ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ ТА ПРАВА "КРОК"»

В.Р. КІГЕЛЬ, О.І. ШАРОВ

Теорія ймовірностей для економістів і менеджерів

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

КИЇВ • 2018

УДК 519.2
К-38

Рекомендовано до друку
рішенням Вченою Радою Університету економіки та права "КРОК"»
(протокол № 3 від 24.11.2016)

Р е ц е н з е н т и:
ТОРБІН Г.М., проректор з наукової роботи
Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова,
доктор фізико-математичних наук, професор;
СУГОНЯК В.П., доцент кафедри фінансів
Українського гуманітарного інституту,
кандидат фізико-математичних наук

Кігель В.Р., Шаров О.І.

К-38 **Теорія ймовірностей для економістів і менеджерів.** Навчальний посібник: Програма та конспект лекцій із завданнями для практичних занять і самостійної роботи студентів / Володимир Романович Кігель, Олег Ігорович Шаров. – К.: ВНЗ «Університет економіки та права "КРОК"», 2018. — 144 с. ISBN 978-966-170-020-7

Навчальний посібник розроблено відповідно до програми дисципліни, яка є складовою навчального процесу підготовки бакалаврів з управлінських та економічних спеціальностей. Посібник містить навчальну програму дисципліни та конспект лекцій, кожна з яких супроводжується завданнями для практичних занять і самостійної роботи студентів. Наведено приклади економічного змісту, які ілюструють відповідні аспекти використання теорії ймовірностей в економічних дослідженнях і менеджменті.

УДК 519.2

© Кігель В.Р., Шаров О.І.
© ВНЗ «Університет економіки та права "КРОК"»

ISBN 978-966-170-020-7

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей є наступною після вищої математики складовою фундаментальної математичної підготовки майбутніх економістів і менеджерів. Вона вивчає властивості випадкових подій та закономірності у випадкових подіях і активно використовується в багатьох сферах наукової та практичної діяльності, у тому числі в економіці та менеджменті. Знання з теорії ймовірностей будуть потрібні студентам для вивчення дисциплін "Математична статистика", "Економетрія", "Оптимізаційні методи та моделі", "Ризикологія", інших навчальних дисциплін тощо, для опрацювання матеріалів практик, при написанні курсових та дипломних робіт, в подальшій професійній діяльності.

Зміст (програма) дисципліни

Тема 1. Предмет теорії ймовірностей; основні поняття. Предмет і метод теорії ймовірностей. Події, класифікація подій: вірогідні, неможливі та випадкові. Окремий випадок події, наслідок події, рівносильні події. Сумісні та несумісні події. Алгебра подій: сума та добуток подій, протилежні події; властивості дій над подіями. Повна група подій. Рівноможливі події. Означення ймовірності: класичне, геометричне, статистичне. Умовні ймовірності. Поняття про аксіоматичне визначення ймовірності. Основні формули комбінаторики та приклади їх використання при обчисленні ймовірностей різних подій.

Тема 2. Основні теореми про ймовірності. Теорема про додавання ймовірностей, її наслідки. Теорема про добуток ймовірностей, її наслідки. Формула повної імовірності. Гіпотези, їх апріорні та апостеріорні ймовірності. Формули Байєса. Економічні приклади використання основних теорем про ймовірності.

Тема 3. Випадкові величини, їх основні числові характеристики. Поняття про випадкові величини, їх класифікація (дискретні та неперервні, одновимірні та багатовимірні), економічні приклади. Дискретні випадкові величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини, його таблична, графічна та аналітична форми. Загальні властивості закону розподілу дискретної випадкової величини. Неперервні випадкові величини. Функція розподілу ймовірностей та щільність розподілу ймовірностей випадкової величини, їх властивості, зв'язок між ними, інтегральна та диференціальна функції розподілу ймовірностей. Основні числові характеристики випадкової величини (математичне сподівання, дисперсія, стандартне відхилення), формули та приклади їх обчислення, властивості, економічний зміст. Нерівність Чебишева, її модифікації, практичне значення. Визначення меж можливих значень дисперсії і стандартного відхилення обмеженої випадкової величини.

Тема 4. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин. Поширені закони розподілу ймовірностей дискретних випадкових величин: рівномірний, біноміальний, геометричний, розподіл Пуассона; основні числові характеристики відповідних випадкових величин. Теорема Бернуллі про зв'язок між частотою та ймовірністю. Економічні приклади виникнення окремих законів розподілу дискретних випадкових величин. Апроксимація біноміального закону пуассонівським. Поняття про локальну теорему Муавра-Лапласа та її використання для апроксимації біноміальних імовірностей.

Тема 5. Важливі розподіли неперервних випадкових величин. Поширені закони розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин: рівномірний, бета, трикутний (загальний та симетричний), показниковий, нормальний (загальний та стандартний); властивості та основні числові характеристики відповідних випадкових величин. Поняття про моменти випадкової величини. Асиметрія та ексцес розподілу ймовірностей. Нормальний розподіл як апроксимація біноміального та пуассонівського розподілу; інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Бета-розподіл як апроксимація нормального розподілу.

Тема 6. Сукупності випадкових величин. Поняття та економічні приклади сукупностей (систем) випадкових величин. Розподіл ймовірностей двовимірної дискретної випадкової величини; маргінальні розподіли. Функція та щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини, функції розподілу та щільності розподілу ймовірностей складових частин двовимірних випадкових величин. Основні числові характеристики окремих складових сукупності випадкових величин, правила та приклади їх обчислення. Показники ймовірнісного (стохастичного) зв'язку між двома випадковими величинами системи (коваріація та коефіцієнт кореляції), правила та приклади їх обчислення та використання в аналітичних дослідженнях.

Тема 7. Функції випадкових величин. Закон великих чисел та центральна гранична теорема. Окремі важливі розподіли, пов'язані із нормальним законом. Поняття функції випадкових величин. Функція від одного випадкового аргументу, її розподіл, математичне сподівання та дисперсія. Приклади функцій багатьох випадкових аргументів. Математичні сподівання та дисперсії суми випадкових величин, добутку двох випадкових величин. Приклади визначення закону, функції або виду розподілу ймовірностей випадкової величини, яка є функцією від інших випадкових величин, за відомими розподілами своїх випадкових аргументів. Суть закону великих чисел. Теорема Бернуллі. Закон великих чисел Чебишева. Суть центральної граничної теореми. Окремі важливі розподіли, пов'язані із нормальним законом (хі-квадрат, розподіл Стьюдента, розподіл Фішера).

Тема 8. Поняття про випадкові функції, випадкові процеси та випадкові послідовності. Випадкова функція, її перерізи. Основні характеристики випадкової функції (математичне сподівання, дисперсія, стандартне відхилення), властивості основних характеристик. Коваріаційна та кореляційна функції випадкової функції, їх властивості, приклади обчислення. Поняття про реалізацію випадкової функції. Випадкові процеси та випадкові послідовності. Стаціонарний випадковий процес, особливості його коваріаційної та кореляційної функцій. Поняття про траєкторію випадкового процесу. Приклади поширених нестаціонарних процесів (процеси з незалежними приростами, пуассонівські, вінерівські, марківські); стаціонарний стан марківської послідовності.

Л Е К Ц І Я 1

ПРЕДМЕТ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Предмет дисципліни, поняття випадкової події

Теорія ймовірностей — це математична наука, яка вивчає властивості випадкових подій, величин, систем, функцій та процесів і закономірності, притаманні цим випадковим об'єктам. Поняття випадкової події у теорії ймовірностей є первісним.

Взагалі, події поділяються на три види: вірогідні, неможливі, випадкові. **Вірогідною** (або **достовірною**) називається подія, яка в разі виконання певного комплексу умов обов'язково відбудеться, а **неможливою** — подія, яка за виконання певного комплексу умов обов'язково не відбудеться.

І, нарешті, **випадковою** називається така подія, яка за виконання певного комплексу умов може або відбутися, або не відбутися, причому кінцевий результат — відбудеться ця подія чи ні — не є наперед відомим. До того ж, якщо відповідний комплекс умов не міняється та відтворюється неодноразово, кожного разу кінцевий результат — настане ця подія чи ні — може бути неоднаковим та є непередбачуваним наперед.

Наприклад, якщо всі працівники бухгалтерії мають вищу освіту, тоді подія "Навмання вибраний працівник бухгалтерії отримав вищу освіту" є достовірною, а подія "Навмання вибраний працівник бухгалтерії не має вищої освіти" — неможливою. Коли ж лише частина працівників страхової компанії мають вищу економічну освіту, подія "Навмання вибраний працівник страхової компанії має вищу економічну освіту" є випадковою.

Інший приклад випадкової події. Припустимо, що в магазин "Hotpoint Ariston" завезли дві партії пральних машин — одну виготовили в Росії, іншу — в Туреччині. Подія, що серед 6 навмання вибраних пральних машин 2 виготовлено в Росії, а 4 — в Туреччині, є випадковою.

В реальних задачах з економіки та менеджменту майбутні ринкові ціни, валютні курси та курси акцій слушно розглядати не як детерміновані, а як випадкові величини. Прибуток підприємства, внутрішній валовий продукт країни, кількість рентабельних банківських установ, кліматичні умови сільськогосподарського виробництва також неможливо точно визначити наперед. Перелік випадкових чинників, які слід брати до уваги при розв'язуванні відповідних задач, є нескінченним. Отже, теорія ймовірностей є важливим інструментом належного обґрунтування економічних та управлінських рішень.

У багатьох підручниках з теорії ймовірностей випадкові події часто ілюструють на прикладах падіння монети (яка може впасти догори або гербом, або цифрою), кидання грального кубика (який може впасти догори будь-якою з шести цифр) або схемами з урнами ("урна" — це скриня, у якій змішані кулі різного кольору та з якої навмання беруться одна чи декілька куль).

1.2. Алгебра подій

Домовимося події позначати великими латинськими літерами (A, B, C,...) та, у разі необхідності, — літерами з індексами (A_2, D_5 тощо). Для вірогідної події також використовується позначення Ω, а для неможливої — позначення $\varnothing$.

Подія A називається **окремим випадком** події B, а подія B, у свою чергу, називається **наслідком** події A, якщо кожного разу, коли відбувається подія A, також відбувається і подія B. Це відношення між подіями A та B позначатимемо через $A \subset B$ або через $B \supset A$. Якщо, наприклад, подія "Під час кидання грального кубика випала грань із числом 3" — це A, а подія "Під час кидання грального кубика випала грань із непарним числом очок" — це B, тоді можна записати, що $A \subset B$.

Вважається, що завжди $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

Події A і B називаються **рівносильними**, якщо одночасно подія A є окремим випадком події B, а подія B є окремим випадком події A.

Рівносильність подій позначатимемо знаком " ~ ": $A \sim B$.

Дві або більше подій називаються **сумісними**, якщо поява однієї з яких не виключає можливості появи й будь-якої іншої події. Навпаки, **несумісними** є такі події, коли поява однієї з них виключає можливість появи довільної іншої з цих подій.

