{2},k}\right) = \int_{-\infty}^{-t_{\frac{\alpha}{2},k}} f_X(t)dt + \int_{t_{1-\frac{\alpha}{2},k}}^{\infty} f_X(t)dt = 2\int_{t_{\frac{\alpha}{2},k}}^{\infty} f_X(t)dt = \alpha$$

та односторонні (лівий і правий) α-квантилі – таке додатне **значення** t, що дорівнює **квантилю** $t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}$, що:

$$P(X < -t_{\alpha,k}) = \int_{-\infty}^{-t_{\alpha,k}} f_X(t)dt = \alpha \qquad \text{або} \qquad P(X > t_{1-\alpha,k}) = \int_{t_{1-\alpha,k}}^{\infty} f_X(t)dt = \alpha.$$

Геометрично, квантилі $t_{\alpha/2,k}$ – це таке додатне значення t, для якого площа кожної заштрихованої на рисунку фігури (“хвости” розподілу) дорівнює $\alpha/2$ (а сума заштрихованих площ дорівнює α). Правий (лівий) квантиль $t_{1-\alpha,k}$ $(-t_{\alpha,k})$ – таке значення t, що площа правого (лівого) “хвоста” розподілу дорівнює α.

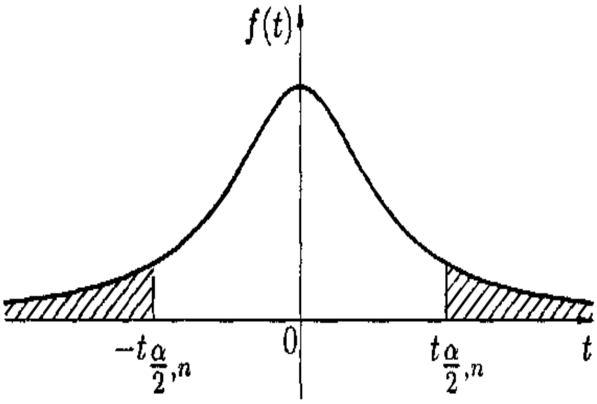


Рис. 9.5. Геометрична інтерпретація квантилів розподілу Стьюдента

● Квантилі розподілу $t(k)$ залежать від 2 параметрів – рівня значущості α і числа степенів свободи k ; ці квантилі є табульованими (див. Таблицю 4).

Зауваження 7. Для стандартного нормального розподілу N(0, 1) поняття $\alpha-$квантилю u_α вводять аналогічно (9.7), і в силу симетрії нормального розподілу також, як правило, розглядають двосторонні α-квантилі, які позначають $\pm u_\alpha$ і знаходять за таблицею функції Лапласа з рівності:

$$P(|X| > u_\alpha) = 2\int_{u_\alpha}^{\infty} f_X(y)dy = \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi(u_\alpha) = \int_0^{u_\alpha} f_X(y)dy = \frac{1-\alpha}{2}} \qquad (9.8)$$

9.4. Граничні теореми

Ці теореми поділяються на дві великі групи теорем: результати типу “закону великих чисел” та результати типу “центральної граничної теореми”.

9.4.1. Результати типу закону великих чисел

Теорія ймовірностей і математична статистика базуються на тому, що на практиці при спостереженні багатьох випадкових дослідів за певних умов простежуються певні закономірності. Теореми, пов'язані з дослідженням цих умов і закономірностей, об'єднують під назвою закон великих чисел (ЗВЧ).

Нерівність Чебишева

Якщо випадкова величина X має обмежені математичне сподівання MX і дисперсію DX, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\{|X - MX| \ge \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (9.9)$$

Приклад 2. Для $X \sim N(a;\ \sigma^2)$ порівняємо оцінку відхилення від MX за нерівністю Чебишева з оцінкою за правилом трьох сигм. Запишемо нерівність Чебишева в формі ймовірності протилежної події:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (9.9.1)$$

Нехай $\varepsilon = 3\sigma$, тоді за нерівністю Чебишева (для $X \sim N(a;\ \sigma^2)$)

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} \ge 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89.$$

За правилом 3σ $P\{|X - a| < 3\sigma\} = 0{,}9973.$ Для нормального закону правило 3σ точніше. Але для інших законів нерівність Чебишева відіграє важливу роль.

Приклад 3. Середньоквадратичне відхилення помилки вимірювання курсу літака дорівнює 2°. Вважаючи математичне сподівання помилки рівним нулю, оцінити ймовірність того, що помилка при даному вимірюванні буде

а) менше 5°; б) від 3° до 6° .

Розв'язання. а) За умовою маємо: $MX = 0$, $DX = 4$, $\varepsilon = 5$.

Тоді за нерівністю Чебишева $P\{|X| \le 5\} \ge 1 - \frac{4}{5^2} = 0{,}84.$

б) За нерівністю Чебишева, з одного боку: $P\{|X| \le 6\} \ge 1 - \frac{4}{6^2} = 0{,}89$;

з іншого боку $P\{|X| \le 3\} \ge 1 - \frac{4}{3^2} = 0{,}56$.

Тому можемо оцінити шукану ймовірність:

$$P\{3 \le |X| \le 6\} = P\{|X| \le 6\} - P\{|X| \le 3\} = 0{,}89 - 0{,}56 \approx 0{,}33.$$

Теорема 10.1. Закон великих чисел в формі Чебишева

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$– незалежні, мають однакові $MX = a$ і обмежені DX_i. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема 10.2. Закон великих чисел в формі Маркова

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно незалежні, а їх дисперсії задовольняють умові $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = 0.$ Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - MX_i\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

***Теорема 10.3. Посилений закон великих чисел в формі Колмогорова**

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – незалежні, мають скінченні MX_i та DX_i. Якщо $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{DX_i}{i^2} < \infty$, то

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - MX_i\right) = 0\right\} = 1.$$

***Теорема 10.4. Посилений закон великих чисел в формі Бореля**

Нехай маємо n незалежних експериментів за схемою Бернуллі, ймовірність "успіху" дорівнює p. Нехай випадкова величина X_n – це число "успіхів" з n експериментів. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_{k\geq n}\left|\frac{X_k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Еквівалентна форма твердження теореми: $P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = p\right\} = 1.$

9.4.2. Результати типу центральної граничної теореми

Головна особливість нормального закону розподілу полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при умовах, що дуже часто зустрічаються. Це твердження центральної граничної теореми (ЦГТ). ЦГТ доводить, що сума досить великого числа незалежних (або слабко залежних) випадкових величин, (при деяких нежорстких обмеженнях) приблизно підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більша кількість випадкових величин додається. Більшість випадкових величин, що зустрічаються на практиці (наприклад, помилки вимірювань) можуть бути представлені як суми великої кількості порівняно малих складових – елементарних помилок, кожна з яких викликана дією окремої причини, що не залежить від інших.

Теорема 10.5. (Центральна гранична теорема в формі Ляпунова)

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні, однаково розподілені, мають однакові скінченні $MX = a$ і $DX = \sigma^2$. Тоді при $n \to \infty$ закон розподілу нормованої центрованої випадкової величини

$$X^H = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sqrt{n}\sigma}$$

прямує до нормального з параметрами 0 і 1 :

$$X^H \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(0;1). \tag{9.10}$$

● Випадкову величину X^H називають асимптотично нормальною.

Наслідок ЦГТ. Якщо незалежні випадкові величини $X_1, \ldots, X_n$ однаково розподілені і мають однакові $MX = a$ і $DX = \sigma^2$, то при $n \to \infty$ закон розподілу суми випадкових величин $X_1, \ldots, X_n$, тобто випадкової величини $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, прямує до нормального закону з параметрами $MS_n = na$ і $DS_n = n\sigma^2$:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(na; n\sigma^2). \tag{9.11}$$

● Таким чином, нормальний розподіл виникає тоді, коли є сума багатьох незалежних (або слабо залежних) випадкових величин, порівняних за ступенем свого впливу на розсіювання суми.

На практиці таки випадки зустрічаються дуже часто: похибки виміру параметрів, помилки спостереження розподілені за нормальним (або близьким до нормального) законом; такі помилки можуть бути представлені у вигляді суми багатьох елементарних помилок, кожна з яких пов'язана з окремою, практично незалежно від інших причиною.

● При додаванні величин з однаковим законом розподілу закон розподілу суми можна вважати нормальним, якщо $n > 10$. Однак, практично можна використати центральну граничну теорему і при кількості доданків менше 10.

Приклад 4. Нехай маємо 100 незалежних випадкових величин $X_i \sim$ U(0; 12). Який наближений закон для їх суми $Y = X_1 + \ldots + X_{100}$?

Розв'язання. Оскільки всі сто $X_i \sim$ U(0; 12), то за формулою (8.1)

$$MX = \frac{a+b}{2} = \frac{12+0}{2} = 6; \quad DX = \frac{(12-0)^2}{12} = 12,$$

а за Наслідком ЦГТ (9.11) $Y = X_1 + \ldots + X_{100} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(nMX;\, nDX)$, тобто

$$Y = X_1 + \ldots + X_{100} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(600;\, 1200).$$

Зауваження 9. Теореми Муавра-Лапласа і Пуассона (див. Тему 4) – окремі випадки застосування ЦГТ.

Питання та задачі до теми

1. За яких умов виникає розподіл хі-квадрат?
2. Що таке квантиль розподілу? В чому його геометричний сенс?
3. За яких умов виникає розподіл Стьюдента?
4. В чому сенс тверджень типу закону великих чисел?
5. В чому полягає твердження центральної граничної теореми?

Задада1. Нехай маємо 60 незалежних випадкових величин а) $X_i \sim$ B(20; 0,35); б) $X_i \sim$ П(40; 0,02). Який наближений закон для їх суми $Y = X_1 + \ldots + X_{60}$?

ЧАСТИНА ІІ. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Тема 1. Основні поняття математичної статистики

1.1. Базові означення математичної статистики

Математичною статистикою називається наука, яка займається розробкою методів відбору, опису і аналізу експериментальних даних з метою вивчення закономірностей випадкових масових явищ. Встановлення цих закономірностей, в свою чергу, базується на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних – результатів досліду або спостережень.

Інакше кажучи, математична статистика – це наука, що займається систематизацією, обробкою та використанням статистичних даних для наукових і практичних досліджень. Як відомо з попереднього матеріалу, для того, щоб зробити певні висновки (методами теорії ймовірностей) стосовно деякої випадкової величини, потрібно знати її функцію розподілу та її числові характеристики. Зрозуміло, що на практиці ця інформація є невідомою, тож її отримують саме методами математичної статистики.

В основі математичної статистики лежить вибірковий метод, згідно з яким за характеристиками частини загальної сукупності об’єктів (вибірки), робляться висновки про характеристики всієї сукупності.

Означення 1. Генеральна сукупність – задана/вихідна сукупність об’єктів однієї природи; множина значень спостережуваної випадкової величини X (зріст людини; брак/якість деталі).

Означення 2. Вибірка (вибіркова сукупність) – сукупність як правило випадково відібраних з генеральної сукупності об’єктів однієї природи, при дослідженні деякої якісної (брак чи стандарт) або кількісної (вага, довжина, площа) ознаки.

З означення випливає, що методи математичної статистики застосовуються при дослідженні деякої якісної/кількісної ознаки, тому при такому дослідженні є необхідною підготовча робота – проведення статистичного спостереження: вивчення/вимірювання наявних об'єктів однієї природи щодо досліджуваної якісної/кількісної ознаки.

Статистичні спостереження бувають

– суцільними: досліджуються **всі** об'єкти генеральної сукупності

– вибірковими: досліджується лише **вибірка** з генеральної сукупності; за результатами дослідження робиться висновок про властивості всієї генеральної сукупності.

Означення 3. Обсяг (або об'єм) сукупності – це кількість об'єктів в сукупності. Обсяг генеральної сукупності, як правило, позначається літерою N, а обсяг вибірки позначається літерою n.

1.2. Способи формування вибірки

Існує 2 способи формування вибірки: випадковий і невипадковий (наприклад, серійний – кожен десятий). На практиці зазвичай застосовують випадковий спосіб. Він може бути відбором з поверненням або без повернення. На практиці як провило використовують відбір без повернення.

Означення 4. Повторна вибірка – це вибірка, в якій відібраний об'єкт перед вибором наступного повертається в генеральну сукупність.

Означення 5. Безповторна вибірка – це вибірка, в якій відібраний об'єкт перед вибором наступного не повертається в генеральну сукупність. Цей спосіб – те ж саме, що і одразу вибирати всю вибірку.

Теоретично – є відмінності: при безповторному відборі кожного разу змінюється генеральна сукупність і ймовірності (наприклад витягти брак або стандарт); але якщо об'єм генеральної сукупності достатньо великий, а об'єм вибірки – малий (порівняно з об'ємом генеральної сукупності), то цими відмінностями нехтують.

На практиці для уникнення можливих складностей використовують вибірку, об’єм якої становить менше 10% об’єму генеральної сукупності:

$$n \le \frac{N}{10}.$$

Інформація щодо генеральної сукупності, отримана на основі вивчення вибірки, буде випадковою величиною. Важливо, щоб вибірка була *репрезентативною*, тобто вибірка має правильно представляти пропорції генеральної сукупності.

Означення 6. Вибірку називають представницькою (репрезентативною), якщо її здійснюють випадково: кожен об’єкт генеральної сукупності має однакову ймовірність потрапити у вибірку і усі об’єкти вибірки вибрані випадково.