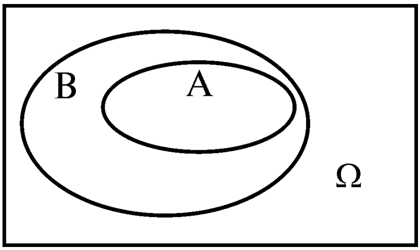
Сумою (або **об'єднанням**) двох подій A і B називається подія $C = A \cup B$, яка полягає в тому, що відбудеться принаймні одна з подій A або B (зверніть увагу, що не виключається і випадок, коли події A і B відбудуться разом).

Добутком (або **перетином**) двох подій A і B називається подія $C = A \cap B$, яка полягає в тому, що одночасно відбуваються обидві події A і B.

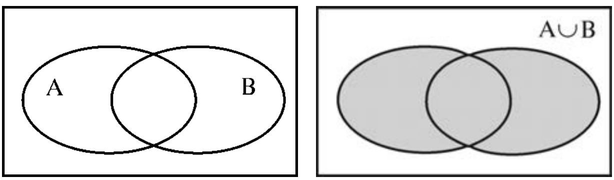
Очевидно, що добуток несумісних подій є неможливою подією, тобто дорівнює $\varnothing$.

Діаграми Ейлера-Венна дозволяють унаочнити поняття окремого випадку та наслідку подій, а також дії щодо об'єднання (додавання) та перетину (множення) двох подій (рис. 1.1).

Подія A є окремим випадком події B ($A \subset B$), а подія B, у свою чергу, є наслідком події A ($B \supset A$)



Сума $A \cup B$ подій A та B



Добуток $A \cap B$ подій A та B

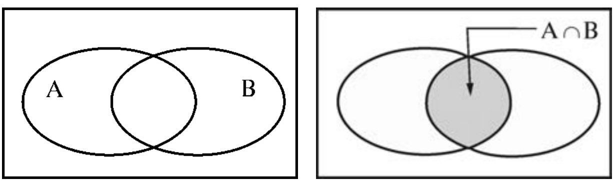


Рис. 1.1. Діаграми Ейлера-Венна

Операції додання та множення двох подій поширюються на випадок будь-якої скінченної або зліченної кількості подій. Зокрема, подія $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_i, $i \in \{\overline{1, m}\}$, а подія $B_1 \bigcap B_2 \cap \ldots \cap B_n$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається кожна з подій B_j, $j = \overline{1, n}$.

Отже, **сумою кількох подій** є подія, яка полягає у появі хоча б однієї з цих подій, а **добутком кількох подій** — подія, що полягає в сумісній появі всіх цих подій.

За допомогою діаграм Ейлера-Венна легко перевірити наступні **властивості операцій додавання та множення подій**:

- асоціативність:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\,;$$

- комутативність:

$$A \cup B = B \cup A\,,$$

$$A \cap B = B \cap A\,;$$

- дистрибутивність:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

Дві події A і B називаються **протилежними**, якщо їхній добуток є неможливою подією, а сума — достовірною подією. Скажімо, при однократному підкиданні монети події "Випадання герба" і "Випадання цифри" є протилежними.

Подія B, якщо вона є протилежною до події A, зазвичай позначається через $\overline{A}$ (читається: "не A"); відповідно, подія A, якщо вона є протилежною до події B, позначиться через $\overline{B}$.

З означення протилежності подій випливає, що $A \cap \overline{A} = \varnothing$ та $A \bigcup \overline{A} = \Omega$. Очевидно, що $\overline{\overline{A}} = A$. Вважається також, що $\overline{\varnothing} = \Omega$ і $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Діаграмами Ейлера-Венна нескладно переконатися у наступних **властивостях протилежних подій**:

• протилежною до суми двох подій є добуток подій, протилежних до подій-доданків: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

• протилежною до добутку двох подій є сума подій, протилежних до подій-множників: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

Декілька подій утворюють **повну групу подій**, якщо вони попарно несумісні та їх сума є достовірною подією. Наприклад, дві протилежні події A та $\overline{A}$ являють собою повну групу подій. В загальному випадку, n подій A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу подій, якщо $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ та $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$ при $i \neq j$.

Наприклад, при одноразовому киданні грального кубика події "Випадання парної цифри", "Випадання цифри 1" і "Випадання цифри 3" не утворюють повної групи, оскільки ще може випасти цифра 5.

Події називають **рівноможливими**, якщо є підстави вважати, що жодна з цих подій не є більш можливою, ніж інша.

Наприклад, при одноразовому підкиданні правильного грального кубика події "Випало парне число" та "Випало непарне число" є рівноможливими. Рівноможливими також є події "Випала цифра 1", "Випала цифра 2", "Випала цифра 4" та "Випала цифра 6". Навпаки, події "Випала цифра 3" та "Випало парне число" не є рівноможливими.

Очевидно також, що рівноможливими є будь-які рівносильні між собою події.

1.3. Імовірність події

Імовірністю події A називається число $P\{A\}$ /воно може позначатися також через $p(A)$, p_A або просто через p/, що знаходиться в межах від 0 до 1 та є кількісною оцінкою можливості настання цієї події. Тобто ймовірність події є тим вищою, чим більшою є можливість її настання.

Імовірність неможливої події покладають рівною 0, імовірність достовірної події — рівною 1. Отже, $P\{\varnothing\} = 0$ та $P\{\Omega\} = 1$.

Далі, зокрема, якщо $A \subset B$, тоді $P\{A\} \le P\{B\}$, а якщо, скажімо, $C \sim D$, тоді $P\{C\} = P\{D\}$.

Нарешті, для довільної події A справджується нерівність: $0 \le P\{A\} \le 1$.

Класичне визначення ймовірності. Якщо подія A є сумою m інших подій з повної групи n рівноможливих подій, тоді $P\{A\} = \dfrac{m}{n}$.

Наприклад, при одноразовому підкиданні правильного грального кубика $P\ \{\textit{Випала}\quad \textit{парна}\quad \textit{цифра}\} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$.

При використанні класичного визначення ймовірності слушно користуватися, коли це можливо, комбінаторними формулами для обчислення кількості різних видів сполук. Нагадаємо, що **сполуками** називаються групи елементів, об'єднаних за деякою ознакою. Розрізняють такі сполуки: перестановки, сполучення та розміщення.

Комбінаторні формули ґрунтуються на **теоремі множення**: якщо в парі елементів перший елемент можна обрати m різними способами, а другий елемент — n різними способами, тоді кількість способів, якими може бути обрана ця пара елементів, дорівнює $m \cdot n$.

Перестановки — це сполуки, які відрізняються тільки порядком елементів; кількість перестановок із n різних елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, оскільки перший елемент перестановки із n різних елементів можна обрати n способами, другий — $(n-1)$ способами, і так далі, нарешті останній елемент перестановки буде обрано лише одним способом.

Якщо, наприклад, на шести картках написані букви, відповідно, T, E, O, P, I та $Я$, тоді ймовірність події, що мавпа, яка не вміє читати, складе з них слово "*ТЕОРІЯ*", дорівнює числу, оберненому до кількості усіх можливих перестановок з шести елементів, тобто числу $\dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720} \approx 0{,}00139$.

Сполучення — це сполуки, кожна з яких містить по k елементів, обраних з множини, що складається з n елементів, які відрізняються між собою лише обраними елементами. Кількість таких сполучень позначається через C_n^k та обчислюється за формулою: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Наприклад, кількість сполучень по 2 елементи з множини, що містить 10 різних елементів, дорівнює: $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!\,(10-2)!} = \dfrac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 45$.

Нарешті, **розміщення** — це такі сполуки, кожна з яких містить по k елементів, обраних з множини, що складається з n елементів; причому ці сполуки відрізняються між собою або самими елементами, або їх послідовністю. Кількість розміщень позначається символом A_n^k та обчислюється за формулою: $A_n^k = C_n^k P_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Скажімо, кількість розміщень по 3 елементи з множини, що містить 5 різних елементів, дорівнює: $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Приклад. У відділі з врегулювання претензій СК "Промінь" працює 9 осіб. З них чотири співробітники мають вищу економічну, а п’ять — вищу юридичну освіту. На збори представників трудового колективу цієї страхової компанії від відділу було делеговано чотири особи. Яка ймовірність події, що у складі делегації є один економіст і три юристи?

Розв’язування. Кількість різних однаково ймовірних способів, якими можна з дев’яти осіб сформувати делегацію у складі чотирьох осіб, дорівнює числу сполучень C_9^4. Кількість різних способів обрати одного з чотирьох економістів дорівнює числу сполучень C_4^1, а кількість різних способів обрати трьох з п'яти юристів — числу C_5^3. Отже, кількість різних способів сформувати з працівників відділу делегацію, у складі якої один економіст і три юристи, дорівнює добутку $C_4^1 C_5^3$. Таким чином, ймовірність P події, що у складі нашої делегації є один економіст і три юристи, дорівнює:

$$P = \frac{C_4^1 C_5^3}{C_9^4} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{4!(9-4)!}{9!} =$$

$$= 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{20}{63} \approx 0,317.$$

Приклад розв'язано.

Геометричне визначення ймовірності. Нехай Ω — деяка геометрична множина точок, S — її підмножина, а подія A полягає у тому, що навмання вибрана з множини Ω точка належатиме множині S. Тоді ймовірністю $P\{A\}$ події A є відношення міри множини S до міри множини Ω. При цьому міра множини визначається як довжина, площа або об'єм геометричної фігури, якою є ця множина, залежно від того, де саме вона міститься — на прямій, на площині чи у просторі.

Якщо, наприклад, дві особи домовилися зустрітися біля головпоштамту між 13-ю та 14-ю годинами дня, причому особа, яка з'явиться першою, чекатиме на другу особу не більше 20 хвилин (20 хвилин — це $^1/_3$ години), тоді ймовірність P події, що їх зустріч таки відбудеться, дорівнює відношенню площі геометричної фігури, що лежить у площині xOy та визначена умовами: $13 \le x \le 14$, $13 \le y \le 14$, $|x - y| \le 1/3$, до площі квадрата: $13 \le x \le 14$, $13 \le y \le 14$, де через x і y позначено випадкові моменти часу приходу до головпоштамту кожної з осіб. Отже, $P = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0,556$. Водночас слід зауважити, що цей результат є правильним за умов, що для кожної особи всі моменти її приходу на місце зустрічі є випадковими та рівноможливими.

Статистична ймовірність. Припустимо, що один і той самий певний комплекс умов, за виконанням якого може або відбутися, або не відбутися випадкова подія A, відтворювався n раз, причому відомо, що подія A відбулася m раз та не відбулася

$(n-m)$ раз. Тоді статистична ймовірність $P\{A\}$ події A обчислюється за формулою: $P\{A\}=\dfrac{m}{n}$.

Наприклад, якщо в місті за рік народилося 1547 немовлят, з яких були 781 дівчинка та 766 хлопчиків, тоді (статистична) ймовірність, що новонароджене немовля буде хлопчиком — P — дорівнює: $P=\dfrac{766}{1547}\approx 0,4952$.

Подія *A* називається **незалежною** від події *B*, якщо імовірність події *A* не залежить від того, відбудеться (або відбулася) чи не відбудеться (або не відбулася) подія *B*, тобто імовірність події *A* не залежить від імовірності події *B*. Навпаки, якщо імовірність події *A* залежить від імовірності події *B*, подія *A* називається **залежною** від події *B*.

1.4. Умовна ймовірність

Умовною імовірністю події A **відносно події** B називається імовірність $P_B\{A\}$ події A, обчислена за умов, що подія B вже відбулася.

Якщо подія A не залежить від події B, тоді $P_B\{A\}=P\{A\}$, у супротивному випадку — коли подія A залежить від події B — маємо нерівність: $P_B\{A\}>P\{A\}$.

Наприклад, якщо, при одноразовому киданні грального кубика розглянути події A = {*Випала цифра* 3} і B = {*Випала непарна цифра*}, тоді $P\{A\}=\dfrac{1}{6}$, а $P_B\{A\}=\dfrac{1}{3}$.

Зверніть увагу, що незалежність події *A* від події *B* одночасно означає і незалежність події B від події A, а з незалежності між собою подій A та B випливає і незалежність між собою подій $\overline{A}$ та B, подій A та $\overline{B}$, а також подій $\overline{A}$ та $\overline{B}$.

1.5. Поняття про аксіоматичне визначення ймовірності

Сучасна теорія ймовірностей є сформованою математичною наукою та побудована аксіоматично. Позначимо множину усіх можливих взаємовиключних елементарних (таких, що не можуть бути розкладені на простіші) подій через Ω та назвемо цю множину достовірною подією. Поряд з множиною Ω розглядатимемо і порожню множину $\varnothing$, яка відповідає неможливій події, та вважатимемо, що $\varnothing = \overline{\Omega}$. Окремі елементи множини Ω та такі її підмножини, що відрізняються від Ω, позначатимемо великими латинськими літерами (без індексів або індексами) та вважатимемо, що вони відповідають певним випадковим подіям. Несумісними вважатимемо такі дві події, добуток яких є неможливою подією, а протилежними — такі дві несумісні події, сума яких є достовірною подією.

Побудуємо, виходячи з множини Ω та певних, не обов'язково усіх, її підмножин, таку множину подій $\Im$ (так звану σ-алгебру), для якої $\Omega \in \Im$; $\overline{A} \in \Im$, якщо $A \in \Im$; а також $A \cup B \in \Im$, якщо $A \in \Im$ і $B \in \Im$. Тоді $\varnothing \in \Im$ (тому що $\varnothing = \overline{\Omega}$) і $A \cap B \in \Im$ (тому що $A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}}$, а $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$).

Нагадаємо, що операції додавання ($\cup$) та множення ($\cap$) подій є асоціативними, комутативними та дистрибутивними й поширюються на довільну скінченну або зліченну кількість аргументів, а результати таких операцій теж є подіями, що містяться в множині $\Im$.

За аксіоматичним визначенням, **ймовірністю** називається така числова функція $P\{\cdot\}$, визначена на множині $\Im$, яка задовольняє наступні властивості (аксіоми):

a_1) ймовірність довільної події невід'ємна: $A \in \Im \Rightarrow P\{A\} \ge 0$;

a_2) ймовірність достовірної події дорівнює 1: $P\{\Omega\} = 1$;

a_3) ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$; причому ця властивість поширюється і на суму довільної скінченної або зліченної кількості попарно несумісних подій.

З цих аксіом випливають, зокрема, **основні властивості ймовірності**:

1) $P\{\varnothing\} = 0$;

2) $P\{\overline{A}\} = 1 - P\{A\}$ (нагадаємо, що через $\overline{A}$ позначено подію, протилежну до A);

3) $A \subset B \Rightarrow P\{A\} \le P\{B\}$;

4) $0 \le P\{A\} \le 1$;

5) $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$;

6) якщо $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ та $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \varnothing$, тоді $\lim_{j \to \infty} P\{A_j\} = 0$.

Скажімо, п'ята властивість є наслідком аксіоми а_3, якщо брати до уваги властивості дій над подіями. Дійсно, подамо подію A як суму двох несумісних подій $A \cap \overline{B}$ та $A \cap B$, подію B — як суму двох несумісних подій $\overline{A} \cap B$ та $A \cap B$, а подію $A \cup B$ — як суму трьох попарно несумісних подій $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ та $A \cap B$:

$$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B),$$

$$B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B),$$

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B).$$

Тоді, враховуючи у кожній з наведених сум попарну несумісність подій-доданків, матимемо наступні співвідношення між ймовірностями відповідних подій:

$$P\{A\} = P\{A \cap \overline{B}\} + P\{A \cap B),$$

$$P\{B\} = P\{\overline{A} \cap B\} + P\{A \cap B\},$$

$$P\{A \cup B\} = P\{A \cap \overline{B}\} + P\{\overline{A} \cap B\} + P\{A \cap B\}.$$

Отже,

$$P\{A \cup B\} = [P\{A\} - P\{A \cap B\}] + [P\{B\} - P\{A \cap B\}] + P\{A \cap B\} =$$

$$= P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\},$$

що і треба було довести.

Щодо **умовної ймовірності** події A відносно події B — $P_B\{A\}$, то в аксіоматичній теорії вона визначається як відношення ймовірності добутку $A \cap B$ цих подій до ймовірності події B за умов, що ймовірність події B відмінна від нуля:

$$P_B\{A\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}, \text{ якщо } P\{B\} \ne 0.$$

Коли подія A **не залежить** від події B, тоді $P\{A\} = P_B\{A\}$, тобто для **незалежних** між собою подій маємо рівність: $P\{A \cap B\} = = P\{A\} \cdot P\{B\}$.

Насамкінець зазначимо, що класичне, геометричне та статистичне визначення ймовірності повністю відповідають визначенню імовірності в аксіоматичний спосіб. Але аксіоматичне визначення ймовірності не має інструментів обчислення конкретних числових значень ймовірностей випадкових подій. Тому при розв'язуванні практичних задач для обчислення ймовірностей використовують, залежно від контексту, класичне, геометричне або статистичне визначення.

1.6. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

1.6.1. За підсумками року кращого робітника підприємства нагороджують грамотою (подія A), грошовою премією (подія B), цінним подарунком (подія C). Охарактеризувати такі події: $A \cup B$, $\overline{A} \cap C$, $A \cap B \cap C$.

1.6.2. Задано множину чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, з якої навмання вибирають одне число. Подія A полягає в тому, що вибране число ділиться на 5, подія B — що вибране число є парним. Описати явно події A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup \overline{\overline{B}}}$, $\overline{A \cap \overline{\overline{B}}}$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ та обчислити імовірності цих подій.

1.6.3. На кафедрі економіко-математичних методів фахівцями з теорії ймовірностей є 5 викладачів. До екзаменаційної комісії увійдуть три з них. Скільки існує різних варіантів формування екзаменаційної комісії?

1.6.4. В урні міститься 10 куль, серед них 6 білих та 4 чорних. З неї навмання вибрано 5 куль. Обчислити ймовірності таких подій:

- $A =$ "*Усі вибрані кулі є білими*",
- $B =$ "*Хоча б дві з узятих куль є чорними*".

1.6.5. Чотири співробітники повинні написати звіт з 17 розділів. Перший та другий співробітники мають написати по 5 розділів, третій — 4, четвертий — 3 розділи. Скількома різними способами можна розподілити розділи звіту між співробітниками?

1.6.6. У кіоску є десять різних вітальних листівок, причому п'ять листівок коштують по 4 грн., три листівки — по 1 грн., дві листівки — по 3 грн. Листівки перемішані. Яка імовірність події, що взяті навмання дві листівки коштуватимуть 5 грн.?

1.6.7. На однакових шести картках написані літери Н, О, Г, К, И, А. Усі картки перемішали, а потім навмання взяли п'ять з них і розклали в ряд. Яка імовірність події, що утвориться слово "КНИГА"?

1.6.8. В ліфті 5 пасажирів. Ліфт зупиняється на 15 поверхах. Яка ймовірність події, що жодні два пасажири не вийдуть на одному й тому самому поверсі?

1.6.9. В коло вписаний прямокутник з відношенням сторін 3:4. Знайти ймовірність події, що навмання кинута в коло точка попаде в площу прямокутника.

1.6.10. Менеджер з реклами набирає телефонний номер, але забув 3 останні цифри. Він пам'ятає, що вони різні, та набирає їх навмання. Яка імовірність події, що набраний номер виявиться правильним?

Л Е К Ц І Я 2

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ЙМОВІРНОСТІ

2.1. Теорема про додавання ймовірностей

Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність добутку цих подій:

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}.$$

Цю теорему, фактично, було вже доведено, коли ми знайомилися з аксіоматичним визначенням імовірності. Зараз проілюструємо справедливість теореми на основі статистичного визначення ймовірності.

Припустимо, що один і той самий комплекс умов відтворювався n раз, причому подія A відбулася n_A раз, подія B — n_B раз, у тому числі одночасно відбулися події A та B $n_{A \cap B}$ разів. Очевидно, що $0 \le n_{A \cap B} \le n_A \le n$, $0 \le n_{A \cap B} \le n_B \le n$.

Щодо кількості $n_{A \cup B}$ випадків, коли відбулася принаймні одна з подій A або B, то вона дорівнює: $n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$ (величину $n_{A \cap B}$ віднімаємо від суми $n_A + n_B$, оскільки в цій сумі $n_{A \cap B}$ зустрічається двічі).

Отже,

$$P\{A \cup B\} = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B - n_{A \cap B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{A \cap B}}{n} =$$

$$= P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}.$$

Теорему про додавання ймовірностей доведено.

З теореми про додавання ймовірностей випливають і такі наслідки.

Наслідок 1. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$\text{якщо } A \cap B = \varnothing, \text{ тоді } P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Примітка. Якщо користуватися статистичним визначенням імовірності, потрібно взяти до уваги, що несумісні події одночасно відбутися не можуть, тобто $n_{A \cap B} = 0$.

Наслідок 2. Імовірність суми довільної скінченної або зліченної кількості попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$\text{якщо } B_i \cap B_j = \varnothing \text{ для всіх } i, j = \overline{1, n}, \ i \neq j,$$

$$\text{тоді } P\{\bigcup_{j=1}^{n} B_j\} = \sum_{j=1}^{n} P\{B_j\}.$$

Примітка. В аксіоматичній теорії наслідки 1 і 2 розглядаються як аксіоми, а теорема додавання ймовірностей — як наслідок відповідних аксіом. Водночас узгодженість між собою класичного, геометричного, статистичного та аксіоматичного визначень дозволяють щоразу при опрацюванні властивостей імовірностей звертатися до такого з визначень, яке є більш наочним і зручним у використанні.

Наслідок 3. Якщо n подій A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу подій, тоді справджуються рівності:

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \ldots + P\{A_n\} = 1.$$

Наслідок 4. Імовірність події A обчислюється через відому ймовірність протилежної до неї події $\overline{A}$ за формулою:

$$P\{A\} = 1 - P\{\overline{A}\}.$$

Якщо наприклад, в урні лежить три жовті та п'ять синіх кульок, ймовірність події A, що серед навмання вибраних з урни чотирьох кульок є хоча б одна жовта, можна обчислити через імовірність події $\overline{A}$, яка полягає в тому, що серед цих вибраних чотирьох кульок всі кульки сині.