Способи утворення вибірки

1. Генеральна сукупність не ділиться на групи.

а) **простий випадковий безповторний відбір** (об’єкти генеральної сукупності нумерують і відбирають якусь частину, використовуючи генератор випадкових чисел, в якому випадкові числа не повторюються);

б) **простий випадковий повторний відбір** (так само, але номера, згенеровані генератором випадкових чисел, можуть повторюватись).

2. Генеральна сукупність ділиться на групи.

а) **типовий відбір** (наприклад при дослідженні однакових деталей, випущених на кількох станках, серед яких є старі і нові, всі деталі поділяють на два типа – продукція нових станків і продукція старих станків);

б) **механічний відбір** – всю генеральна сукупність "механічно" ділять на кілька груп, випадково обирають одну з цих груп і досліджують (наприклад, якщо вибірка складає 10% генеральної сукупності, то всі об’єкти ділять на 10 однакових груп і випадковим чином вибирають одну з них);

в) **серійний відбір** – генеральна сукупність розбивають на серії (наприклад, деталі, що були виготовлені на першому, другому, …, десятому станках) і роблять суцільне дослідження продукції з випадково обраних серій. Як правило, цей спосіб застосовують для однотипних станків (якщо станки всі – старі або всі – нові).

Вибір способу утворення вибірки робить дослідник виходячи з конкретної задачі і досвіду попередників.

На практиці часто зустрічаються комбіновані способи.

Питання та задачі до теми

1. Що називають математичною статистикою?
2. Який зв'язок між теорією ймовірностей і математичною статистикою?
3. В чому полягає ідея вибіркового методу? Що таке вибірка?
4. Які бувають статистичні спостереження та які їх переваги та недоліки?
5. Про які статистичні спостереження в реальному житті ви знаєте?
6. В чому відмінність між повторними та без повторними вибірками?
7. Які проблеми виникають при використанні без повторної вибірки і як їх мінімізують на практиці?
8. Яку вибірку називають репрезентативною? Як цього досягають на практиці?
9. Наведіть приклад нерепрезентативної вибірки. Які помилки були допущені при її формуванні?
10. Випадкове опитування по телефону – це репрезентативна вибірка?
11. Які способи утворення вибірок ви знаєте?
12. Висловіть свою думку про те, в яких практичних задачах виникають конкретні способи утворення вибірки.

Задача 1. Опишіть переваги і недоліки обох запропонованих методів проведення статистичного спостереження.

Задача 2. З партії в 1000 деталей відібрали для дослідження на якість 25 деталей. Описати генеральну сукупність та вибірку даного експерименту.

Тема 2. Статистичний розподіл вибірки

2.1. Варіаційний ряд. Таблиця частот

Нехай з генеральної сукупності обсягу N зроблено вибірку обсягу n. Відповідно позначимо

$$x_1, x_2, ..., x_n \tag{2.1}$$

– спостережені значення елементів вибірки (їх значення можуть повторюватися, наприклад, зріст n людей або якість/брак n деталей).

Означення 1. Ці значення називають вибірковими значеннями або варіантами[32].

Означення 2. Запишемо тепер **різні** значення з послідовності варіант (2.1) у **зростаючому** порядку – отримаємо варіаційний ряд:

$$x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(m)}, \quad m \le n. \tag{2.2}$$

Кількість елементів варіаційного ряду (2.2) може бути меншою за кількість значень з послідовності варіант (2.1) в силу того, що в (2.1) могли бути однакові варіанти, а в (2.2) – вони всі різні.

Зауваження 1. Елементи варіаційного ряду (2.2) часто записують в спрощеному вигляді (без дужок в індексах):

$$x_1, x_2, ..., x_m, \quad m \le n.$$

Як правило, плутанини з (2.1) не виникає, оскільки всюди в подальшому будемо працювати саме з (2.2), а не з (2.1).

Означення 3. Далі для кожної варіанти з (2.2) підрахуємо кількість спостережень в послідовності варіант (2.1) – будемо називати ці кількості абсолютними частотами (що відповідають i-ій варіанті x_i) та позначати n_i; та відносні частоти, які позначатимемо w_i і знаходитимемо так:

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

[32] Називний відмінок в однині: "варіанта".

Означення 4. Отримані числа запишемо в таблицю, яка буде називатися **статистичним розподілом вибірки** або **таблицею частот** або **емпіричним**[33] **законом розподілу**.

Варіанта x_i	x_1	x_2	…	x_m	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	n_1	n_2	…	n_m	n
Відносна частота w_i	w_1	w_2	…	w_m	1

Контроль правильності обчислень перевіряється рівностями

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n; \qquad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1. \tag{2.3}$$

Цей контроль записується в останній стовпчик таблиці.

Приклад 1. Вибірка: 9, 3, 6, 6, 9, 6, 9, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 6, 6.

Побудувати статистичний розподіл даної вибірки.

Розв'язання. Згідно попереднього, будемо мати n = 20 та

Варіанта x_i	3	6	9	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	3	10	7	20
Відносна частота w_i	0,15	0,5	0,35	1

2.2. Інтервальний статистичний ряд

Використовувати таблицю частот доцільно тоді, коли досліджується реалізація дискретної (зокрема цілочислової) випадкової величини і кількість різних значень у неї не дуже велика (значення повторюються).

Якщо це не так (якщо обсяг вибірки дуже великий або досліджується реалізація неперервної випадкової величини), то її статистичний розподіл зручно представити у вигляді таблиці, де в першому рядку замість значень

[33] Слово "емпіричний" – це антонім до слова "теоретичний".

варіант x_i записані інтервали $(x_{i-1}; x_i)$; а в другому і третьому рядках таблиці – так само вказані абсолютна/відносна частота потрапляння в цей інтервал.

Тобто перед побудовою таблиці потрібно зробити допоміжну роботу – знайти інтервали розбиття. Ця робота називається групуванням даних.

2.2.1. Групування даних

Для даної вибірки спочатку визначимо число k – кількість інтервалів, на яку будемо розбивати всі спостережені значення вибірки.

Це можна зробити за допомогою формули Стерджесса:

$$\boxed{k = 1 + 3{,}322 \lg n} \quad (2.4)$$

Зауваження 2. Зрозуміло, що кількість – це ціле число, отже число k знаходиться як таке **ціле** число, яке більше за вираз в правій частині (2.4).

Потім позначимо: $a = x_0$ – найменше спостережене значення вибірки;

$b = x_k$ – найбільше спостережене значення вибірки.

Далі, розіб'ємо отриманий відрізок зміни значень вибірки $[a; b]$ на k інтервалів однакової довжини h, тобто довжина кожного інтервалу дорівнює

$$h = \frac{b-a}{k}; \quad (2.5)$$

а межі інтервалів знаходять за формулою

$$x_i = a + ih, \quad i = 1, \ldots, k-1. \quad (2.6)$$

Обчисливши після цього абсолютні і відносні частоти потрапляння в кожен отриманий інтервал, будемо мати таблицю

Інтервал $(x_{i-1}; x_i)$	$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	…	$(x_{k-1}; x_k)$	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	n_1	n_2	…	n_k	n
Відносна частота w_i	w_1	w_2	…	w_k	1

Означення 5. Така таблиця називається інтервальним статистичним рядом.

Зауваження 3. **Всі** значення вибірки мають потрапити в якийсь з інтервалів і **лише один** раз. Тобто, хоча, як правило i-ий інтервал позначають з круглими дужками – $(x_{i-1}; x_i)$ – але мають на увазі $(x_{i-1}; x_i]$, тобто значення x_i потрапляє в лівий з двох сусідніх інтервалів.

● Може бути, що для деяких інтервалів $n_i = w_i = 0$.

2.3. Емпірична функція розподілу

Означення 6. Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що для кожного x визначає **відносну частоту** події $\{X < x\}$.

● Слід відрізняти емпіричну функцію розподілу від теоретичної функції розподілу[34] $F(x)$, яка для кожного x визначає **ймовірність** події $\{X < x\}$.

При великих n значення $F^*(x)$ і $F(x)$ відрізняються мало (це наслідок закону великих чисел), а оскільки теоретичну функцію розподілу ми не знаємо, то замість неї працюємо з емпіричною функцією розподілу.

Властивості емпіричної функції розподілу

1. $0 \le F^*(x) \le 1$.
2. $F^*(x)$ неспадна функція по x.
3. $F^*(-\infty) = 0$; $F^*(+\infty) = 1$.
4. Частота потрапляння випадкової величини X в інтервал $[a; b)$ рівна

$$F^*(b) - F^*(a).$$

4.1. Частота потрапляння випадкової величини X в інтервал $[a; +\infty)$

$$1 - F^*(a).$$

[34] Теоретичну функцію розподілу $F(x)$ було розглянуто раніше – в Темі 7 Частини І.

Для побудови емпіричної функції розподілу та її графіка зручно використовувати накопичені частоти $\tilde{w}_i$ – сума відносних частот тих значень варіант, які менші або дорівнюють x_i.

Приклад 1. (продовження) Для даної раніше вибірки побудувати емпіричну функцію розподілу та її графік.

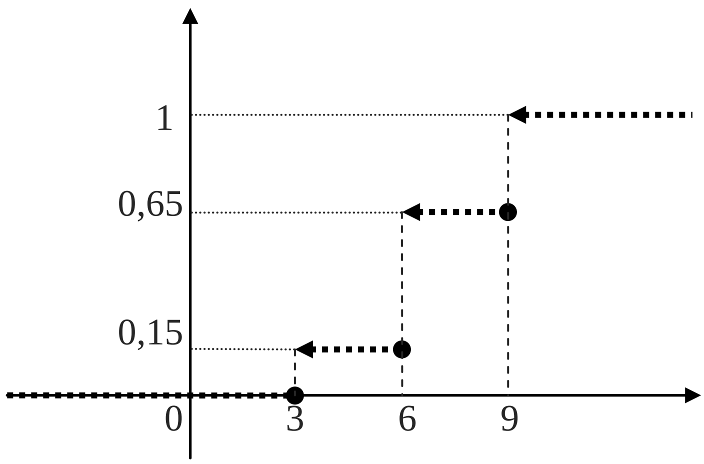
Розв'язання. Згідно попереднього матеріалу, будемо мати таку таблицю частот

Варіанта x_i	3	6	9	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	3	10	7	20
Відносна частота w_i	0,15	0,5	0,35	1
Накопичена частота $\tilde{w}_i$	0,15	0,65	1	

Тоді, за означенням емпіричної функції розподілу та цією таблицею, маємо таку емпіричну функцію розподілу для даної вибірки:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0\,, & \text{при } x\le 3 \\ 0{,}15\,, & \text{при } 3<x\le 6 \\ 0{,}65\,, & \text{при } 6<x\le 9 \\ 1\,, & \text{при } x>9 \end{cases}$$

а графік цієї емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ має вигляд:



2.4. Графічне зображення статистичних даних

Для наочності замість таблиць часто будують різні графіки статистичного розподілу вибірки.

Означення 7. Полігон[35] частот – це ламана, відрізки якої поєднують на площині точки з координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2), \ldots, (x_m; n_m)$.

Означення 8. Полігон відносних частот – це ламана, відрізки якої поєднують на площині точки з координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2), \ldots, (x_m; w_m)$.

● Неважко здогадатися, що ці два види полігонів відрізняються лише масштабом по осі ординат.

Приклад 1. (продовження) Побудувати полігон частот для даної вибірки.

Розв'язання. Згідно означення полігону, будемо мати такий графік

Якщо ж маємо інтервальний ряд розподілу, то для графічного зображення замість полігону використовують гістограму.

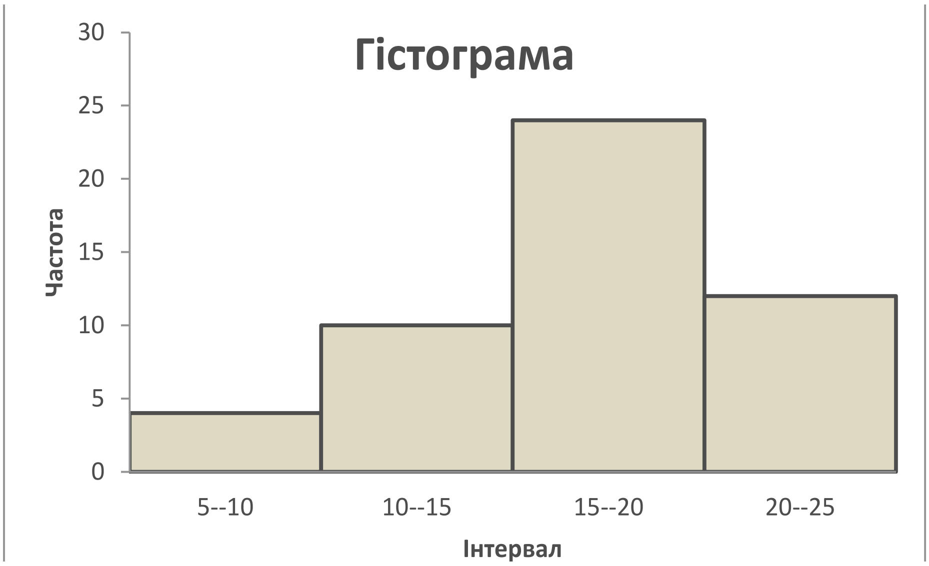
Означення 9. Гістограма (абсолютних або відносних частот) – це східчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали $(x_{i-1}; x_i)$, а висотами – відповідно абсолютні або відносні частоти потрапляння в цей інтервал.