Отже,

$$P\{\overline{A}\}=\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{5!}{4!\,(5-4)!}\cdot\frac{4!\,(8-4)!}{8!}=\frac{5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=\frac{1}{14}\approx 0{,}071,$$

тому $P\{A\}=1-0{,}071=0{,}929$.

2.2. Теорема про добуток ймовірностей

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої події, обчислену у припущенні, що відбулася перша подія:

$$P\{A\cap B\}=P\{A\}\cdot P_A\{B\}=P\{B\}\cdot P_B\{A\}$$

Наслідок 1. Умовну ймовірність події A — $P_B\{A\}$ — можна обчислити як частку від ділення ймовірності добутку подій A і B на імовірність події B:

$$P_B\{A\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}};$$

аналогічно, умовну ймовірність події B – $P_A\{B\}$ — можна обчислити як частку від ділення ймовірності добутку подій A і B на ймовірність події A:

$$P_A\{B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{A\}}.$$

Наслідок 2. Якщо подія A є незалежною від події B, тобто $P_B\{A\}=P\{A\}$, тоді подія B, у свою чергу, є незалежною від події A, оскільки $P_A\{B\}=P\{B\}$; отже, про події A і B можна говорити також, що вони є незалежними.

Наслідок 3. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

якщо події A і B є незалежними,
тоді $P\{A\cap B\}=P\{A\}\cdot P\{B\}$.

Приклад. Особа відкрила депозитний рахунок у вітчизняному банку на суму 100 тис. грн. під 15 % річних, а також інвестувала 200 тис. грн. в закордонний інноваційний проект з очікуваною через рік прибутковістю 25 %. Імовірність банкрутства банку оцінюється як 0,01, а імовірність, що інноваційний проект буде успішно реалізовано, оцінюється як 0,9. Яка ймовірність, що капітал особи через рік становитиме 365 тис. грн., якщо події банкрутства вітчизняного банку та провалу закордонного інноваційного проекту є незалежними?

Розв'язування. Позначимо через A подію, що банк виявиться фінансово стійким, тобто що через рік особа зможе отримати депозит (100 тис. грн.) плюс відсотки (15 тис. грн.), а через B позначимо подію, що закордонний інноваційний проект буде успішно реалізованим і дохід особи за ним складе 250 тис. грн. Отже, подія, що капітал особи через рік становитиме 365 тис. грн., є добутком $A \cap B$. Події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ вважаються незалежними, тому незалежними можна вважати і події A та B. Отже,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\} = (1 - P\{\overline{A}\}) \cdot P\{B\}) = (1 - 0,01) \cdot 0,9 = 0,891 .$$

Приклад розв'язано.

2.3. Формула повної імовірності

Нехай є повна група подій H_1, H_2, ..., H_n, імовірності яких дорівнюють $P\{H_1\}$, $P\{H_2\}$, ..., $P\{H_n\}$, та подія A, щодо якої відомі всі умовні ймовірності $P_{H_j}\{A\}$ відносно кожної з гіпотез H_j, $j = \overline{1, n}$. Тоді ймовірність події A можна обчислити за формулою:

$$P\{A\} = \sum_{j=1}^{n} P\{H_j\} P_{H_j}\{A\} .$$

Доведення. Оскільки $\bigcup_{j=1}^{n} H_j = \Omega$, подію A можна подати у вигляді:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} H_j \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap H_j) .$$

Події H_1, H_2, ..., H_n попарно несумісні, тому попарно несумісними є також події $A \cap H_1$, $A \cap H_2$, ..., $A \cap H_n$. За теоремами про додавання та про добуток ймовірностей остаточно отримаємо:

$$P\{A\} = P\left\{\bigcup_{j=1}^{n}(A \cap H_j)\right\} = \sum_{j=1}^{n} P\{A \cap H_j\} = \sum_{j=1}^{n} P\{H_j\}P_{H_j}\{A\}.$$

Формулу повної імовірності доведено.

Події H_1, H_2, ..., H_n в формулі повної ймовірності події A називаються **гіпотезами**. Отже, (повна) ймовірність події A є сумою добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовні ймовірності події A за кожною з відповідних гіпотез.

Приклад. *Задача про інвестування* (інша назва — *задача про банкрутство*). Особа, яка має початковий капітал у сумі 1000 грошових одиниць, щодня вкладає весь наявний капітал у миттєвий ризиковий проект, що може або з імовірністю ½ збільшити вкладений капітал на 1 грошову одиницю, або, теж з імовірністю ½, зменшити вкладений капітал на 1 грошову одиницю. Обчислити ймовірність події, що здійснюючи таке інвестування дуже велику кількість разів, особа врешті решт збанкрутує, якщо відомо, що вона припинить інвестування і у випадку, коли її капітал збільшиться до 3000 грошових одиниць.

Розв'язування. Позначимо через n розмір поточного капіталу особи ($n = 0, 1, 2, \ldots$), а через A_n — подію, що вона, маючи капітал у сумі n грошових одиниць, успішно закінчить процес інвестування, збільшивши свій капітал до 3000 грошових одиниць. Через p_n позначимо ймовірність події A_n: $p_n = P\{A_n\}$.

За умовами задачі, $p_0 = P\{A_0\} = 0$ — втрата капіталу не дозволяє продовжувати процес інвестування, а $p_{3000} = P\{A_{3000}\} = 1$ — особа збільшила власний капітал до 3000 грошових одиниць та припинила подальше інвестування.

Подія, що особа починає з капіталу у розмірі 1000 грошових одиниць та збанкрутує — це подія, протилежна до події A_{1000}. Отже, потрібно знайти ймовірність $P\{\overline{A}_{1000}\}$.

Врахуємо, що $P\{\overline{A}_{1000}\} = 1 - P\{A_{1000}\}$, та обчислимо спочатку, керуючись формулою повної ймовірності, ймовірність $p_{1000} = P\{A_{1000}\}$, виходячи з таких співвідношень:

• при $n = 1$: $p_1 = \frac{1}{2} p_2$, оскільки наявний капітал у розмірі однієї грошової одиниці з ймовірностями по ½ особа може або втратити, або збільшити до двох грошових одиниць; отже, $p_2 = 2\, p_1$;

• при $2 \le n \le 2999$: $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n+1}$, оскільки інвестуючи n грошових одиниць особа з ймовірностями по ½ матиме капітал у розмірі або $n-1$, або $n+1$ грошових одиниць; тобто маємо і таку рівність: $p_{n+1} = 2\, p_n - p_{n-1}$.

Отже,

$$0 \le p_1 \le 1,\ p_2 = 2\, p_1,$$

$$p_3 = 2\, p_2 - p_1 = 4\, p_1 - p_1 = 3\, p_1,$$

$$p_4 = 2\, p_3 - p_2 = 6\, p_1 - 2 p_1 = 4\, p_1, \text{ і так далі.}$$

Узагальнити ці співвідношення можна формулою: $p_n = n\, p_1$, яка чинна для всіх $n \ge 1$.

Тому з рівняння $p_{3000} \equiv 3000 p_1 = 1$ спочатку знайдемо $p_1 = \frac{1}{3000}$, після чого обчислимо $p_{1000} \equiv 1000 p_1 = 1000 \cdot \frac{1}{3000} = \frac{1}{3}$ та $P\{\bar{A}_{1000}\} \equiv$ $\equiv 1 - p_{1000} = \frac{2}{3}$.

Задачу про інвестування розв’язано.

2.4. Формули Байєса

З’ясуємо тепер, як обчислити ймовірності кожної з гіпотез $P_A\{H_j\}$, $j = \overline{1, n}$, якщо стало відомо, що подія A відбулася.

З теореми про добуток ймовірностей випливає, що:

$$P\{A \cap H_j\} = P\{A\} \cdot P_A\{H_j\} = P\{H_j\} \cdot P_{H_j}\{A\}.$$

Звідси слідує, що $P_A\{H_j\} = \frac{P\{H_j\} \cdot P_{H_j}\{A\}}{P\{A\}}$.

Залучаючи далі формулу повної ймовірності події A, остаточно й одержимо **формули Байєса**:

$$P_A\{H_j\} = \frac{P\{H_j\} \cdot P_{H_j}\{A\}}{\sum_{j=1}^{n} P\{H_j\} P_{H_j}\{A\}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким чином, формули Байєса дозволяють за наявності додаткової інформації, що подія A відбулася, переоцінити первісні (**апріорні**) ймовірності гіпотез.

Переоцінені апріорні ймовірності називають **апостеріорними**.

Приклад. В магазин надійшли електричні лампи одного типу, виготовлені на трьох лампових заводах: із першого заводу — 250 штук, з другого — 450 штук, з третього — 300 штук. Імовірність того, що лампочка буде горіти більше 1500 годин, для першого заводу становить 0,15, для другого — 0,30; для третього — 0,20. При розкладанні по полицях магазину лампи були перемішані. Яка ймовірність події, що куплена лампа буде горіти більше 1500 годин? На якому заводі найімовірніше така лампа була виготовлена?

Розв'язування. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що вибрана лампа буде горіти більше 1500 годин, а H_1, H_2, H_3 - гіпотези, що лампа виготовлена, відповідно, першим, другим або третім заводом. Загальна кількість ламп дорівнює 1000, тому ймовірності відповідних гіпотез такі:

$$P\{H_1\} = \frac{250}{1000} = 0,25\,; \quad P\{H_2\} = \frac{450}{1000} = 0,45\,; \quad P\{H_3\} = \frac{300}{1000} = 0,30\,.$$

За умовою задачі, $P_{H_1}\{A\} = 0,15$, $P_{H_2}\{A\} = 0,30$, $P_{H_3}\{A\} = 0,20$. Тому за формулою повної ймовірності одержимо:

$$P\{A\} = 0,25 \cdot 0,15 + 0,45 \cdot 0,30 + 0,30 \cdot 0,20 = 0,2325\,.$$

Далі за формулою Байєса обчислюємо умовні ймовірності кожної з гіпотез відносно події A:

$$P_A\{H_1\} = \frac{0,25 \cdot 0,15}{0,2325} \approx 0,1613\,,$$

$$P_A\{H_2\} = \frac{0,45 \cdot 0,30}{0,2325} \approx 0,5806\,,$$

$$P_A\{H_3\} = \frac{0,30 \cdot 0,20}{0,2325} \approx 0,2581\,.$$

Отже, ймовірність події, що куплена лампа буде горіти більше 1500 годин, дорівнює 0,2325, причому найбільш імовірно, що вона виготовлена на другому заводі.

Приклад розв'язано.

Приклад. Опрацюємо ще один приклад використання основних теорем про ймовірності. Нехай відомо, що два з трьох відділень банку, які працюють незалежно одне від одного, у минулому році виявилися збитковими. Яка ймовірність події, що збитковими були саме перше та друге відділення, якщо для кожного окремого відділення ймовірність бути збитковим оцінювалась, відповідно, як 0,15, 0,20 та 0,25?

Сформулюємо такі гіпотези:

H_1 — беззбитковим було лише перше відділення, друге та третє відділення закінчили рік із збитками;

H_2 — беззбитковим було лише друге відділення, а перше та третє — збитковими;

H_3 — беззбитковим було лише третє відділення, а перші два — збитковими.