[35] "Багатокутник" латиною.

Приклад 2. Побудувати гістограму для вибірки, заданої таблицею

Інтервал $(x_{i-1}; x_i)$	$(5; 10)$	$(10; 15)$	$(15; 20)$	$(20; 25)$	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	4	10	24	12	50

Розв'язання. Згідно Означення 9, будемо мати такий графік



Зауваження 4. Зверніть увагу, що при побудові гістограми для відносних частот висоту часто ще ділять на довжину основи так, щоб площа отриманого i-го прямокутника дорівнювала б значенню i-ої відносної частоти, отже площа всіх прямокутників гістограми дорівнювала б одиниці.

Означення 10. К у м у л я т а – це полігон для накопичених частот. Вважається наближеною ламаною емпіричної функції розподілу для неперервних випадкових величин.

Питання та задачі до теми

1. Що таке варіанта?
2. Як із вибірки утворюють варіаційний ряд?
3. Що таке абсолютна частота і що таке відносна частота?
4. Що таке таблиця частот?

5. Які суми перевіряють для контролю правильності при побудові таблиці частот?
6. Коли використання таблиці частот є незручним? Який статистичний інструмент використовують в цьому випадку?
7. Для чого виконують групування даних?
8. Про що слід пам'ятати при використанні формули Стерджесса?
9. Чи може абсолютна частота одного з інтервалів після групування даних дорівнювати нулю? Що слід робити, якщо це сталось?
10. Що таке емпірична функція розподілу і чим вона відрізняється від теоретичної функції розподілу?
11. Які властивості емпіричної функція розподілу відрізняються від відповідних властивостей теоретичної функції розподілу?
12. Що таке накопичені частоти? Як їх знайти?
13. Дайте означення полігону, гістограми, кумуляті.
14. Як будують наближену емпіричну функцію розподілу для неперервних випадкових величин?

Задача 1. Для заданої таблицею вибірки побудувати емпіричну функцію розподілу, її графік та полігон частот.

Варіанта x_i	5	7	10	13	15	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	2	3	8	7	5	??

Задача 2. Для заданої інтервальною таблицею вибірки побудувати гістограму та кумуляту як наближення емпіричної функції розподілу.

Інтервал $(x_{i-1}; x_i)$	$(2;5)$	$(5;8)$	$(8;11)$	$(11;14)$	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	9	10	25	6	??

Задача 3. Для заданої вибірки побудувати інтервальний ряд розподілу, гістограму та кумуляту як наближення емпіричної функції розподілу.

1, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 14, 15, 15, 15, 16, 19, 20, 20.

Тема 3. Числові характеристики вибірки. Статистичні оцінки параметрів розподілу

3.1. Статистичні оцінки – основні поняття

За емпіричним законом розподілу знаходять оцінки невідомих параметрів розподілу випадкової величини, що розглядається, та її числових характеристик. Оскільки ці оцінки можуть бути побудованими різними способами, то серед різних оцінок одного параметру доцільно вибрати ті, які дають гарні, *в певному сенсі*, наближення.

Означення 1. Статистична оцінка невідомого параметру теоретичного розподілу – функція від спостережуваних випадкових величин.

Основні вимоги до оцінок: незміщеність; ефективність; спроможність.

Означення 2. Незміщеною (незсуненою) називають статистичну оцінку параметра, **математичне сподівання якої дорівнює параметру**, що оцінюється, при *будь-якому об'ємі* вибірки.

Означення 3. Ефективною називають статистичну оцінку параметра, що при *заданому об'ємі* вибірки, має **найменш можливу дисперсію**.

Означення 4. Спроможною (переконливою або консистентною) називають статистичну оцінку параметра, що підкоряється закону великих чисел, тобто при *збільшенні об'єму вибірки* $(n \to \infty)$ **прямує до параметру**, що оцінюється.

Зауваження 1. Очевидно, що якщо дисперсія незміщеної оцінки прямує до 0, то така оцінка буде спроможною.

Оцінки знаходять методом моментів, тобто невідомі моменти (перший момент – математичне сподівання MX; другий момент MX^2 тощо) наближають (оцінюють) відповідними моментами, побудованим за вибіркою – знаходять вибіркові або емпіричні моменти. За допомогою цих вибіркових моментів знаходять параметри і числові характеристики розподілу випадкової величини X.

3.2. Вибіркові моменти

Означення 5. В и б і р к о в е с е р е д н є (вибіркове математичне сподівання; вибірковий перший момент) – це середнє арифметичне вибірки. Позначають одним з символів: $\overline{x}$; $\overline{x_B}$; $\overline{X}$ і знаходять за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \tag{3.1}$$

Якщо варіанти x_i мають частоти n_i (тут $i = 1,...,k$; $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), то вибіркове середнє знаходять за більш зручною формулою:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{x_1 n_1 + \ldots + x_k n_k}{n}} \tag{3.1.1}$$

Зауваження 2. Можна довести, що $\overline{x}$ буде **незміщеною та спроможною** оцінкою для невідомого теоретичного параметру математичного сподівання.

* Властивості вибіркового середнього

Позначимо a, σ^2 – невідомі теоретичні параметри математичного сподівання та дисперсії випадкової величини *X*, яку ми досліджуємо за допомогою вибірки.

1. З властивостей математичного сподівання отримуємо:

$$M\overline{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = a\ ,$$

тобто $\overline{x}$ є незміщеною оцінкою для невідомого теоретичного параметру математичного сподівання a.

2. Аналогічним чином, $D\overline{x} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sigma^2$. Тоді $D\overline{x} \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\overline{x}$ є спроможною оцінкою для невідомого теоретичного параметру математичного сподівання a.

3. Як наслідок ЦГТ і попередніх пунктів, $\bar{x}$ є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами: $\bar{x} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Означення 6. Вибіркова дисперсія – це середнє арифметичне квадратів відхилень значень вибірки від вибіркового середнього:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 . \tag{3.2}$$

Якщо варіанти x_i мають частоти n_i (тут $i = 1,...,k$; $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), то

$$\boxed{D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i} \tag{3.2.1}$$

Означення 7. Другий вибірковий момент – це середнє арифметичне квадратів значень вибірки:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n} . \tag{3.3}$$

Якщо варіанти x_i мають частоти n_i (тут $i = 1,...,k$; $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), то

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \frac{x_1^2 n_1 + ... + x_k^2 n_k}{n} . \tag{3.3.1}$$

Зауваження 3. Аналогічно вибіркові моменти m-го порядку:

$$\overline{x^m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^m n_i . \tag{3.3.2}$$

та мішані моменти (для двомірної вибірки):

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i y_i n_i . \qquad (3.3.2)$$

Формули (3.2) або (3.2.1) можна спростити:

$$\boxed{D_B = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2} \tag{3.4}$$

Означення 8. Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}\,. \tag{3.5}$$

Зауваження 4. Можна довести, що D_B буде **зміщеною** оцінкою для невідомого теоретичного параметру дисперсії, а саме:

$$MD_B = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Але оцінку (3.2) для невідомого теоретичного параметру дисперсії можна виправити, зробивши ї незміщеною

Означення 9. Виправлена вибіркова дисперсія – це величина, яка знаходиться за формулою:

$$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1}D_B} \tag{3.6}$$

Можна довести, що S^2 – це **незміщена** та **спроможна** оцінка для невідомого теоретичного параметру дисперсії.

Зауваження 5. З (3.6) бачимо, що при великих n величини S^2 і D_B відрізняються мало. Але при $n < 30$ важливо для оцінки невідомого теоретичного параметру дисперсії використовувати саме виправлену вибіркову дисперсію S^2.

Означення 10. Виправлене середнє квадратичне відхилення – це число S, що обчислюється так:

$$S = \sqrt{S^2}\,. \tag{3.7}$$

Зауваження 6. Доведено, що σ_B та S є **зміщеними** оцінками для невідомого теоретичного параметру середнього квадратичного відхилення σ, проте саме σ_B та S використовують для оцінки σ. (В загальному випадку просто немає кращих оцінок).

Зауваження 7. При обчисленнях середніх величин без комп’ютера для спрощення часто є доцільним використовувати метод добутків, формули та приклад застосування якого наведені в Додатку 2.

Вправа 1. Для заданої таблицею вибірки знайти її числові характеристики $\bar{x}$, D_B, S^2, σ_B та S.

Варіанта x_i	5	7	10	13	15	КОНТРОЛЬ
Абсолютна частота n_i	2	3	8	7	5	??

Розв'язання. Спочатку знайдемо n – загальне число спостережень. Для цього додамо всі абсолютні частоти: $n = 2 + 3 + 8 + 7 + 5 = 25$. Далі за формулами (3.1) – (3.7) :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{25}(5\cdot 2 + 7\cdot 3 + 10\cdot 8 + 13\cdot 7 + 15\cdot 5) = \frac{1}{25}(10 + 21 + 80 + 91 + 75) = \frac{277}{25} = 11{,}08$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \frac{1}{25}\left(5^2\cdot 2 + 7^2\cdot 3 + 10^2\cdot 8 + 13^2\cdot 7 + 15^2\cdot 5\right) = \frac{3305}{25} = 132{,}2;$$

$$D_B = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 132{,}2 - (11{,}08)^2 = 132{,}2 - 122{,}7664 \approx 9{,}43; \quad \sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{9{,}43} \approx 3{,}07;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{25}{24}\cdot 9{,}43 \approx 9{,}82; \qquad S = \sqrt{9{,}82} \approx 3{,}13.$$

3.3. Інші числові характеристики вибірки

Крім згаданих вище, ще використовують такі характеристики вибірки.

Означення 11. Розмах варіації – різниця між найбільшою і найменшою варіантами: $R = x_{найб} - x_{найм}$.

Означення 12. Варіанта, що має найбільшу частоту, називається модою і позначається Mo.

● Мода може бути не єдиною (бімодальний / полімодальний розподіл).

Означення 13. Варіанта, що ділить варіаційний ряд на дві рівних частини, називається медіаною і знаходиться так:

$$Me = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{якщо } n = 2k+1 \\ \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}, & \text{якщо } n = 2k \end{cases}.$$

Питання та задачі до теми

1. Що називають статистичною оцінкою?
2. Які основні вимоги до статистичних оцінок?
3. Чому якщо дисперсія незміщеної оцінки прямує до 0, то така оцінка буде спроможною?
4. Яким методом знаходять статистичні оцінки? В чому він полягає?
5. Що таке вибіркове середнє $\overline{x}$ і як воно знаходиться?
6. Назвіть властивості вибіркового середнього $\overline{x}$.
7. Що таке вибіркова дисперсія D_B і за яким формулами вона знаходиться?
8. Що таке другий вибірковий момент $\overline{x^2}$ і як він знаходиться?
9. Наведіть формулу для знаходження вибіркової дисперсії D_B через перший та другий вибіркові моменти.
10. Назвіть властивості вибіркової дисперсії D_B.
11. Що таке виправлена вибіркова дисперсія S^2 і як вона знаходиться?
12. Які властивості виправленої вибіркової дисперсії S^2 ви знаєте?
13. Що таке величини σ_B та S? Як вони знаходяться та які властивості мають?
14. Що таке другий вибірковий момент $\overline{x^2}$ і як він знаходиться?
15. Які ще числові характеристики вибірки ви знаєте?
16. Як ви думаєте, чому формула для знаходження медіани вибірки складається з двох частин?

Задача 1. Для заданої таблицею вибірки знайти її числові характеристики $\overline{x}$, D_B, S^2, σ_B, S, а також R, Mo і Me.

x_i	1	2	3	4	5	n
n_i	15	12	9	8	6	50

Тема 4. Довірчий інтервал. Довірчі ймовірності

4.1. Основні поняття та означення

Для оцінок невідомого теоретичного параметру розподілу випадкової величини X використовують два види оцінок:

– точкові, коли оцінка виражається **одним числом** (це матеріал попередньої теми: $\bar{x}, D_B,\ S^2$);

– інтервальні, кожна з яких задається **двома числами**: початком і кінцем інтервалу.

Для малої вибірки (а такі часто зустрічаються на практиці) точкові оцінки можуть виявитися занадто "грубими" (тобто можуть сильно відрізнятися від параметру, що оцінюється), тому для малої вибірки, як правило, використовують інтервальні оцінки. Для невідомого теоретичного параметру θ [36] цю оцінку позначають $(\theta_1^*; \theta_2^*)$.

Для інтервальних оцінок вводять наступні поняття:

Означення 1. Надійністю або довірчою ймовірністю інтервальної оцінки $(\theta_1^*; \theta_2^*)$ справжнього значення невідомого теоретичного параметру θ називають ймовірність того, що справжнє значення невідомого параметру θ потрапило в інтервал $(\theta_1^*; \theta_2^*)$:

$$P(\theta_1^* < \theta < \theta_2^*) = \gamma\ . \tag{4.1}$$

Як правило, надійність γ [37] близька до одиниці: 0,9; **0,95**; 0,99; 0,999. Надійність в практичних задачах вибирають виходячи з небажаності помилитися; найчастіше беруть значення 0,95 (тобто шанс помилитися 5%).

Означення 2. Інтервал $(\theta_1^*; \theta_2^*)$, що містить невідомий теоретичний параметр θ із заданою ймовірністю γ називають довірчим інтервалом для параметру θ надійності γ; а його кінці θ_1^*, θ_2^* – довірчими межами.

[36] θ – грецька буква, вимовляється *тета*.
[37] γ – грецька буква, вимовляється *гамма*.

Зауваження 1. Замість γ в (4.1) може бути написано 1 – α, де α – це близьке до нуля число, яке дорівнює ймовірності того, що справжнє значення невідомого параметру θ **не потрапить** в інтервал $\left(\theta_1^*; \theta_2^*\right)$:

$$\alpha = P\left\{\theta \notin \left(\theta_1^*; \theta_2^*\right)\right\}.$$

Величину α називають рівнем значущості довірчого інтервалу $\left(\theta_1^*; \theta_2^*\right)$.

4.2. Побудова довірчих інтервалів для випадкової величини *X*, розподіленої нормально

Отже, оцінки будемо знаходити для двох найважливіших теоретичних параметрів розподілу – для математичного сподівання і дисперсії.

Як наслідок центральної граничної теореми будемо вважати випадкову величину *X*, яку ми досліджуємо вибірковим методом, розподіленою нормально з параметрами a та σ^2.

Можливі такі ситуації:

4.2.1. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомому математичному сподіванні і відомій дисперсії

Постановка задачі : маємо вибірку з n спостережень випадкової величини *X*, яку вважаємо розподіленою нормально з **невідомим математичним сподіванням** a і **відомою** (з якихось причин) **дисперсією** σ^2.

Шукаємо довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a.

В цій ситуації точковою оцінкою для невідомого параметру математичного сподівання a буде вибіркове середнє $\overline{x}$. А шукану інтервальну оцінку отримаємо з раніше вивченого матеріалу. Пригадаємо такі факти:

1) $\overline{x}$ є незміщеною та спроможною оцінкою для a.

2) $M\overline{x} = a$; $D\overline{x} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

3) $\bar{x} \sim N\left(a, \dfrac{\sigma^2}{n}\right).$

4) Для $X \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ маємо оцінку (формула (8.8) в Частині І):

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Отже, підсумовуючи ці факти, будемо мати:

$$P\left(|\bar{x}-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\gamma\,. \tag{4.2}$$

Число δ [38] називається т о ч н і с т ю о ц і н к и.

Для спрощення подальших обчислень введемо позначення. Нехай

$$t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\ \Rightarrow\ \delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,. \tag{4.3}$$

Тоді з формули (4.2) будемо мати

$$P\left(|\bar{x}-a|<t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma\,,$$

звідки, розкривши модуль,

$$P\left(\bar{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma\,.$$

Тобто отримали, згідно Означення 1, для невідомого параметру математичного сподівання a довірчий інтервал надійності γ.

Алгоритм побудови шуканого довірчого інтервалу

1. З таблиці функції Лапласа шукаємо таке значення t, щоб

$$\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}\,. \tag{4.4}$$

2. Тоді шуканий довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a має вигляд:

$$\boxed{a\in\left(\bar{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \tag{4.5}$$

[38] δ – грецька буква, вимовляється *дельта*.

Приклад 1. У вибірки об'єму n = 156, побудованої для нормально розподіленої випадкової величини *X*, відома дисперсія $\sigma^2 = 81$ та невідоме математичне сподіванням a. Величина $\overline{x} = 76{,}5$. Знайти довірчий інтервал надійності γ = 0,95 для невідомого параметру математичного сподівання a.

Розв'язання. За таблицею функції Лапласа знайдемо t з умови (4.4)

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}475 \Rightarrow t = 1{,}96 .$$

Тепер можемо знайти шуканий довірчий інтервал за формулою (4.5):

$$a \in \left(76{,}5 - 1{,}96\frac{9}{\sqrt{156}} ;\, 76{,}5 + 1{,}96\frac{9}{\sqrt{156}} \right);$$

$$a \in (76{,}5 - 1{,}41;\, 76{,}5 + 1{,}41) \quad \Rightarrow \quad a \in (75{,}09 ;\; 77{,}91).$$

4.2.2. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання при невідомих математичному сподіванні і дисперсії

Маємо вибірку з n спостережень нормально розподіленої випадкової величини *X*, з **невідомими математичним сподіванням** a і **дисперсією** σ^2.

Шукаємо довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру a.

В цій ситуації точковою оцінкою для невідомого параметру математичного сподівання a звісно теж буде вибіркове середнє $\overline{x}$. Шуканий довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a знаходиться за формулою, майже аналогічній формулі (4.5):

$$\boxed{a \in \left(\overline{x} - t_{n,1-\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ;\, \overline{x} + t_{n,1-\gamma} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)} \tag{4.6}$$

де $S = \sqrt{S^2}$ – це виправлене середнє квадратичне відхилення;

$t_{n,1-\gamma}$ – квантиль рівня 1–γ розподілу Стьюдента з n–1 степенем свободи, тобто число $t_{n,1-\gamma}$ знаходиться з таблиці розподілу Стьюдента з умови

$$P(|\tau_{n-1}| > t_{n,1-\gamma}) = 1 - \gamma . \tag{4.7}$$

Зауваження 2. При $n > 30$ в силу того, що при таких n розподіл Стьюдента практично не відрізняється від нормального N(0; 1), то в формулі (4.6) замість $t_{n,1-\gamma}$ з формули (4.7) доцільно використовувати квантиль функції Лапласа t з формули (4.4).

● А при $n < 30$ використання в формулі (4.6) величини $t_{n,1-\gamma}$ з формули (4.7) дає точнішу оцінку, ніж використання величини t з формули (4.4).

4.2.3. Побудова довірчого інтервалу для невідомої дисперсії

Маємо вибірку з n спостережень випадкової величини X, яку вважаємо розподіленою нормально з **невідомою дисперсією** σ^2.

Шукаємо довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру σ^2.

Точковою оцінкою для невідомого параметру дисперсії σ^2 буде виправлена вибіркова дисперсія S^2. А шуканий довірчий інтервал надійності γ для невідомого параметру дисперсії σ^2 знаходиться за формулою:

$$\boxed{\sigma^2 \in \left(\frac{nS^2}{\chi_1} ; \frac{nS^2}{\chi_2} \right)} \tag{4.8}$$

де величини χ_1, χ_2 – квантилі рівня $\frac{1-\gamma}{2}$ та $\frac{1+\gamma}{2}$ відповідно розподілу χ^2 (Пірсона) з $n-1$ степенем свободи, тобто числа χ_1, χ_2 знаходяться з таблиці розподілу χ^2 (Пірсона) з $n-1$ степенем свободи з умов

$$P\left(\chi^2(n-1) > \chi_1\right) = \frac{1-\gamma}{2}; \quad P\left(\chi^2(n-1) > \chi_2\right) = \frac{1+\gamma}{2}. \tag{4.9}$$

● Зверніть увагу, що $\chi_1 > \chi_2$.

Приклад 2. Для вибірки об’єму $n = 20$, побудованої для нормально розподіленої випадкової величини X, з невідомими математичним сподіванням a та дисперсією σ^2, знайдено величини $\bar{x} = 7{,}22$ і $S^2 = 2{,}4$. Знайти довірчий інтервал надійності $\gamma_1 = 0{,}95$ для a та надійності $\gamma_2 = 0{,}9$ для σ^2.

Розв'язання. Спочатку за таблицею розподілу Стьюдента з n – 1 = 20 – 1 = 19 степенями свободи знайдемо $t_{n,1-\gamma}$ з умови (4.7)

$$P(|\tau_{19}| > t_{n,1-\gamma}) = 1 - \gamma_1 = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad t_{n,1-\gamma} = 2{,}093.$$

Тепер можемо знайти шуканий довірчий інтервал надійності $\gamma_1 = 0{,}95$ для невідомого параметру математичного сподівання a за формулою (4.6):

$$a \in \left(7{,}22 - 2{,}093 \cdot \frac{\sqrt{2{,}4}}{\sqrt{20}};\quad 7{,}22 + 2{,}093 \cdot \frac{\sqrt{2{,}4}}{\sqrt{20}}\right);$$

$$a \in (7{,}22 - 0{,}725;\quad 7{,}22 + 0{,}725) \quad \Rightarrow \quad a \in (6{,}495;\ 7{,}945).$$

Далі за таблицею розподілу χ^2 (Пірсона) з n – 1 = 20 – 1 = 19 степенями свободи знайдемо χ_1, χ_2 з умови (4.9) :

$$P\left(\chi^2(19) > \chi_1\right) = \frac{1-\gamma_2}{2} = 0{,}05 \Rightarrow \chi_1 = 30{,}144;$$

$$P\left(\chi^2(19) > \chi_2\right) = \frac{1+\gamma_2}{2} = 0{,}95 \Rightarrow \chi_2 = 10{,}117.$$

Тоді шуканий довірчий інтервал надійності $\gamma_2 = 0{,}9$ для невідомого параметру дисперсії σ^2 за формулою (4.8) має вигляд:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{20 \cdot 2{,}4}{30{,}144}; \frac{20 \cdot 2{,}4}{10{,}117}\right) \Rightarrow \sigma^2 \in \left(\frac{48}{30{,}144}; \frac{48}{10{,}117}\right);$$

$$\sigma^2 \in (1{,}592\,;\ 4{,}744)$$

4.2.4. Знаходження об'єму вибірки для знаходження оцінки математичного сподівання при відомій дисперсії

Маємо випадкову величину $X \sim N(a; \sigma^2)$, де a – невідоме, а σ^2 – відоме.

Треба знайти такий об'єм вибірки, щоб за цією вибіркою із заданою надійністю γ можна було знайти довірчий інтервал заданої точності δ невідомого параметру математичного сподівання a.

Використаємо отримані вище формули (4.3)-(4.5). Отже, з формули (4.3)

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}} \tag{4.10}$$

де, за формулою (4.4), число t визначається заданою надійністю γ з формули:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Зауваження 3. Об'єм вибірки – ціле число, тому n слід брати цілим і більшим за число в правій частині (4.10)

Зауваження 4. Сам же довірчий інтервал надійності γ та точності δ для невідомого параметру математичного сподівання a знаходиться за формулою (4.5), тобто треба зробити вибірку об'єму, не меншого за n з (4.10), потім обчислити $\overline{x}$ цієї вибірки, а тоді використати формулу (4.5).

Зауваження 5. Формулу (4.10) для знаходження потрібного об'єму вибірки можна використовувати і при невідомій дисперсії σ^2– тоді замість σ^2 треба брати виправлену вибіркову дисперсію S^2 (або вибіркову дисперсію D_B). Тобто треба спочатку зробити вибірку довільного об'єму, потім обчислити S^2 (або D_B) цієї вибірки, а тоді знайти потрібний об'єм вибірки за формулою (4.10).

Приклад 3. Випадкова величина $X \sim N(a;\sigma^2)$, де a – невідоме, а σ^2 = 0,25.

Який треба взяти об'єм вибірки, щоб за цією вибіркою із надійністю γ = 0,95 можна було знайти довірчий інтервал точності δ = 0,1 параметру a?

Розв'язання. За таблицею функції Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475 \Rightarrow t = 1{,}96$$

тоді за формулою (4.10)

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{0{,}1^2} = 96{,}04$$

отже слід взяти вибірку об'ємом 97 шт. і більше.

Питання та задачі до теми

1. Чому на практиці часто зустрічаються малі вибірки?
2. Які види оцінок невідомих параметрів ви знаєте?
3. Що таке надійність інтервальної оцінки?
4. Що називається довірчим інтервалом заданої надійності?
5. Що таке рівень значущості інтервальної оцінки?
6. Чому вибірку розглядають як правило нормально розподіленою ?
7. Як знаходять довірчий інтервал для невідомого параметру a при відомій дисперсії σ^2?
8. Як знаходять довірчий інтервал для невідомого параметру a при невідомій дисперсії σ^2?
9. Як знаходять довірчий інтервал для невідомого параметру σ^2?
10. Як знаходиться об'єм вибірки при заданій точності та надійності оцінки для невідомого параметру a?

Задача 1. Для вибірки, побудованої для нормально розподіленої випадкової величини X, з невідомим математичним сподіванням a та відомою дисперсією $\sigma^2 = 9$, знайдено величину $\overline{x} = 8{,}2$. Обсяг вибірки n = 36. Знайти довірчі інтервали заданої надійності γ для невідомого параметру математичного сподівання a. а) $\gamma_1 = 0{,}9$; б) $\gamma_2 = 0{,}95$; в) $\gamma_3 = 0{,}99$.

Задача 2. Деяке підприємство проводило контроль якості продукції. x_i – кількість бракованих виробів за i-ий день. Результати подані в таблиці:

День, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Брак, x_i	20	18	20	24	20	28	24	32	22	28	26	22

Знайти для даної вибірки $\overline{x}$, D_B, S^2 і довірчі інтервали надійності γ = 0,95 для невідомих параметрів a та σ^2, вважаючи що випадкова величина X = "кількість бракованих виробів за день" – розподілена нормально з параметрами a та σ^2.

Тема 5. Елементи теорії кореляції

5.1. Основні поняття та постановка задачі

При розв'язанні практичних задач виникає питання про залежність (або незалежність) досліджуваної випадкової величини X від іншої (інших) випадкової величини.

Як правило, на практиці вибірку досліджують не за одним параметром, а за кількома. Наприклад, (з економіки) залежність між обсягом виробництва і собівартістю; між капіталовкладенням і прибутком.

Можна виявити три типи залежності між випадковими величинами.