Кожна з наведених гіпотез є відповідним добутком трьох попарно незалежних подій. Тому за теоремою про добуток імовірностей знайдемо безумовні ймовірності цих гіпотез:

$$P\{H_1\} = (1 - 0,15) \cdot 0,20 \cdot 0,25 = 0,0425\,,$$

$$P\{H_2\} = 0,15 \cdot (1 - 0,20) \cdot 0,25 = 0,0300\,,$$

$$P\{H_3\} = 0,15 \cdot 0,20 \cdot (1 - 0,25) = 0,0225\,.$$

Нам потрібно знайти умовну ймовірність $P_A\{H_3\}$ гіпотези H_3 відносно такої події A, яка полягає у тому, що два з трьох відділень банку виявилися збитковими.

Насамперед зазначимо, що за виконання будь-якої з гіпотез H_1, H_2 або H_3 подія A стає достовірною, тобто $P_{H_1}\{A\} = P_{H_2}\{A\} = P_{H_3}\{A\} = 1$.

Доповнимо гіпотези H_1, H_2 і H_3 до повної групи подій ще такими трьома гіпотезами:

H_4 — жодне з трьох відділень банку не було збитковим;

H_5 — лише одне з трьох відділень було збитковим;

H_6 — збитковими виявилися всі три відділення.

Умовні ймовірності кожної з цих гіпотез відносно події A дорівнюють нулю: $P_A\{H_4\} = P_A\{H_5\} = P_A\{H_6\} = 0$. Отже, нульовими будуть і добутки $P\{A\} \cdot P_A\{H_4\}$, $P\{A\} \cdot P_A\{H_5\}$ та $P\{A\} \cdot P_A\{H_6\}$.

Тепер скористаємося формулою повної ймовірності:

$$P\{A\} = P\{H_1\} \cdot P_{H_1}\{A\} + P\{H_2\} \cdot P_{H_2}\{A\} + P\{H_3\} \cdot P_{H_3}\{A\} +$$

$$+P\{H_4\} \cdot P_{H_4}\{A\} + P\{H_5\} \cdot P_{H_5}\{A\} + P\{H_6\} \cdot P_{H_6}\{A\} =$$

$$= 0,0425 \cdot 1 + 0,0300 \cdot 1 + 0,0225 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = 0,0950 .$$

Остаточно, за формулою Байєса, обчислимо й шукану ймовірність:

$$P_A\{H_3\} = \frac{P\{H_3\} \cdot P_{H_3}\{A\}}{P\{A\}} = \frac{0,0425}{0,0950} \approx 0,4474 .$$

Приклад розв’язано.

2.5. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

2.5.1. Два підприємці надіслали на ринок свої товари. Ринкові ціни вважаються випадковими. Ймовірність отримати прибуток (прибуток — це різниця між доходом від реалізації та витратами на виготовлення та реалізацію) для першого підприємця дорівнює 0,9, а для другого — 0,8.

Яка ймовірність того, що:

- хоча б один підприємець отримає прибуток;
- лише один підприємець отримає прибуток;
- жоден з підприємців не матиме прибутку від реалізації своєї продукції?

2.5.2. В одній скрині 5 білих і 10 червоних куль, в другій скрині — 10 білих і 5 червоних куль. З кожної скрині навмання взяли по три кулі. Знайти ймовірність того, що серед взятих шести куль:

- хоча б одна біла;
- білою є лише одна куля.

2.5.3. З метою запобігання крадіжкам в офісі фінансової установи встановлено дві незалежні охоронні системи. Ймовірність того, що у випадку злочинних дій спрацює перша система, дорівнює 0,95, а що спрацює друга система — 0,90. Знайти ймовірність, що у випадку спроби злодіїв зчинити крадіжку:

- спрацюють обидві системи;
- спрацює лише одна система;
- жодна з систем не спрацює.

2.5.4. У продаж надійшли телевізори з трьох заводів. Частка виробів першого заводу становить 30%, другого — 20%, третього — 50%. Продукція першого заводу містить у собі 2 % телевізорів з прихованим дефектом, другого — 5 %, третього — 1 %. Яка імовірність купити якісний телевізор?

2.5.5. Студент з 30 питань опрацював лише 24. У білеті 3 питання. Яка ймовірність, що він наведе правильні відповіді на всі питання?

2.5.6. У першій коробці 20 ламп, з яких дві несправні, у другій — 10 ламп, з них несправною є лише одна. З другої коробки навмання взяли 1 лампу та поклали в першу коробку. Знайти ймовірність того, що навмання обрана після цього з першої коробки лампа буде справною.

2.5.7. В урні лежить 2 білих і 4 чорних кулі. З урни навмання взяли три кулі. Після цього навмання взяли четверту кулю. Знайти імовірність події, що ця четверта куля — біла.

2.5.8. Банк поділяє видані ним кредити на три групи — практично безризикові, ризикові та критичні. У кредитному портфелі 60 % кредитів — безризикові, 30 % — ризикові, 10 % — критичні. Ймовірність, що позичальник виявиться неплатоспроможним, по групі безризикових кредитів складає 0,01, по групі ризикових — 0,10, по групі критичних — 0,25. Яка ймовірність, що:

- навмання обраний позичальник втратить платоспроможність?
- кредит позичальника, який виявиться неплатоспроможним, було спочатку віднесено до групи практично безризикових?

2.5.9. З урни, яка містить 8 білих та 5 чорних куль, загубилася одна куля. Коли після цього з урни навмання витягнули 2 кулі, обидві вони виявилися білими. Яка ймовірність події, що загублена куля теж була білою?

2.5.10. На республіканську олімпіаду з теорії ймовірностей та математичної статистики університет делегував чотирьох найкращих студентів. Викладачі університету, враховуючи успішність цих студентів, оцінили ймовірності кожного студента увійти до складу переможців олімпіади: для першого студента — 0,4, для другого — 0,3, для третього — 0,2 і для четвертого — 0,1. Стало відомо, що за підсумками олімпіади до складу переможців увійшли два студенти університету. Яка ймовірність події, що переможцями виявилися перший та четвертий студенти?

ЛЕКЦІЯ 3

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ЇХ ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

3.1. Означення випадкової величини, типи випадкових величин

Випадкова величина — це така числова величина, точне значення якої не можна передбачити наперед. Отже, майбутні прибуток банку, валютний курс, кількість рентабельних підприємств галузі, ринковий попит на виготовлену підприємством продукцію тощо можна розглядати як випадкові величини.

Щоб позначати випадкові величини, скористаємося малими грецькими буквами (скажімо, ξ, ζ) або цими ж буквами з числовими індексами (наприклад, ξ_1, ξ_3, ζ_6).

Грецька абетка							
α Α	β Β	γ Γ	δ Δ	ε Ε	ζ Ζ	η Η	θ ϑ Θ
альфа	бета	гамма	дельта	епсілон	дзета	ета	тета
ι Ι	κ Κ	λ Λ	μ Μ	ν Ν	ξ Ξ	ο Ο	π Π
іота	каппа	ламбда	мю	ню	ксі	омікрон	пі
ρ Ρ	σ ς Σ	τ Τ	υ Υ	ϕ φ Φ	χ Χ	ψ Ψ	ϖ ω Ω
ро	сигма	тау	іпсілон	фі	хі	псі	омега

Основними типами випадкових величин є або дискретні, або неперервні випадкові величини. Так, кількість підприємств галузі, які у наступному році будуть прибутковими, є дискретною, а майбутні ринкові ціни виготовленої ними продукції — неперервними випадковими величинами.

3.2. Опис дискретної випадкової величини

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо множина її можливих значень є або скінченною, або зліченною. Якщо цю числову множину позначити через X, тоді окремі її елементи — тобто окремі можливі значення — слушно позначати, наприклад, малими літерами з цілочисловими індексами (x_1, x_7 тощо), оскільки всі елементи скінченної або зліченної множини завжди можна занумерувати.

Щоб ідентифікувати дискретну випадкову величину ξ, потрібно описати **закон розподілу імовірностей** цієї випадкової величини (скорочені назви — **закон розподілу** або просто **розподіл**), тобто вказати правило, за яким кожному елементу x_j з множини її можливих значень X поставлено у відповідність число p_j, яке є ймовірністю події, що випадкова величина набере значення x_j:

$$p_j = P\{\xi = x_j\} \text{ /для кожного можливого значення } x_j \in X\text{ /.}$$

Якщо, наприклад, ξ — це сума чисел, які випадуть при двократному киданні грального кубика, закон розподілу такої випадкової величини матиме вигляд, що наведено у таблиці 3.1.

Скажімо, $p_4 = P\{\xi = 5\} = 4/36$, оскільки при двократному киданні грального кубика сума чисел, що випадуть, дорівнюватиме 5 у таких чотирьох однаково ймовірних ситуаціях: 1 + 4, 3 + 2, 2 + 3 та 4 + 1.

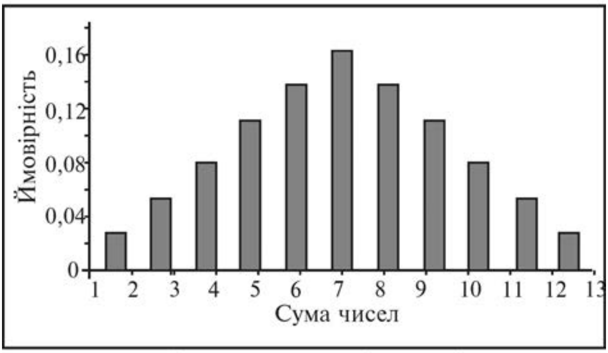
Таблиця 3.1

Номер значення j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значення (сума чисел) x_j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ймовірність p_j	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Крім табличного способу, закон розподілу дискретної випадкової величини можна також подати аналітичним способом (формулою) або графічно (багатокутником розподілу чи гістограмою). Для прикладу з двократним підкиданням грального кубика це виглядатиме так — рис. 3.1.

$$p_k = P\{\xi = k+1\} = \frac{6 - |6-k|}{36}, \ k = \overline{1, 11}$$

Багатокутник розподілу ймовірностей



Гістограма розподілу ймовірностей

Рис. 3.1. Аналітичне та графічне подання дискретного розподілу

Очевидно, що **закон розподілу** ймовірностей будь-якої дискретної випадкової величини ξ — з скінченною або зліченною множиною її можливих значень $X = \{x_j\}$ — **має такі загальні властивості**:

- $0 \le P\{\xi = x_j\} \le 1$ для кожного числа $x_j \in X$,
- $\sum\limits_{x_j \in X} P\{\xi = x_j\} = 1$.

3.3. Опис неперервної випадкової величини

Зараз розглянемо випадкову величину, множина можливих значень якої є нескінченною та незліченною і являє собою або всю множину дійсних чисел $R = (-\infty, +\infty)$, або деяку її підмножину, якою, як правило, може бути:

- відрізок (замкнений проміжок): $[a, b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$;
- інтервал (відкритий проміжок): $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$;
- напівінтервали (напіввідкриті проміжки):

$$(a, b] = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R} | a < x \le b\} \text{ та } [a, b) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R} | a \le x < b\};$$

- промені (напівпрямі):

$$[a, +\infty) = \{x \in R \mid a \le x\}; \; (a, +\infty) = \{x \in R \mid a < x\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \le b\}; \; (-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\};$$

- чи, скажімо, ε-окіл точки a довжиною 2ε: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Ідентифікувати таку випадкову величину ξ можна, наприклад, за допомогою визначеної на числовій осі Ox **функції розподілу ймовірностей** $F_\xi(x)$, яка для довільного числа x дорівнює ймовірності події, що випадкова величина ξ набере значення, менше від x:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}, \; -\infty < x < +\infty.$$

Випадкова величина ξ називається **неперервною**, якщо її функція розподілу ймовірностей $F_\xi(x)$ є неперервною на всій числовій осі Ox.