Стохастичною (статистичною) називається така залежність, при якій зміна значень однієї з випадкових величин (X) викликає зміну розподілу іншої (Y).

Кореляційною називається така залежність між випадковими величинами X та Y, при якій зміна значень X викликає зміну середнього значення Y.

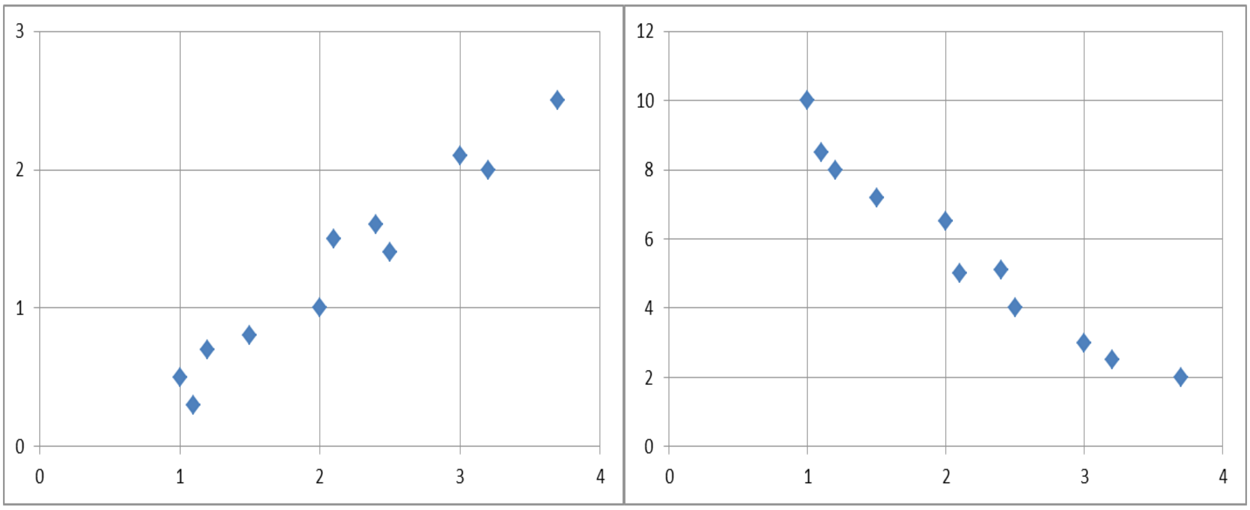
Функціональною називається така залежність між випадковими величинами X та Y, при якій довільна зміна значень X викликає однозначну зміну значень Y. (Наприклад, при збільшенні X в 2 рази значення Y збільшуються рівно в 4 рази).

Як правило, виходячи з простоти позначень і доступності графічної інтерпретації даних, мова буде йти про двовимірну вибірку, тобто в подальшому вибіркові значення задаються точками з двох координат, тобто i-те вибіркове значення матиме вигляд $(x_i; y_i)$, де x_i – i-те спостережене значення випадкової величини X , а y_i – i-те спостережене значення випадкової величини Y.

Постановка задачі. Хочемо отримати в явному вигляді залежність між випадковими величинами X та Y, тобто знайти деяке наближення виду $Y = f(X)$, яке в *певному сенсі* добре відповідає даним, що спостерігалися.

● Яку функцію f взяти – може підказати графік двовимірної вибірки.

Означення 1. Якщо нанести точки з координатами $(x_i; y_i)$ на координатну площину *Oxy*, то отримаємо кореляційне поле (кореляційну хмару) вибірки, за яким можемо зробити попереднє припущення про вид залежності між випадковими величинами *X* та *Y*.



Приклад 1. Неважко здогадатись, що на обох кореляційних хмарах зображено залежність між випадковими величинами, схожа на лінійну. Але на лівій хмарі – з додатнім кутовим коефіцієнтом, а на правій – з від'ємним.

● Хоча на правій кореляційній хмарі може бути і гіперболічна (обернено пропорційна) залежність, тож треба досліджувати ще.

Означення 2. Після первинної обробки двовимірної вибірки складають кореляційну таблицю – таблицю виду

Y \ X	x_1	$\dots$	x_q	Сума по рядках, k_j
y_1	n_{11}	$\dots$	n_{1q}	k_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_p	n_{p1}	$\dots$	n_{pq}	k_p
Сума по стовпцях, m_i	m_1	$\dots$	m_q	n

де $x_1, \dots, x_q$ і $y_1, \dots, y_p$ – всі різні спостережені значення випадкових величин *X* та *Y* відповідно, записані в порядку зростання;

n_{ij} – частота спостережень вибіркового значення $(x_i;\, y_j)$;

$k_j = \sum_{i=1}^{q} n_{ij}$ – кількість спостережень, у яких перша координата дорівнює y_j;

$m_i = \sum_{j=1}^{p} n_{ij}$ – кількість спостережень, у яких друга координата дорівнює x_i;

контроль: $\boxed{\sum_{i=1,\ j=1}^{q,\ p} n_{ij} = \sum_{i=1}^{q} m_i = \sum_{j=1}^{p} k_j = n}$

Зауваження 1. Багато з n_{ij} можуть дорівнювати 0. Такі n_{ij}, як правило, в таблиці не пишуть, а залишають порожні клітинки.

5.2. Метод найменших квадратів

Ідея МНК: шукаємо функцію $Y = f(X)$ так, щоб

$$\boxed{\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 \to \min} \tag{5.1}$$

Величина Δ називається середньоквадратичною похибкою наближення [випадкової величини Y функцією $Y = f(X)$]; y_i – i-те спостережене значення випадкової величини Y; $f(x_i) = \tilde{y}_i$ – i-те розраховане значення випадкової величини Y [за формулою $Y = f(X)$].

Означення 3. Якщо для деякої функції f величина Δ досягає свого мінімуму, то цю функцію f називають найкращим в сенсі МНК (за методом найменших квадратів) наближенням випадкової величини Y через випадкову величину X.

Означення 4. Рівняння $Y = f(X)$ називається рівнянням регресії випадкової величини Y на випадкову величину X.

Можна розглядати різні функції f. Якщо f – лінійна, тобто $f(x) = Ax + B$, то рівняння $Y = f(X) = AX + B$ називають рівнянням лінійної регресії

Y на X. Якщо f – квадратна, тобто $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, то рівняння $Y = f(X) = AX^2 + BX + C$ називають рівнянням квадратичної (параболічної) регресії Y на X. Згадаємо ще рівняння гіперболічної та логарифмічної регресії, які визначаються через відповідні функції.

Зауваження 2. Аналогічно говорять про рівняння регресії X на Y.

***Означення 5.** Величина $\overline{y_x}$, яка дорівнює середньому арифметичному тих y_i, при яких відповідні $x_i = x$, називається умовною середньою.

Для знаходження $\overline{y_x}$ доцільно користуватися кореляційною таблицею.

5.3. Коефіцієнт кореляції

Означення 6. Коефіцієнт кореляції r_{xy} – це міра **лінійної** залежності випадкової величини Y від випадкової величини X (і навпаки).

$$\boxed{r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}} \tag{5.2}$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i m_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_j y_j k_j$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i,j} x_i y_j n_{ij}$ – вибіркові середні;

$\sigma_x = \sqrt{D_x}$, $\sigma_y = \sqrt{D_y}$ – вибіркові середні квадратичні відхилення.

Властивості коефіцієнту кореляції

1. $-1 \le r_{xy} \le 1$.

2. Якщо $|r_{xy}| \le 0{,}3$, то говорять про слабкий лінійний зв'язок між X та Y;

$0{,}3 \le |r_{xy}| \le 0{,}7$, то говорять про середній лінійний зв'язок між X та Y;

$|r_{xy}| \ge 0{,}7$, то говорять про сильний/тісний лінійний зв'язок між X та Y.

$r_{xy} \approx 0$, то говорять про відсутній лінійний зв'язок між X та Y;

$r_{xy} \approx 1$, то говорять про прямий пропорційний зв'язок між X та Y;

$r_{xy} \approx -1$, то говорять про обернений пропорційний зв'язок між X та Y.

Приклад 2. Знайти коефіцієнт кореляції вибірки (–1; –2), (1; 0), (2; 3), (3; 6), (5; 8) та оцініть міру лінійної залежності між *X* та *Y*.

Розв'язання. Отже, *n*=5; подальші обчислення зручно провести в таблиці

	x_i	y_i	x_i*y_i	x_i^2	y_i^2
	-1	-2	2	1	4
	1	0	0	1	0
	2	3	6	4	9
	3	6	18	9	36
	5	8	40	25	64
Сума	10	15	66	40	113
Середнє	**2**	**3**	**13,2**	**8**	**22,6**

З таблиці маємо: $\overline{x}=2$, $\overline{y}=3$, $\overline{xy}=13{,}2$;

$$D_x=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=8-2^2=4\Rightarrow\sigma_x=2;$$

$$D_y=\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2=22{,}6-3^2=13{,}6\Rightarrow\sigma_y=\sqrt{13{,}6}\approx3{,}7.$$

Тепер за формулою (5.2) $r_{xy}=\dfrac{13{,}2-2\cdot3}{2\cdot3{,}7}=\dfrac{7{,}2}{7{,}4}\approx0{,}973.$

Маємо сильний лінійний зв'язок між *X* на *Y*.

● Таким чином, вище ми сформулювали ідею метода найменших квадратів, за допомогою якого будемо шукати функцію наближення випадкової величини *Y* через випадкову величину *X* у формі $Y=f(X)$ та розглянули поняття міри лінійної залежності між величинами *X* та *Y* – коефіцієнта кореляції. Тепер розглянемо рівняння деяких регресій та наведемо формули для знаходження невідомих коефіцієнтів регресії.

5.4. Лінійна регресія

Якщо кореляційне поле дає підстави вважати залежність між випадковими величинами *X* та *Y* лінійною та, особливо, якщо коефіцієнт кореляції $\left|r_{xy}\right|\geq0{,}7$, то доцільно шукати рівняння лінійної регресії в формі

$$Y=AX+B,\tag{5.3}$$

де *A*, *B* – невідомі коефіцієнти лінійної регресії, оцінки яких ми і шукаємо.

Отже, в даній моделі функція f має вигляд $f(x) = Ax + B$. МНК оцінки для невідомих A, B будемо шукати з умови (5.1), тобто для даної функції

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Ax_i - B\right)^2 \to \min . \tag{5.4}$$

Величина Δ з формули (5.4) є функцією двох змінних – A та B, тому мінімум цієї функції будемо знаходити як екстремум функції двох змінних. Тому для знаходження МНК-оцінки невідомих коефіцієнтів A, B маємо систему

$$\begin{cases} A\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i y_i \\ A\sum x_i + nB = \sum y_i \end{cases}.$$

Поділивши обидва рівняння на n та використовуючи стандартне позначення для середніх величин, отримаємо більш просту систему

$$\begin{cases} A\overline{x^2} + B\overline{x} = \overline{xy} \\ A\overline{x} + B = \overline{y} \end{cases}. \tag{5.5}$$

Розв'язок цієї системи можна знайти, наприклад, методом Крамера, звідки будемо мати такий розв'язок (який за теорією пошуку екстремуму функції двох змінних і буде точкою мінімуму, тобто шуканими МНК оцінками для A, B):

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^2} \\ B = \overline{y} - A\overline{x} \end{array}} \tag{5.6}$$

Шукане рівняння лінійної регресії знаходять за формулою (5.3).

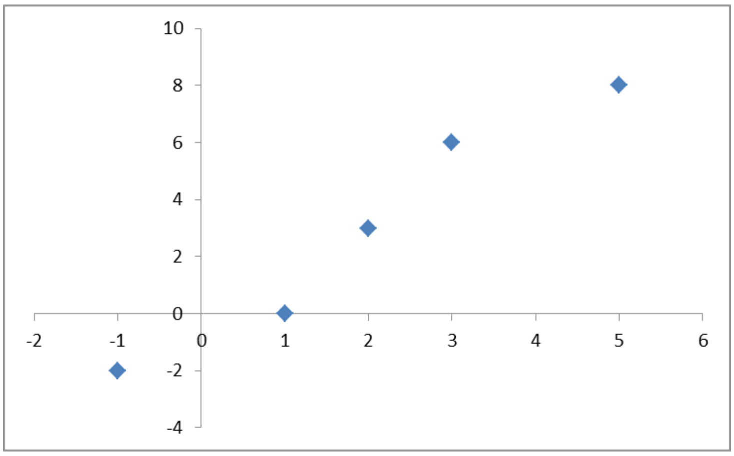
Зауваження 1. Порівнюючи формулу (5.2) для коефіцієнта кореляції r_{xy} та формулу (5.6) для A, бачимо, що вони досить схожі, а саме,

$$A = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = k_{YX} ,$$

де величину k_{YX} називають вибірковим коефіцієнтом лінійної залежності випадкової величини Y від X. Аналогічно розглядають величину $k_{XY} = r_{xy} \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$.

Приклад 3. Вибірка складається із елементів (–1; –2), (1; 0), (2; 3), (3; 6), (5; 8). З'ясувати, чи є підстави вважати наявною лінійну залежність між випадковими величинами *X* та *Y*. Знайти рівняння лінійної регресії між випадковими величинами *X* та *Y*.

Розв'язання. З'ясувати, чи є підстави вважати наявною лінійну залежність між випадковими величинами *X* та *Y*, можна двома способом – через кореляційне поле (попередній вид залежності) і через коефіцієнт кореляції (більш надійний спосіб).