Функцію розподілу ймовірностей випадкової величини ξ часто скорочено називають **функцією розподілу** та позначають просто через $F(x)$.

Отже, функція розподілу неперервної випадкової величини є визначеною та неперервною на всій множині дійсних чисел R і володіє наступними властивостями:

- $0 \le F(x) \le 1$ для довільного числа $x \in R$;
- функція $F(x)$ є зростаючою або, принаймні, неспадною на всій числовій множині $R = (-\infty, +\infty)$;
- $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Окрім цього, як правило, функцію розподілу неперервної випадкової величини вважають диференційовною (тобто такою, що має похідну) усюди, за винятком, можливо, кількох окремих точок.

Похідна функція від функції розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини ξ — $f(x) = F'(x)$ — називається **щільністю розподілу ймовірностей** (скорочено — **щільністю ймовірностей** або **щільністю**) та має такі **властивості**:

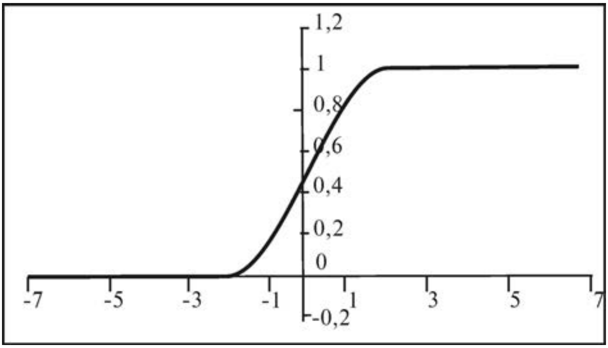
- $f(x) \ge 0$ для довільного $x \in R$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Наведемо, як приклад, графіки функції розподілу ймовірностей та відповідної функції щільності такої неперервної випадкової величини, для якої $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ і, відповідно,

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — рис. 3.2.

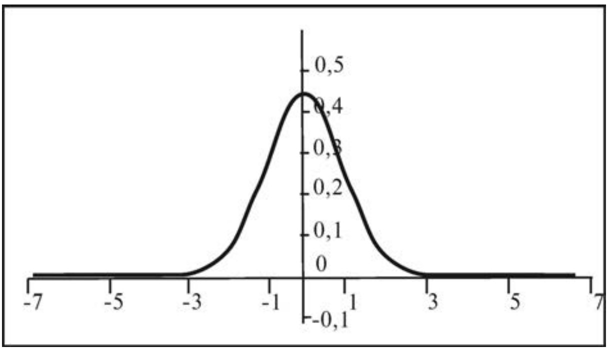
Зазначимо, що функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ має назву **функції Гаусса**, а функція $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ може бути подана у вигляді:

$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ — **функція Лапласа**. Ці



Функція розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



Функція щільності

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Рис. 3.2. Графічне та аналітичне подання неперервного розподілу

функції, як побачимо далі, є дуже важливими у теорії ймовірностей та математичній статистиці.

Враховуючи зв'язок між функцією розподілу та функцією щільності

$$F'(x) = f(x) \text{ та } \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = F(x),$$

функцію $F(x)$ називають також **інтегральною функцією розподілу ймовірностей**, а функцію $f(x)$ — **диференціальною функцією розподілу ймовірностей** відповідної випадкової величини. Коли потрібно підкреслити, що йдеться саме про випадкову величину ξ, ці функції позначають також через $F_\xi(x)$ та $f_\xi(x)$.

З означень інтегральної та диференціальної функцій розподілу ймовірностей випливає, що для довільних двох чисел $a < b$ величина $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ дорівнює ймовірності, з якою неперервна випадкова величина ξ набере значення з проміжка $[a, b) = \{x \in R | a \le x < b\}$:

$$P\{a \le \xi < b\} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Таким чином, маємо **геометричну інтерпретацію функції щільності**: ймовірність події, що неперервна випадкова величина набере значення з відрізка $[a, b] = \{x \in R | a \le x \le b\}$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$, горизонтальною віссю Ox та графіком функції $f(x)$ — рис. 3.3.

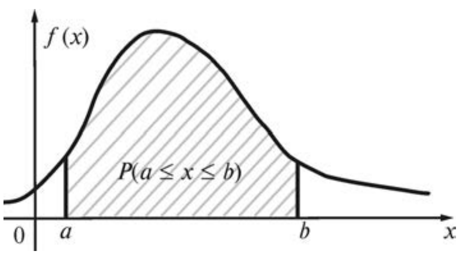


Рис. 3.3. Геометрична інтерпретація функції щільності
Джерело: Азарова А.О. Економетрія: навчальний посібник /А.О. Азарова, Н.В. Сачанюк-Кавецька, О.М. Роїк, Ю.В. Міронова. — Вінниця: ВНТУ, 2014. — 304 с., С. 45

Зверніть увагу, що величина $\int_a^a f(x)\,dx$, тобто ймовірність події, що неперервна випадкова величина набере певне числове значення a, дорівнює нулю. Це означає, зокрема, що для неперервної випадкової величини ξ та для довільного числа a події $\{\xi < a\}$ та $\{\xi \le a\}$ мають однакові імовірності.

Ми знаємо, що коли подія є неможливою, її ймовірність дорівнює нулю. Водночас у випадку неперервної випадкової величини, хоч імовірність події, що ця величина набере певне значення, дорівнює нулю, це ще зовсім не означає, що така подія неможлива. Тобто нульову імовірність може мати не лише неможлива, а також і можлива подія.

3.4. Про використання поняття функції розподілу щодо дискретної випадкової величини

Інколи поняття функції розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини поширюють також і на дискретну випадкову величину. Це можна зробити у такий спосіб. Припустимо, що дискретна випадкова величина ξ має наступний закон розподілу ймовірностей:

Значення	2	5	9
Ймовірність	0,1	0,6	0,3

Тоді, якщо керуватися традиційним означенням функції розподілу ймовірностей як такої числової функції $F(x)$, визначеної на всій числовій осі Ox, яка для довільного числа x дорівнює ймовірності події, що випадкова величина ξ набере значення, менше від x: $F(x) = P\{\xi < x\}$, для нашої дискретної випадкової величини ξ матимемо наступну функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}1, & 2 < x \le 5; \\ 0{,}7, & 5 < x \le 9; \\ 1, & 9 < x. \end{cases}$$

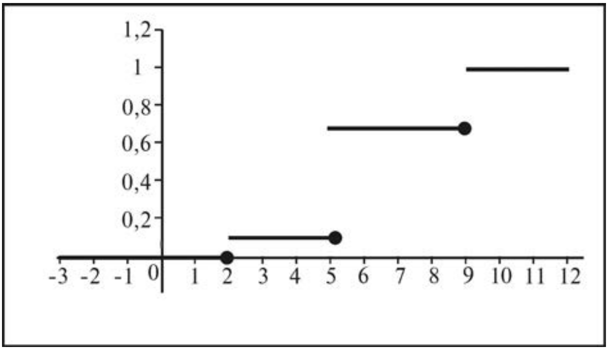


Рис. 3.4. Функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Ця функція є неспадною, кусково-лінійною (з горизонтальними лінійними ділянками, тобто східчастою) розривною функцією (рис. 3.4). В кожній з точок розриву (2, 5 або 9) функція є неперервною зліва, а справа має розриви першого роду (стрибки), причому загальна висота всіх стрибків дорівнює 1.

Надалі, для визначеності, поняття "функція розподілу ймовірностей" ми використовуватимемо лише для неперервної випадкової величини і не використовуватимемо його для дискретної випадкової величини. Що ж стосується поняття "закон розподілу ймовірностей", то його ми використовуватимемо як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини, уточнюючи у разі необхідності тип (дискретна або неперервна) випадкової величини, що розглядається.

3.5. Основні числові характеристики випадкової величини

Основними числовими характеристиками випадкової величини — і дискретної, і неперервної — слугують: математичне сподівання, дисперсія, стандартне відхилення. Математичне сподівання характеризує середнє значення, навколо якого групуються всі інші можливі значення випадкової величини. Дисперсія та стандартне відхилення, у свою чергу, характеризують, як різні можливі значення випадкової величини відрізняються від її середнього значення. Наведемо позначення та точні визначення зазначених основних числових характеристик.

Математичне сподівання випадкової величини ξ, яке називається також **математичним очікуванням**, **очікуваним рівнем**, **очікуваним значенням**, **середнім значенням** цієї випадкової величини, зазвичай позначається через $M[\xi]$ або через $\overline{\xi}$.

Для **дискретної** випадкової величини ξ, заданої законом розподілу імовірностей $P(x)$, $x \in X$, на скінченній або зліченній множині $X = \{x_j\}$ усіх її можливих значень, математичне сподівання обчислюється як сума добутків кожного з можливих значень на відповідні їм імовірності:

$$M[\xi] \equiv \overline{\xi} = \sum_{x_j \in X} x_j \cdot P\{\xi = x_j\} = \sum_{x_j \in X} p_j x_j .$$

Якщо, наприклад, ξ — це число, яке може випасти при одноразовому киданні грального кубика, тоді математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює:

$$M[\xi] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5 .$$

Для **неперервної** випадкової величини ξ, яка має щільність розподілу імовірностей $f(x)$, $x \in R$, математичне сподівання обчислюється за формулою:

$$M[\xi] \equiv \overline{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx .$$

Математичне сподівання випадкової величини ξ (як дискретної, так і неперервної) **має такі властивості**:

1) Для довільної сталої (отже, невипадкової) величини $c \in R$ її математичне сподівання теж дорівнює c:

$$\text{якщо } c = Const \text{, тоді } M[c] = c ;$$

2) Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$\text{якщо } c = Const \text{, тоді } M[c \cdot \xi] = c \cdot M[\xi] ;$$

3) Математичне сподівання суми кількох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

$$M[\xi+\zeta]=M[\xi]+M[\zeta];$$

4) Математичне сподівання добутку кількох **незалежних** випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин:

якщо ξ та ζ — незалежні, тоді $M[\xi\cdot\zeta]=M[\xi]\cdot M[\zeta]$;

Дисперсією випадкової величини ξ (позначається через $D[\xi]$) називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D[\xi]=M[(\xi-M[\xi])^2].$$

Отже, для **дискретної** випадкової величини маємо:

$$D[\xi]=\sum_{x_j\in X}(x_j-\bar{\xi})^2\cdot P\{\xi=x_j\},$$

а для **неперервної** —

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{\xi})^2\cdot f(x)\,dx.$$

Бачимо, що дисперсія завжди невід'ємна та є тим меншою, чим щільніше групуватимуться можливі значення випадкової величини біля її математичного сподівання. Розмірність (одиниця виміру) дисперсії дорівнює квадрату розмірності випадкової величини.