Кореляційне поле

Коефіцієнт кореляції було знайдено в Прикладі 2 вище, $r_{xy} \approx 0{,}973$, є дуже близьким до 1, що свідчить про дуже сильний лінійний зв'язок між *X* та *Y*.

Маємо вибірку з $n = 5$; подальші обчислення зручно провести в таблиці

	x_i	y_i	x_i*y_i	x_i^2	y_i^2
	-1	-2	2	1	4
	1	0	0	1	0
	2	3	6	4	9
	3	6	18	9	36
	5	8	40	25	64
Сума	10	15	66	40	113
Середнє	**2**	**3**	**13,2**	**8**	**22,6**

З таблиці маємо: $\overline{x} = 2$, $\overline{y} = 3$, $\overline{xy} = 13{,}2$; $D_x = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 8 - 2^2 = 4 \Rightarrow \sigma_x = 2$; $D_y = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = 22{,}6 - 3^2 = 13{,}6 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{13{,}6} \approx 3{,}7$.

Тепер за формулами (5.6) $A = \frac{13{,}2 - 2 \cdot 3}{4} = \frac{7{,}2}{4} = 1{,}8$; $B = 3 - 1{,}8 \cdot 2 = -0{,}6$; а шукане рівняння лінійної регресії за (5.3) має вигляд:

$$Y = 1{,}8X - 0{,}6.$$

5.5. Коефіцієнт детермінації

Означення 1. Коефіцієнт детермінації R^2 – це частка дисперсії залежної змінної, яка пояснюється моделлю, що розглядається. **Це універсальна міра залежності однієї випадкової величини від іншої (багатьох інших).**

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{D_y}} \qquad (5.7)$$

де y_i – i-те спостережене значення випадкової величини Y;

$\tilde{y}_i = f(x_i)$ – i-те розраховане значення Y, за формулою $Y = f(X)$;

$e_i = y_i - \tilde{y}_i$ – i-та похибка наближення (залишок регресії) Y функцією $Y = f(X)$;

D_y – вибіркова регресія випадкової величини Y.

Зауваження 2. Чим ближчий коефіцієнт детермінації R^2 до одиниці, тим краще теоретична модель $Y = f(X)$ узгоджується з експериментальними даними.

● Для лінійної регресії коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнту кореляції : $R^2 = r_{xy}^2$.

● Якщо $R^2 \geq 0{,}8$, то теоретична модель $Y = f(X)$ є досить гарною моделлю; для прийнятності моделі бажано, щоб хоча б $R^2 \geq 0{,}5$.

● Незважаючи на позначення, коефіцієнт детермінації R^2 може бути і меншим 0 – це означає, що відповідна модель $Y = f(X)$ є дуже неадекватною.

* 5.6. Параболічна (квадратична) регресія

Якщо кореляційна хмара дає залежність, схожу на параболічну, а також, якщо коефіцієнт кореляції $|r_{xy}| \le 0{,}7$, то доцільно залежність між випадковими величинами *X* та *Y* шукати у вигляді

$$Y = AX^2 + BX + C \tag{5.8}$$

де *A*, *B*, *C* – невідомі коефіцієнти лінійної регресії, оцінки яких ми і шукаємо. Тобто шукати рівняння параболічної (квадратичної) регресії *Y* на *X*.

Таким чином, в даній моделі функція f має вигляд $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. МНК оцінки для невідомих коефіцієнтів *A*, *B*, *C* будемо шукати з умови (5.1):

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C\right)^2 \to \min \tag{5.9}$$

Зрозуміло, що величина Δ з формули (5.9) є функцією трьох змінних – *A*, *B* та *C*, тому мінімум цієї функції будемо знаходити як екстремум функції трьох змінних. Так, як і для лінійної регресії, знаходимо систему для стаціонарних точок

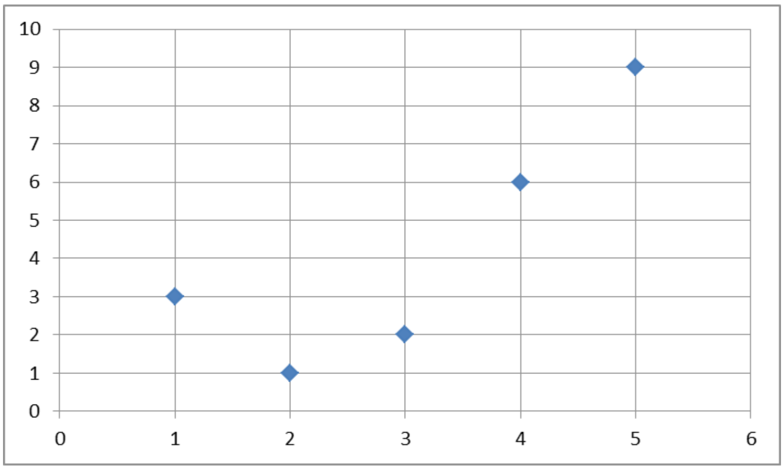
$$\begin{cases} A\overline{x^4} + B\overline{x^3} + A\overline{x^2} = \overline{x^2 y} \\ A\overline{x^3} + B\overline{x^2} + C\overline{x} = \overline{xy} \\ A\overline{x^2} + B\overline{x} + C = \overline{y} \end{cases}. \tag{5.10}$$

З цієї системи потрібно знайти невідомі коефіцієнти *A*, *B*, *C* .

● Знаходження *A*, *B*, *C* в загальному вигляді з системи (5.10) дає занадто складні формули, тому в конкретній задачі треба знайти всі середні значення, підставити їх в (5.10) і знайти розв'язок системи (5.10) будь-яким способом.

Приклад 5. Вибірка складається із елементів (1;3), (2;1), (3;2), (4;6), (5;9). Нанести вибіркові дані на кореляційне поле. Знайти рівняння параболічної (квадратичної) регресії між випадковими величинами *X* та *Y*.

Розв'язання. Зобразимо кореляційну хмару



Бачимо, що залежність між випадковими величинами схожа на параболічну. Подальші обчислення зручно виконати в таблиці:

	x_i	y_i	x_i*y_i	x_i^2	y_i^2	x_i^2*y_i	x_i^3	x_i^4
	1	3	3	1	9	3	1	1
	2	1	2	4	1	4	8	16
	3	2	6	9	4	18	27	81
	4	6	24	16	36	96	64	256
	5	9	45	25	81	225	125	625
Сума	15	21	80	55	131	346	225	979
Середнє	**3**	**4,2**	**16**	**11**	**26,2**	**69,2**	**45**	**195,8**

З таблиці: $\overline{x} = 3$, $\overline{y} = 4{,}2$, $\overline{xy} = 16$, $\overline{x^2} = 11$, $\overline{y^2} = 26{,}2$, $\overline{x^2 y} = 69{,}2$, $\overline{x^3} = 45$,

$$\overline{x^4} = 195{,}8;\ D_x = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 11 - 3^2 = 2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2} \approx 1{,}41;$$

$$D_y = \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2 = 26{,}2 - 4{,}2^2 = 8{,}56 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{8{,}56} \approx 2{,}93.$$

Тепер за формулою (5.2) обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{16 - 3 \cdot 4{,}2}{1{,}41 \cdot 2{,}93} = \frac{3{,}4}{4{,}13} \approx 0{,}823.$$

У даної вибірки маємо сильний лінійний зв'язок між X на Y. Але кореляційне поле дає підстави вважати залежність між X та Y параболічною. Для обчислення параметрів параболічної регресії маємо систему (5.10):

$$\begin{cases} 195{,}8A + 45B + 11A = 69{,}2 \\ 45A + 11B + 3C = 16 \\ 11A + 3B + C = 4{,}2 \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи такий: $A = 0{,}93;\ B = -3{,}87;\ C = 5{,}6$, а шукане рівняння параболічної регресії за (5.8) має вигляд: $Y = 0{,}93X^2 - 3{,}87X + 5{,}6$.

* 5.7. Гіперболічна регресія

Якщо кореляційна хмара дає залежність між випадковими величинами, схожу на обернену пропорційність, то доцільно залежність між випадковими величинами X та Y шукати у вигляді гіперболічної регресії

$$Y = \frac{A}{X} + B, \quad A \neq 0 \tag{5.11}$$

(або, в більш загальному вигляді, $Y = \dfrac{AX + B}{CX + D}, \quad C \neq 0$)

де A, B – невідомі коефіцієнти лінійної регресії, оцінки яких ми і шукаємо.

В цій моделі МНК-оцінки невідомих коефіцієнтів A, B шукаємо з умови

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{A}{x_i} - B \right)^2 \to \min .$$

Аналогічно попереднім розглянутим регресіям і використовуючи стандартне позначення для середніх величин, невідомі коефіцієнти A, B знаходять з системи

$$\begin{cases} A\overline{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)} + B\overline{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} \\ A\overline{\left(\dfrac{1}{x}\right)} + B = \overline{y} \end{cases}. \tag{5.12}$$

Питання та задачі до теми

1. Які залежності можуть бути між величинами? Наведіть приклади.
2. Що таке двовимірна вибірка? Як вона задається?
3. Як графічно зображають двовимірну вибірку?
4. В чому полягає ідея методу найменших квадратів?
5. Навіщо в МНК беруться квадрати відхилень, а не самі відхилення?
6. Що таке коефіцієнт кореляції? За якою формулою його знаходять?
7. Як може змінюватися коефіцієнт кореляції?

8. Який і наскільки близький зв'язок між величинами має місце, залежно від коефіцієнта кореляції?
9. Коли варто шукати рівняння лінійної регресії?
10. За якими формулами знаходять невідомі параметри лінійної регресії?
11. Чи може за кореляційним полем вибірці підходити і лінійна, і параболічна регресія?
12. Як знаходять невідомі параметри параболічної регресії?
13. Яка величина характеризує залежність однієї випадкової величини від іншої (інших)?
14. Коли кажуть що модель добре відповідає експериментальним даним?
15. Коли варто намагатися знайти рівняння гіперболічної регресії?

Задача 1. Наведіть свій приклад залежності між економічними явищами.

Задача 2. Який вигляд матиме кореляційна хмара у випадку параболічної (квадратної) залежності? А у випадку відсутності залежності?

Задача 3. Доведіть, що $r_{xx} = 1$.

Задача 4. Намалюйте кореляційне поле даної вибірки (–3; –5), (–2; –2,5), (–1; 0), (0; 2,5), (1; 3), (2; 3), (3; 3,5), (3,5; 5), (4; 5), (4,5; 5,5) та зробіть припущення про вид залежності між випадковими величинами X та Y. Знайдіть коефіцієнт кореляції цієї вибірки і зробіть висновок про міру лінійної залежності випадкової величини Y від випадкової величини X.

Задача 5. Вибірка складається із елементів (1;3), (2;4), (3;2), (5;0). Знайти рівняння лінійної регресії між випадковими величинами X та Y.

Задача 6. Знайти коефіцієнт детермінації для лінійної регресії, побудованої для вибірки з: а) Прикладу 2; б) Задачі 5.

Задача 7. Вибірка складається із елементів (–2;10), (–1;4), (0;2), (1;5), (2;9). Нанести вибіркові дані на кореляційне поле. Знайти рівняння параболічної (квадратичної) регресії між випадковими величинами X та Y.

Тема 6. Статистичні гіпотези

6.1. Основні поняття і означення

В прикладних задачах після первинної обробки статистичної інформації постає задача – зробити з цієї інформації певні висновки. Для цього потрібно знати закон розподілу та його параметри. Отже, робимо припущення про невідомий закон розподілу або про параметри відомого розподілу. Ці припущення називаються гіпотезами.

Означення 1. Статистичними гіпотезами називаються гіпотези про невідомий закон розподілу генеральної сукупності або про параметри відомого розподілу.

Основні статистичні гіпотези, що розглядаються:

1) параметр розподілу має певне значення;
2) закон розподілу вибірки – нормальний;
3) для різних вибіркових характеристик, що відповідають однаковим теоретичним, потрібно зробити висновок: відмінності між ними випадкові або значущі.

Розглядаємо припущення про закон розподілу генеральної сукупності або його параметри розподілу – гіпотезу H_0. Вона називається основною (нульовою) . Альтернативною (конкуруючою) буде гіпотеза H_1, яка заперечує H_0.

Приклад 1. Основну гіпотезу $H_0:\ MX = 6$ заперечує $H_1:\ MX \neq 6$.

Означення 2. Гіпотезу називають простою, якщо вона містить одне припущення. Інакше – називають складною.

Приклад 2. Гіпотеза $H_0:\ MX = 5$ – проста; гіпотеза $H_0:\ MX \geq 5$ – складна.

Перевірка гіпотези проводиться за даними вибірки, тобто статистично. При перевірці за вибірковими даними можна зробити хибний висновок, тобто помилитися.

Означення 3. Помилка першого роду – це помилка, яка полягає в тому, що **відхиляється** основна гіпотеза H_0, хоча насправді вона вірна.

Означення 4. Помилка другого роду – це помилка, яка полягає в тому, що **приймається** основна гіпотеза H_0, хоча насправді вірною є конкуруюча гіпотеза H_1.

● *Якщо* за результатами перевірки відхиляється правильна гіпотеза H_0 – це помилка I роду; якщо за результатами перевірки приймається неправильна гіпотеза H_0 – це помилка II роду.

Отже, в результаті перевірки основної гіпотези H_0 при конкуруючій H_1 можлива одна з 4 ситуацій.