Окрім цього, **дисперсія** випадкової величини ξ (як дискретної, так і неперервної) **має властивості**:

1) Дисперсію можна також обчислити як різницю математичного сподівання квадрата випадкової величини та квадрата її математичного сподівання:

$$D[\xi]=M[\xi^2]-(M[\xi])^2.$$

Зауважимо, що ця формула є зручною для обчислень у випадках дискретної випадкової величини з цілочисловими можливими значеннями, але з нецілочисловим математичним сподіванням;

2) Дисперсія сталої (тобто невипадкової) величини $c\in R$ дорівнює нулю:

якщо $c = Const$, тоді $D[c] = 0$;

3) Дисперсія добутку сталої величини на випадкову дорівнює добутку квадрату сталої на дисперсію випадкової величини:

якщо $c = Const$, тоді $D[c \cdot \xi] = c^2 \cdot D[\xi]$;

4) Дисперсія суми двох **незалежних** випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

якщо ξ та ζ — незалежні, тоді $D[\xi + \zeta] = D[\xi] + D[\zeta]$.

Ця властивість поширюється і на довільну скінченну кількість попарно незалежних випадкових величин.

Наприклад, дисперсія випадкового числа ξ , яке може випасти при одноразовому киданні грального кубика, дорівнює:

$$D[\xi] = \frac{1}{6} \cdot (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (4 - 3,5)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot (5 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (6 - 3,5)^2 \approx 2,9167 ,$$

а дисперсія випадкової суми ζ трьох чисел, які можуть випасти при трикратному підкиданні грального кубика, є такою:

$$D[\zeta] = 3D[\xi] \approx 3 \cdot 2,9167 = 8,7501 .$$

Стандартним відхиленням або **середньоквадратичним відхиленням** випадкової величини ξ — позначається через $\sigma[\xi]$, а також через σ_ξ або просто через σ — називається число, яке обчислюється як квадратний корінь з дисперсії цієї випадкової величини:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} .$$

Отже, стандартне відхилення завжди невід'ємне та, аналогічно дисперсії, характеризує відхилення можливих значень випадкової величини від її очікуваного рівня. Водночас розмірність (одиниця виміру) стандартного відхилення така сама, як і розмірність значень самої випадкової величини, що є певною перевагою показника стандартного відхилення у порівнянні з показником дисперсії.

З означення стандартного відхилення випливає, що дисперсія випадкової величини дорівнює квадрату стандартного відхилення цієї випадкової величини: $D[\xi] = \sigma^2[\xi]$, через що дисперсію позначають також через $\sigma^2[\xi]$ або просто через σ^2.

Зазначимо ще й такі **властивості стандартного відхилення**:

1) Стандартне відхилення сталої (невипадкової) величини $c \in R$ дорівнює нулю:

$$\text{якщо } c = Const \text{, тоді } \sigma[c] = 0\,;$$

2) Стандартне відхилення добутку сталої величини на випадкову дорівнює добутку абсолютної величини сталої на стандартне відхилення випадкової величини:

$$\text{якщо } c = Const \text{, тоді } \sigma[c \cdot \xi] = | c | \cdot \sigma[\xi]\,;$$

3) Стандартне відхилення суми двох **незалежних** випадкових величин не перевищує (та, як правило, є меншим) суми стандартних відхилень цих величин:

$$\text{якщо } \xi \text{ та } \zeta \text{ — незалежні,}$$

$$\text{тоді } \sigma[\xi + \zeta] = \sqrt{\sigma^2[\xi + \zeta]} = \sqrt{\sigma^2[\xi] + \sigma^2[\zeta]} \le \sigma[\xi] + \sigma[\zeta]\,.$$

Третя властивість стандартного відхилення є теоретичною основою різноманітних схем диверсифікації, що використовуються в економіці та менеджменті з метою зменшення негативного впливу чинників ризику щодо діяльності суб'єктів господарювання.

3.6. Нерівність Чебишева

Для довільної випадкової величини ξ, що має математичне сподівання $\overline{\xi}$ і дисперсію σ_ξ^2, та для довільного числа $a > 0$ справджується нерівність:

$$P\{| \xi - \overline{\xi} | > a\} \le \frac{\sigma_\xi^2}{a^2}\,.$$

Для доведення нерівності Чебишева обмежимося випадком, коли ξ є неперервною випадковою величиною з функцією щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Отже, нехай $\overline{\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ і $\sigma_\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{\xi})^2 f(x)\, dx$.

Врахуємо також, що $P\{|\,\xi - \overline{\xi}\,| > a\} = \int\limits_{|x-\overline{\xi}|>a} f(x)\, d\,x$.

Отримаємо такий ланцюжок нерівностей:

$$\sigma_\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{\xi})^2 f(x)\, dx \geq \int\limits_{|x-\overline{\xi}|>a} (x - \overline{\xi})^2 f(x)\, dx \geq$$

$$\geq a^2 \int\limits_{|x-\overline{\xi}|>a} f(x)\, d\,x = a^2 P\{|\,\xi - \overline{\xi}\,| > a\},$$

тобто $P\{|\,\xi - \overline{\xi}\,| > a\} \leq \dfrac{\sigma_\xi^2}{a^2}$, що і потрібно було довести.

Оберемо тепер деяке натуральне число n та покладемо $a = n\sigma_\xi$.

У такому разі нерівність Чебишева набере вигляд:

$$P\{|\,\xi - \overline{\xi}\,| > n\sigma_\xi\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Скажімо, при $n = 3$ остання нерівність стверджує, що ймовірність події, що довільна випадкова величина ξ набере значення, яке відхилятиметься від її математичного сподівання $\overline{\xi}$ на величину, що перевищує $3\sigma_\xi$ ("три сигми"), є не більшою, аніж $\dfrac{1}{3^2} \approx 0{,}111$; тобто з імовірністю $0{,}889$ значення випадкової величини ξ потрапить в інтервал $(\overline{\xi} - 3\sigma_\xi, \overline{\xi} + 3\sigma_\xi)$.

Примітка. Нерівність Чебишева розрахована на випадок випадкової величини з наперед невідомим законом (чи функцією) розподілу ймовірностей. Коли ж ми знаємо конкретний закон (функцію) розподілу ймовірностей випадкової величини, нерівність Чебишева можна посилити.

3.7. Визначення меж можливих значень дисперсії і стандартного відхилення обмеженої випадкової величини

Нехай ξ — випадкова величина (або дискретна, або неперервна), множина можливих значень якої є обмеженою: $\xi \in [a, b]$, де $-\infty < a \le b < +\infty$). Тоді дисперсія і стандартне відхилення цієї випадкової величини задовольняють нерівності:

$$\sigma^2[\xi] \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \text{ та } \sigma[\xi] \le \frac{b-a}{2}.$$

Доведення. Насамперед переконаємося, що $\sigma^2[\xi] \le$ $\le M\left[\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$.

Дійсно,

$$\sigma^2[\xi] \le \sigma^2[\xi] + \left(M[\xi] - \frac{a+b}{2}\right)^2 = M[\xi^2] - (M[\xi])^2 +$$

$$+(M[\xi])^2 - 2M[\xi]\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= M\left[\xi^2 - 2\xi\frac{a+b}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] = M\left[\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2\right].$$

Далі, оскільки $a \le \xi \le b$, тобто $(b-\xi)(\xi-a) \ge 0$, маємо співвідношення:

$$\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2 + (b-\xi)(\xi-a) =$$

$$= \xi^2 - 2\xi\frac{a+b}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b\xi - ba - \xi^2 + \xi a =$$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

з якого випливає, що $M\left[\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

Остаточно маємо нерівності:

$$\sigma^2[\xi] \le M\left[\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

і, відповідно,

$$\sigma[\xi] \le \frac{b-a}{2}.$$

Нерівності щодо меж можливих значень дисперсії та стандартного відхилення доведено.

Таким чином, стандартне відхилення довільної випадкової величини ξ, всі можливі значення якої не виходять за межі проміжка $[a, b]$, де $-\infty < a \le b < +\infty$, ніколи не перевищує половини довжини цього проміжка — числа $\frac{b-a}{2}$.

3.8. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

3.8.1. У торгівельній мережі є 5 магазинів, які мають широкий асортимент товарів та працюють незалежно один від одного. Ймовірність, що виторг кожного окремого магазину за наступний місяць відповідатиме запланованому для нього рівню, дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ — кількості магазинів, виторг кожного з яких у наступному місяці відповідатиме запланованому для нього рівню; побудувати відповідні багатокутник розподілу та гістограму. Обчислити математичне сподівання $\overline{\xi}$ та стандартне відхилення σ_ξ цієї випадкової величини.

3.8.2. У партії, що містить 25 виробів, є 6 нестандартних. Навмання взяли три вироби. Написати закон розподілу випадкової величини ξ — кількості нестандартних виробів серед відібраних. Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати багатокутник та гістограму розподілу ймовірностей для цієї випадкової величини.

3.8.3. Маємо таку функцію розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини ξ:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо } x<0; \\ a x^2, & \textit{якщо } 0\le x\le 10; \\ 1, & \textit{якщо } x>10. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, визначити функцію щільності ймовірностей $f(x)$ випадкової величини ξ, обчислити математичне сподівання $\overline{\xi}$, дисперсію σ_ξ^2 та стандартне відхилення σ_ξ. Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу ймовірностей, а також обчислити ймовірність події, що випадкова величина ξ набере значення з проміжку від 3 до 5.

3.8.4. Неперервна випадкова величина ξ має таку функцію щільності розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо } x<0; \\ a\sin x, & \textit{якщо } 0\le x\le \pi; \\ 0, & \textit{якщо } x>\pi. \end{cases}$$

Обчислити коефіцієнт a, визначити функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ випадкової величини ξ; побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу ймовірностей. Знайти математичне сподівання $\overline{\xi}$, дисперсію σ_ξ^2 та стандартне відхилення σ_ξ цієї випадкової величини. Обчислити ймовірність події, що випадкова величина ξ набере значення з проміжку від $0{,}25\pi$ до $0{,}75\pi$.

3.8.5. На в'язці є п'ять однотипних ключів, з яких до сейфу підходить лише один, але який саме — власник сейфу забув. Тому він перебиратиме ключі, доки не відкриє сейф. Побудувати закон розподілу випадкової кількості перебраних ключів та знайти числові характеристики цієї випадкової величини.

3.8.6. Опрацюємо **теорему про додавання математичних сподівань** — що математичне сподівання суми кількох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин: $M[\xi+\zeta]=M[\xi]+M[\zeta]$.