Висновок при перевірці / Насправді	За результатами перевірки приймаємо H_0	За результатами перевірки приймаємо H_1
Насправді вірна H_0	Немає помилки	Помилка I роду
Насправді вірна H_1	Помилка II роду	Немає помилки

Для перевірки гіпотези обчислюють значення деякої функції від вибіркових даних (статистику) і обирають деяку випадкову функцію (статистичний критерій).

Означення 5. Статистикою (статистичною характеристикою) називають певну функцію від вибіркових даних.

Означення 6. Критерієм (статистичним критерієм) називають спеціально підібрану випадкову величину з відомим (точно або наближено) розподілом, яка визначає критичну область, залежно від потрапляння туди або ні значення статистичної характеристики основна гіпотеза H_0 приймається або відхиляється.

Означення 7. Ймовірність помилки першого роду позначають α і називають рівнем значущості критерію.

Означення 8. Ймовірність помилки другого роду позначають β. Величину $1-\beta$ називають потужністю критерію.

● При, як правило, заданому рівні значущості шукають найбільш потужний критерій.

Зауваження 1. Єдиний спосіб одночасно зменшити помилки I і II роду – збільшити об’єм вибірки.

Зауваження 2. Пояснення щодо помилок I і II роду.

В практичних задачах хотілося б зменшити і ймовірність помилки I роду α, і ймовірність помилки II роду β. Якщо збільшити вибірку при цьому важко (наприклад занадто дорого), то α і β вибираються залежно від ступеня небажаності пов’язаних з ними помилкових рішень (α і β між собою пов’язані, але зв'язок різний – залежно від ситуації).

Приклад 3. Нехай маємо деяке виробництво. Виконуємо спрощену перевірку якості, тобто перевіряємо основну гіпотезу H_0: "виріб – бракований". Конкуруючою є гіпотеза H_1: "виріб – якісний".

З ймовірністю α бракований виріб визнається якісним (отже маємо помилку I роду); з ймовірністю β якісний виріб визнається бракованим (отже маємо помилку II роду).

Якщо споживачеві було продано бракований виріб, то за його гарантійний ремонт (або відшкодування збитків) треба заплатити P грн.; якщо якісний виріб було забраковано, то втрачається його собівартість Q грн.

Далі, нехай в партії з N виробів десь (згідно статистичних спостережень) M шт. бракованих. Тоді середні втрати при контролі якості цієї партії рівні:

$$(M\alpha)\cdot P+((N-M)\beta)\cdot Q\xrightarrow[\text{хотілось би}]{}\min .$$

Величини P і Q (отже і α та β) будуть залежати від того, що саме виробляємо: телефони чи косметику.

Означення 9. Критична областю – це така область, потрапляння значення статистики в яку свідчить про відхилення основної гіпотези H_0.

Означення 10. Область прийняття гіпотези – це така множина, потрапляння значення статистики в яку свідчить про прийняття основної гіпотези H_0.

Якщо критерій – одновимірна випадкова величина (майже завжди так), то множина її значень – деякий інтервал. Тому виникають наступні поняття.

Означення 11. Критичною точкою (критичними точками) критерію називається точка (точки) $K_{кр}$, що відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Критична область може бути односторонньою (однобічною) – причому або лівосторонньою, або правосторонньою:

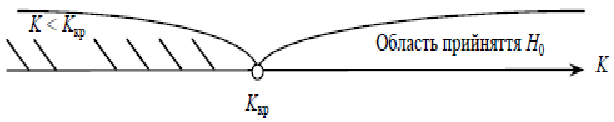


Рис. 6.1. Лівостороння критична область

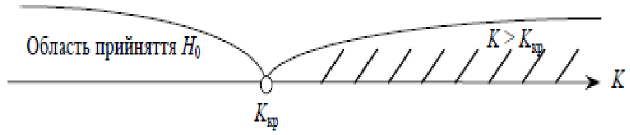


Рис. 6.2. Правостороння критична область

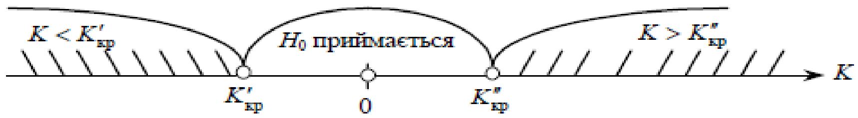


Рис. 6.3. Двостороння (двобічна) критична область

6.2. Алгоритм перевірки статистичних гіпотез

1. Сформулювати основну гіпотезу H_0 і конкуруючу H_1;
2. Обрати статистичний критерій перевірки і статистичну характеристику;
3. Задати рівень значущості α;
4. Обчислити значення статистичної характеристики за вибіркою;
5. Знайти за рівнем значущості, за відповідною таблицею критичну

точку (критичну область) для обраного критерію;

6. Зробити висновок:
   а. якщо значення статистики не потрапило в критичну область, то приймається основна гіпотеза H_0;
   б. якщо значення статистики потрапило в критичну область, то основна гіпотеза H_0 відкидається, а приймається конкуруюча гіпотеза H_1.

Зауваження 3. Варто пам'ятати, що статистична перевірка гіпотези не дає підстав до її логічного спростування або ж доведення її справедливості.

6.3. Критерій хі-квадрат (Пірсона)

Даний критерій[39] застосовують для перевірки гіпотез про закон розподілу генеральної сукупності. Найчастіше – для нормального закону розподілу, але і для інших законів розподілу теж широко застосовують.

Отже, розглядаємо вибірку об'ємом n з генеральної сукупності, розподіленої за невідомим законом розподілу. Будемо перевіряти гіпотезу про закон розподілу за алгоритмом перевірки статистичних гіпотез.

1) Сформулюємо основну гіпотезу H_0: "генеральна сукупність розподілена за *таким* законом" і конкуруючу H_1: "генеральна сукупність розподілена не за *таким* законом".

2) В якості статистичного критерію беремо критерій χ^2 (Пірсона); статистична характеристика буде χ^2 (введемо її пізніше).

3) Задаємо (або маємо з умов) рівень значущості α.

4) Множину значень вибірки слід розбити на M інтервалів (ціле число M знаходиться за раніше згаданою формулою Стерджеса $M \geq 1 + 3{,}322\lg n$): $(x_1; x_2); (x_2; x_3); \ldots; (x_M; x_{M+1})$ і для кожного з них знаходимо спочатку

---

[39] χ^2 вимовляють *хі-квадрат*.

в и б і р к о в і ч а с т о т и (число спостережень, що потрапило в даний інтервал) n_i. Контроль правильності $\sum_{i=1}^{M} n_i = n$.

Далі для кожного інтервалу $(x_1;x_2);(x_2;x_3);\ldots;(x_M;x_{M+1})$ за вказаним в H_0 законом розподілу знаходимо числа p_i – теоретичні ймовірності того, що випадкова величина X потрапить в i-ий інтервал:

$$p_i = P\{X \in (x_i;\, x_{i+1})\}, \qquad \text{контроль} \quad \sum_{i=1}^{M} p_i = 1. \tag{6.1}$$

Тепер знаходимо статистичну характеристику $\chi^2_{спостережене}$:

$$\chi^2_{спост} = \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad \text{контроль} \quad \chi^2_{спост} = \sum_{i=1}^{M} \frac{n_i^2}{np_i} - n. \tag{6.2}$$

● Величини np_i називаються т е о р е т и ч н и м и ч а с т о т а м и. Для них теж є контрольна сума: $\sum_{i=1}^{M} np_i = n$.

5) Позначимо k – число невідомих параметрів розподілу. (Для нормального розподілу k = 2, якщо невідомі MX і DX, або k = 1, якщо одна з величин MX або DX відома)

За таблицею розподілу χ^2 (Пірсона) із заданим рівнем значущості α та з

$$K = M - k - 1 \tag{6.3}$$

степенями свободи знайдемо критичне значення $\chi^2_{критичне} = \chi^2_{\alpha,K}$, тобто $\chi^2_{крит}$ знаходять з умови

$$P\left(\chi^2(K) > \chi^2_{\alpha,K}\right) = \alpha. \tag{6.4}$$

Дане $\chi^2_{крит}$ задає правосторонню критичну область.

6) Висновок: якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{крит}$, то гіпотеза H_0 приймається;

якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{крит}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Зауваження 4. Бажано, щоб для кожного інтервалу $(x_i; x_{i+1})$ значення n_i було б не меншим 5. Інакше слід об'єднати інтервали (і скласти відповідні частоти).

Зауваження 5. Інтервали зазвичай позначають з круглими дужками – $(x_i; x_{i+1})$, але межі інтервалів мають рівно по одному разу ввійти в розгляд. Як правило, працюють з інтервалами виду $(x_i; x_{i+1}]$.

Зауваження 6. При обчисленні теоретичних ймовірностей p_i область значень вибіркових даних має відповідати області значень випадкової величини, розподіленої за законом розподілу гіпотези H_0. Тобто, для нормального закону крайні інтервали будуть мати вигляд $(-\infty; x_2)$ та $(x_M; +\infty)$.

Зауваження 7. Знаходження теоретичних частот / ймовірностей.

Для нормального розподілу для знаходження теоретичних ймовірностей використовують формулу, відому з попереднього матеріалу:

$$p_i = P\{x_i < X < x_{i+1}\} = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sqrt{S^2}}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{S^2}}\right), \tag{6.5}$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\bar{x}$ – вибіркове середнє, S^2 – виправлена вибіркова дисперсія.

Для інших законів розподілу використовують формули, аналогічні (6.5).

Приклад 4. При рівні значущості α = 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності, якщо відомі вибіркові та теоретичні частоти.

Вибіркові частоти n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
Теоретичні частоти np_i	3	14	42	82	99	76	37	13

Розв'язання. Отже, об'єм вибірки n = 366, контрольні суми для вибіркових і теоретичних частот співпали; кількість інтервалів M = 8, кількість невідомих параметрів розподілу k = 2, отже кількість степенів свободи розподілу χ^2 (Пірсона) $K = M - k - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$.

З таблиці розподілу χ^2 (Пірсона) для α = 0,05 і K = 5

$$\chi^2_{крит} = \chi^2_{\alpha,K} = \chi^2_{0{,}05;\,5} = 11{,}07.$$

Обчислення статистичної характеристики $\chi^2_{спост}$ проведемо в таблиці.

	n_i	np_i	n_i-np_i	(n_i-np_i)^2	(n_i-np_i)^2/np_i
	6	3	3	9	3
	13	14	-1	1	0,0714
	38	42	-4	16	0,3810
	74	82	-8	64	0,7805
	106	99	7	49	0,4949
	85	76	9	81	1,0658
	30	37	-7	49	1,3243
	14	13	1	1	0,0769
Сума	**366**	**366**	**0**	**270**	**7,1949**

Отже, $\chi^2_{спост} = 7{,}1949$.

Висновок: оскільки $\chi^2_{спост} = 7{,}1949 < \chi^2_{крит} = 11{,}07$, то за критерієм Пірсона гіпотеза H_0 про нормальний закон розподілу даної вибірки приймається. Тобто відмінність між вибірковими і теоретичними частотами є незначною.

6.4. Критерій омега-квадрат для нормального розподілу

Даний критерій[40] застосовують для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу генеральної сукупності. Для $n \geq 15$ дає надійний результат.

Основна гіпотеза H_0:"генеральна сукупність розподілена за нормальним законом" і конкуруючу H_1: "генеральна сукупність розподілена інакше".

Статистичною характеристикою буде $\omega^2_{спост}$, яка обчислюється так:

$$\omega^2_{спост} = \sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \frac{i-0{,}5}{n}\right)^2 + \frac{1}{12n}, \tag{6.6}$$

[40] Позначають ω^2

де коефіцієнти b_i знаходять за однією з формул:

а) якщо невідоме математичне сподівання і відома дисперсія σ^2, то

$$b_i = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_{(i)} - \bar{x}}{\sigma}\right); \qquad (6.7.1)$$

б) якщо відоме математичне сподівання a і невідома дисперсія, то

$$b_i = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_{(i)} - a}{\sqrt{S^2}}\right); \qquad (6.7.2)$$

в) якщо невідомі обидва параметри, то

$$b_i = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_{(i)} - \bar{x}}{\sqrt{S^2}}\right); \qquad (6.7.3)$$

де $x_{(i)}$ – i-та варіанта (варіанти впорядковані за зростанням і їх значення можуть повторюватись), $\bar{x}$ – вибіркове середнє, S^2 – виправлена вибіркова дисперсія.

5) Для заданого рівня значущості α критичне значення $\omega_{крит} = \omega_\alpha^2$ знаходять з Таблиці 5. Дане $\omega_{крит}$ задає правосторонню критичну область.

6) Висновок: якщо $\omega^2_{спост} < \omega_{крит}$, то гіпотеза H_0 приймається;

якщо $\omega^2_{спост} > \omega_{крит}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 5. При дослідженнях зразків алюмінієвого сплаву отримані значення деякого показника: 0,320 0,327 0,390 0,409 0,285 0,292 0,305 0,308 0,252 0,420 0,340 0,430 0,261 0,310 0,360 0,298 0,299 0,313 0,315 0,290. Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл показника при рівні значущості α = 0,05.

Розв'язання. Отже, n = 20. Розташуємо вибірку в порядку зростання:

0,252 0,261 0,285 0,290 0,292 0,298 0,299 0,305 0,308 0,310

0,313 0,315 0,320 0,327 0,340 0,360 0,390 0,409 0,420 0,430.

Подальші обчислення проведемо в таблиці:

	i	x_i	x_i^2	x_i-x_cep/S	b_i	(b_i-(i-0,5)/n)^2		
	1	0,252	0,0635	-1,501	0,0667	0,0017		
	2	0,261	0,0681	-1,318	0,0937	0,0003	x_cep=	0,326
	3	0,285	0,0812	-0,832	0,2028	0,0061	S^2=	0,0024
	4	0,290	0,0841	-0,730	0,2326	0,0033	S=	0,0493
	5	0,292	0,0853	-0,690	0,2452	0,0004	omega^2=	0,1628
	6	0,298	0,0888	-0,568	0,2850	0,0001		
	7	0,299	0,0894	-0,548	0,2920	0,0011		
	8	0,305	0,0930	-0,426	0,3351	0,0016		
	9	0,308	0,0949	-0,365	0,3575	0,0046		
	10	0,310	0,0961	-0,325	0,3728	0,0105		
	11	0,313	0,0980	-0,264	0,3960	0,0166		
	12	0,315	0,0992	-0,223	0,4117	0,0267		
	13	0,320	0,1024	-0,122	0,4516	0,0301		
	14	0,327	0,1069	0,020	0,5081	0,0279		
	15	0,340	0,1156	0,284	0,6118	0,0128		
	16	0,360	0,1296	0,690	0,7548	0,0004		
	17	0,390	0,1521	1,298	0,9029	0,0061		
	18	0,409	0,1673	1,684	0,9539	0,0062		
	19	0,420	0,1764	1,907	0,9717	0,0022		
	20	0,430	0,1849	2,110	0,9826	0,0001		
Сума		6,524	2,1768		9,428	0,159		
Середнє		0,326	0,109					

Отже, $\omega^2_{спост} = 0{,}1628$, а $\omega_{крит} = 0{,}1260$, тому гіпотезу H_0 відхиляємо.

Питання та задачі до теми

1. Що таке статистична гіпотеза? Статистичний критерій?
2. Що таке помилка I роду і помилка II роду?
3. Як зменшити помилку I роду? Помилку II роду? Обидві помилки?
4. Що таке критична область і які вони бувають?
5. Сформулюйте послідовність дій при перевірці статистичних гіпотез.
6. Для перевірки яких гіпотез застосовують критерій χ^2 ? ω^2?
7. Що таке спостережені частоти? Теоретичні частоти? Як їх знаходять?

Задача 1. В таблиці наведено кількість відхилень виробів від стандарту

Межі інтервалу	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	*n*
Кількість спостережень	10	72	100	53	15	250

На рівні значущості α = 0,01 перевірити за критерієм хі-квадрат гіпотезу про нормальність розподілу відхилень виробів від стандарту.

Додаток 1. Таблиці математичної статистики

Таблиця 1. Значення функції Гауса, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

Таблиця 3. Квантилі розподілу χ^2 (Пірсона)

В таблиці наведено значення $\chi^2_{\alpha,k}$, що для $X \sim \chi^2(k)$ задовольняють рівності

$$P\left(X \le \chi^2_{\alpha,k}\right) = \alpha \quad \text{або} \quad P\left(X \ge \chi^2_{\alpha,k}\right) = 1 - \alpha$$

Число степенів свободи k	Рівень значущості α						
	0,01	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,995**
1	0,0002	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	6,6349	7,8794
2	0,0201	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	9,2103	10,5966
3	0,1148	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	11,3449	12,8382
4	0,2971	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	13,2767	14,8603
5	0,5543	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	15,0863	16,7496
6	0,8721	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	16,8119	18,5476
7	1,2390	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	18,4753	20,2777
8	1,6465	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	20,0902	21,9550
9	2,0879	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	21,6660	23,5894
10	2,5582	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	23,2093	25,1882
11	3,0535	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	24,7250	26,7568
12	3,5706	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	26,2170	28,2995
13	4,1069	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	27,6882	29,8195
14	4,6604	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	29,1412	31,3193
15	5,2293	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	30,5779	32,8013
16	5,8122	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	31,9999	34,2672
17	6,4078	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	33,4087	35,7185
18	7,0149	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	34,8053	37,1565
19	7,6327	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	36,1909	38,5823
20	8,2604	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	37,5662	39,9968
21	8,8972	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	38,9322	41,4011
22	9,5425	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	40,2894	42,7957
23	10,1957	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	41,6384	44,1813
24	10,8564	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	42,9798	45,5585
25	11,5240	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	44,3141	46,9279
26	12,1981	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	45,6417	48,2899
27	12,8785	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	46,9629	49,6449
28	13,5647	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	48,2782	50,9934
29	14,2565	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	49,5879	52,3356
30	14,9535	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	50,8922	53,6720

Таблиця 4. Квантилі розподілу Стьюдента

В таблиці наведено значення $t_{1-\alpha,k}$ та $t_{1-\frac{\alpha}{2},k}$, що задовольняють рівності

$$P\left(t(k) > t_{1-\alpha,k}\right) = \alpha \qquad \text{або} \qquad P\left(\left|t(k)\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2},k}\right) = \alpha.$$

Число степенів свободи *k*	Рівень значущості *α* для односторонньої (правої) області t_1-α,k							
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
	Рівень значущості *α* для двосторонньої області t_1-α/2,k							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

Таблиця 5. Критичні значення критерію ω^2

В таблиці наведено значення ω_α^2, що задовольняють рівності

$$P\left\{\omega^2 > \omega_\alpha^2\right\} = \alpha$$

Рівень значущості α / Невідомі параметри	0,1	0,05	0,01
Нормальний розподіл з невідомим математичним сподіванням і відомою дисперсією	0,1344	0,1653	0,2380
Нормальний розподіл з відомим математичним сподіванням і невідомою дисперсією	0,3270	0,4418	0,7245
Нормальний розподіл з невідомими математичним сподіванням та дисперсією	0,1035	0,1260	0,1788

Як працювати з таблицями математичної статистики

Правило роботи з Таблицею 1 і Таблицею 2: в стовпчику стоять **цілі** і **десяті** цифри числа x, а в рядочку – **соті** цифри числа x. Значення функції знаходиться на перетині відповідного рядку з відповідним стовпцем.

Наприклад, обчислимо значення функцій Гауса і Лапласа від $x = 1,63$. Маємо $\varphi(1,63) = 0,1057$; $\Phi(1,63) = 0,4484$.

За Таблицею 2 знаходять α–квантиль u_α нормального N(0;1) розподілу:

$$P(|X| > u_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Властивості функції Гауса (Таблиця 1)

1. $\varphi(x) > 0$;
2. $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0;$
3. найбільше значення $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
4. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, тобто функція Гауса є парною;
5. $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4$ або $x \leq -4$.

Властивості функції Лапласа (Таблиця 2)

1. $\Phi(x) > 0$;
2. $\Phi(\infty) = 0{,}5;$ $\Phi(-\infty) = -0{,}5;$
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, тобто функція Лапласа є непарною;
4. $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \geq 4$; $\Phi(x) \approx -0{,}5$ при $x \leq -4$.

Властивості квантилів розподілу χ^2 (Таблиця 3)

При $k > 30$ розподіл $\chi^2(k)$ практично не відрізняється від нормального N(k; $2k$). Тобто для таких k для знаходження необхідних квантилів можна і варто, перейшовши спочатку до стандартної випадкової величини за формулою (7.9), використовувати таблицю функції Лапласа (Таблиця 2).

Властивості квантилів розподілу Стьюдента (Таблиця 4)

При $k > 30$ розподіл $t(k)$ практично не відрізняється від нормального N(0; 1). Тобто для таких k для знаходження необхідних квантилів можна і варто використовувати таблицю функції Лапласа (Таблиця 2).

Додаток 2. Метод добутків обчислення вибіркових середніх

1. Рівновіддалені варіанти.

Нехай вибірка об'єму n задана у вигляді рівновіддалених варіант $x_1, x_2, \ldots, x_k$ і відповідних частот $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причому, оскільки варіанти рівновіддалені, то

$$x_2 = x_1 + h, \; x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h, \ldots, \; x_k = x_1 + (k-1)h,$$

де число h (відстань між сусідніми варіантами) називається **кроком варіант**.

Вибіркові середнє і дисперсію такої вибірки простіше знаходити **методом добутків**. Для цього перейдемо до умовних величин:

C – **умовний нуль**, часто це мода вибірки;

$u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$ – **умовна варіанта**; як правило, це цілі числа виду $0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Тепер обчислимо умовні моменти першого і другого порядків M_1^* та M_2^*:

$$M_1^* = Mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i n_i\,; \qquad M_2^* = Mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i\,. \tag{*}$$

Тоді шукані вибіркові середнє і дисперсія такої вибірки дорівнюють

$$\boxed{\bar{x} = M_1^* h + C\,; \qquad D_B = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right) \cdot h^2} \tag{**}$$

Контроль правильності обчислень виконують шляхом перевірки того, чи має місце рівність:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(u_i + 1)^2 n_i = M_2^* + 2M_1^* + 1.$$

Всі обчислення, в тому числі знаходження контрольної суми, доцільно виконувати в таблиці виду

x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$(u_i+1)^2 n_i$

2. Нерівновіддалені варіанти / інтервальний ряд розподілу.

Якщо варіанти не є рівновіддаленими, тоді варто спочатку перейти до інтервального ряду розподілу (з інтервалами однакової довжини h і так, щоб в кожен інтервал потрапило не менше 5 варіант). Тоді знаходять середини інтервалів, які і утворюють послідовність рівновіддалених варіант $x_1, x_2, \ldots, x_k$. В якості частот $n_1, n_2, \ldots, n_k$ беруть кількість варіант, які потрапили у відповідний інтервал. Далі обчислюють за формулами для рівновіддалених варіант.

Зауваження. При обчисленні вибіркової дисперсії для зменшення помилки, що викликана групуванням (особливо при малому числі інтервалів) роблять поправку Шеппарда:

$$D_B' = D_B - \frac{1}{12}h^2. \qquad (***)$$

Приклад. Нехай маємо вибірку, задану таблицею

Варіанта x_i	24	36	48	60	72	84	96	108
Частота n_i	6	13	38	74	106	85	30	14

Знайти вибіркові середню та дисперсію цієї вибірки.

Розв'язання. Знаходити середні величини навіть з калькулятором в цій ситуації достатньо складно і довго. Тому скористаємось методом добутків.

Отже, в даній ситуації: n = 366; h = 12; в якості хибного нуля візьмемо моду вибірки, тобто C = 72. Тепер знайдемо умовні варіанти u_i. Всі обчислення оформимо в таблицю

	x_i	n_i	u_i	u_i*n_i	u_i^2*n_i	(u_i+1)^2*n_i
	24	6	-4	-24	96	54
	36	13	-3	-39	117	52
	48	38	-2	-76	152	38
	60	74	-1	-74	74	0
	72	106	0	0	0	106
	84	85	1	85	85	340
	96	30	2	60	120	270
	108	14	3	42	126	224
Сума	528	366	-4	-26	770	1084
Середнє	*****	*****	*****	-0,071	2,104	2,962

Таким чином, $M_1^* = -0{,}071$; $M_2^* = 2{,}104$; $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(u_i+1)^2 n_i = 2{,}962$.

Перевіримо контрольну суму:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(u_i+1)^2 n_i = M_2^* + 2M_1^* + 1$$

$$2{,}962 \quad \text{чи дорівнює} \quad 2{,}104 - 0{,}141 + 1 = 2{,}963$$

– права і ліва частина співпадають, враховуючи похибки наближення.

Отже, за формулою (**) маємо:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = -0{,}071 \cdot 12 + 72 = 71{,}148;$$

$$D_B = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right) \cdot h^2 = \left(2{,}104 - (-0{,}071)^2\right) \cdot 12^2 = 2{,}099 \cdot 144 = 302{,}256.$$

Предметний покажчик

Т

У

Ф

Х

Ч

Щ

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ЦУЛ, 2010. – 424 с.

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие – Москва: Высшая школа, 2003. – 479 с. (*російською мовою*)

3. Жерновий Ю. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Тексти лекцій для студентів нематематичних спеціальностей. – Л.: ЛНУ ім. Франка, 2012. – 101 с.

4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч.1. — К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

5. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2. Глава 6. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.: іл.

6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Айрис, 2004 – 256с. (*російською мовою*)

Додаткова та практикуми

7. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988 – 439с. *(російською мовою)*

8. Глеч С. Г., Ледяєв С. Ф., Ольшанська І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – 176 с.

9. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Высшая школа, 2004. – 479 с. (*російською мовою*)

10. Руденко В. М. Математична статистика: Навчальний посібник – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

11. Томусяк А. А., Трохименко В. С., Шунда Н. М. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч.1. – Вінниця, 2001. – 334 с.

Довідники та практичне застосування

12. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – Москва: Наука, 1988. – 480 с. (*російською мовою*)

13. Горбань І. І. Теорія ймовірностей та математична статистика для наукових працівників і інженерів. – К., 2003. – 244 с.

14. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Наука, 1985. – 640с. (*російською мовою*)

15. Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. І. Теоретико-імовірносні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995.

Навчальне видання

КРИКУН Іван Григорович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Комп'ютерне складання та верстання: *І. Г. Крикун*
Макетування: *А. Д. Сорочинська*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8,8. Тираж 100 прим. Вид № 22. Зам. № 163.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.