Обмежимося випадком, коли випадкові величини є дискретними, із скінченими кількостями можливих значень, та задані відповідними законами розподілу імовірностей:

$$\xi : \{(x_i , \alpha_i) \mid i = \overline{1, m}\} \text{, де } \alpha_i = P\{\xi = x_i\} ,$$

$$\zeta : \{(y_j , \beta_j) \mid j = \overline{1, n}\} \text{, де } \beta_j = P\{\zeta = y_j\} .$$

За означенням,

$$M[\xi + \zeta] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j)\ p_{ij} \text{ , де } p_{ij} = P\{(\xi = x_i) \cap (\zeta = y_j)\} .$$

Тому

$$M[\xi + \zeta] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j)\ p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\ p_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j\ p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} .$$

Але

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P\{(\xi = x_i) \cap (\zeta = y_j)\} =$$

$$= P\{(\xi = x_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} (\zeta = y_j))\} = P\{(\xi = x_i) \cap \Omega\} = \alpha_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} P\{(\xi = x_i) \cap (\zeta = y_j)\} =$$

$$= P\{(\bigcup_{i=1}^{m} (\xi = x_i)) \cap (\zeta = y_j)\} = P\{\Omega \cap (\zeta = y_j)\} = \beta_j .$$

Отже,

$$M[\xi + \zeta] = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i\ \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\ \beta_j = M[\xi] + M[\zeta] ,$$

що і треба було довести.

3.8.7. Доведемо **теорему про математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин**: $M[\xi \cdot \zeta] = M[\xi] \cdot M[\zeta]$, якщо випадкові величини ξ та ζ незалежні.

Для цього скористаємося позначеннями та результатами, викладеними в попередньому завданні 3.8.6, та врахуємо, що у випадку, коли випадкові величини ξ та ζ незалежні, справджується рівність: $p_{ij} = \alpha_i \cdot \beta_j$.

Отже,

$$M[\xi \cdot \zeta] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i \cdot y_j)\ p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\ y_j \alpha_i \beta_j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j\right) = M[\xi] \cdot M[\zeta].$$

3.8.8. Обґрунтуємо **теорему про додавання дисперсій незалежних випадкових величин**: $D[\xi + \zeta] = D[\xi] + D[\zeta]$, якщо випадкові величини ξ та ζ є незалежними.

Знову користуватимемося позначеннями та результатами завдання 3.8.6, рівністю $p_{ij} = \alpha_i \cdot \beta_j$, незалежністю випадкових величин $(\xi - \overline{\xi})$ і $(\zeta - \overline{\zeta})$ та результатами завдання 3.8.7:

$$D[\xi + \zeta] = M[((\xi + \zeta) - \overline{\xi + \zeta})^2] = M[(\xi + \zeta - \overline{\xi} - \overline{\zeta})^2] =$$

$$M[((\xi - \overline{\xi}) + (\zeta - \overline{\zeta}))^2] = M[(\xi - \overline{\xi})^2 + 2(\xi - \overline{\xi})(\zeta - \overline{\zeta}) + (\zeta - \overline{\zeta})^2] =$$

$$= M[(\xi - \overline{\xi})^2] + 2M[(\xi - \overline{\xi})]M[(\zeta - \overline{\zeta})] + M[(\zeta - \overline{\zeta})^2] =$$

$$= D[\xi] + 0 + D[\zeta],$$

оскільки $M[(\xi - \overline{\xi})] = M[(\zeta - \overline{\zeta})] = 0$.

Як співвідносяться між собою стандартне відхилення суми незалежних випадкових величин ($\sigma[\xi + \zeta]$) та сума стандартних відхилень цих незалежних випадкових доданків ξ та ζ ($\sigma[\xi] + \sigma[\zeta]$)?

3.8.9. Маємо дві незалежні випадкові величини ξ та ζ з відомими математичними сподіваннями $\overline{\xi} = 11$, $\overline{\zeta} = 4$ та дисперсіями $\sigma_\xi^2 = 9$, $\sigma_\zeta^2 = 5$.

Обґрунтувати, що випадкова величина $\theta = 2\xi - 3\zeta$ з імовірністю, що не менше від 0,75, набиратиме значення з проміжка від числа -8 до числа $+28$: $P\{-8 \le \theta \le 28\} \ge 0,75$.

3.8.10. **Задача Марковиця** (спрощений варіант). Розглядається два інвестиційні проекти A та B, прибутковості за якими (тобто відношення прибутку від інвестицій до розміру інвестицій) вважаються незалежними випадковими величинами з відомими математичними сподіваннями $\overline{\pi}_A = 0,15$, $\overline{\pi}_B = 0,05$ та стандартними відхиленнями $\sigma_A = 0,03$, $\sigma_B = 0,01$. Обчислити математичне сподівання та стандартне відхилення прибутку, який відповідатиме інвестиційному портфелю, що передбачає вкладення 10 млн. грн. у проект A та 30 млн. грн. у проект B. За якого розподілу інвестицій у сумі 40 млн. грн. між проектами A та B стандартне відхилення випадкового прибутку відповідного інвестиційного портфеля буде якнайменшим? Чому дорівнює очікуваний прибуток такого інвестиційного портфеля?

Л Е К Ц І Я 4

ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

До поширених законів розподілу дискретних випадкових величин відносяться: рівномірний, біноміальний, геометричний, розподіл Пуассона тощо.

4.1. Рівномірний розподіл

Дискретна випадкова величина ξ називається **рівномірно розподіленою**, якщо множина її можливих значень є скінченною, а всі її можливі значення — однаково ймовірними.

Якщо кількість різних можливих значень дискретної рівномірно розподіленої випадкової величини позначити через n, а її окреме j-те значення — через x_j, тоді $p_j = P\{\xi = x_j\} = \frac{1}{n}$ для всіх $j = \overline{1, n}$.

Таким чином, рівномірний розподіл дискретної випадкової величини повністю характеризується лише скінченною n-елементною множиною усіх її різних можливих значень: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, оскільки кожне із значень є однаково імовірним.

Знайдемо **основні числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини**:

- математичне сподівання: $M[\xi] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} x_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$,

• дисперсія: $D[\xi]=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x_j-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2$.

Якщо, наприклад, майбутній прибуток π підприємства, може набирати значення або 15, або 18, або 20 тисяч гривень з однаковими ймовірностями, що дорівнюють 1/3, тоді:

$$\bar{\pi}=\frac{1}{3}(15+18+20)=\frac{53}{3}\approx 17{,}667 \text{ (тис. грн.)};$$

$$\sigma_\pi=\sqrt{\frac{1}{3}(15^2+18^2+20^2)-\frac{1}{3^2}(15+18+20)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{949}{3}-\frac{2809}{9}}=\frac{\sqrt{2847-2809}}{3}\approx 2{,}055 \text{ (тис. грн.)}.$$

4.2. Біноміальний розподіл (або розподіл Бернуллі)

Припустимо, що певний комплекс умов, за результатами виконання якого з імовірністю p може відбутися випадкова подія A, відтворюватиметься n раз. Нехай ξ — випадкова величина, що дорівнює кількості випадків, коли подія A відбудеться. Позначимо через k деяке ціле число в межах від 0 до n. Тоді ймовірність події, що ξ дорівнюватиме k, — $p_k=P\{\xi=k\}$ — можна обчислити за формулою:

$$p_k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n.$$

Задіяні у цій формулі числа $C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, які дорівнюють кількості сполучень з n елементів по k, називаються біноміальними коефіцієнтами, оскільки є визначальними у відомій алгебраїчній формулі бінома Ньютона:

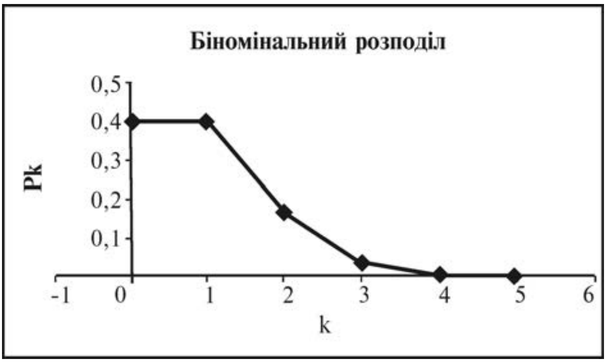
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Тому, користуючись формулою бінома Ньютона, одразу ж переконуємося, що сума всіх імовірностей p_k, $k=0,1,\ldots,n$, біноміального закону розподілу дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1 .$$

Таким чином, множиною X можливих значень нашої випадкової величини ξ є сукупність з $n+1$ невід'ємних цілих чисел від 0 до n: $X = \{0, 1, \ldots, n\}$, а її закон розподілу ймовірностей, що визначається параметрами n і p, отримав назву **біноміального**. Відповідно, ξ називається **біноміально розподіленою** (або **розподіленою за законом Бернуллі**) випадковою величиною з параметрами n і p.

Наведемо багатокутник та таблицю біноміального закону розподілу з параметрами $n = 5$ і $p = \frac{1}{6}$, який описує, скажімо, випадкову кількість разів, коли випаде цифра "6", при п'ятикратному киданні грального кубика (рис. 4.1):



k	0	1	2	3	4	5
p_k	0,401878	0,401878	0,160751	0,032150	0,003215	0,000129

Рис. 4.1. Приклад біноміального розподілу

Щоб обчислили основні числові характеристики біноміально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами n і p, уведемо до розгляду n допоміжних випадкових величин ζ_j, $j = \overline{1, n}$, кожна з яких значеннями, відповідно, 1 або 0 показує, чи відбулася або чи не відбулася у j-му випробуванні подія A. Тобто кожна з допоміжних випадкових величин може набирати з імовірністю p значення 1 та з імовірністю $1-p$ значення 0.

Це означає, що $M[\zeta_j] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$, а також для всіх $j = \overline{1, n}$ справджується, що

$$D[\zeta_j] = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (0-p)^2 = p \cdot (1-p).$$

В сукупності допоміжні випадкові величини попарно незалежні, а в сумі дорівнюють випадковій величині ξ: $\xi = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j$.

Тому, за правилами обчислення математичного сподівання суми випадкових величин і дисперсії суми незалежних випадкових величин, одержимо такі **формули обчислення основних числових характеристик біноміально розподіленої випадкової величини**:

- $M[\xi] = \sum_{j=1}^{n} M[\zeta_j] = n\,p$,
- $D[\xi] = \sum_{j=1}^{n} D[\zeta_j] = n\,p(1-p)$

Зокрема, математичне сподівання та стандартне відхилення біноміально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами $n = 5$ і $p = \frac{1}{6}$ дорівнюють: $\bar{\xi} = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $\sigma_\xi = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{5}{6}$.

Може з'явитися також необхідність дослідити не абсолютну кількість, а **відносну частку** випадків, коли відбуватиметься подія A, якщо абсолютна кількість випадків ξ є біноміально розподіленою випадковою величиною.

Якщо позначити відносну частку випадків через ζ, тоді із залежності $\zeta = \frac{\xi}{n}$ одразу ж одержимо і формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії та стандартного відхилення випадкової величини ζ, яка є **відносною часткою** випадків настання події:

- $M[\zeta] = \dfrac{M[\xi]}{n} = \dfrac{n\,p}{n} = p$,
- $D[\zeta] = \dfrac{D[\xi]}{n^2} = \dfrac{n\,p(1-p)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n}$,
- $\sigma[\zeta] = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

4.3. Теорема Бернуллі

Властивості біноміально розподіленої випадкової величини, у сукупності з нерівністю Чебишева, дозволяють отримати додаткове обґрунтування статистичного визначення ймовірності випадкової події через відносну частоту випадків, коли ця подія відбувалася.

Дійсно, припустимо, що один і той самий певний комплекс умов, за яким щоразу з імовірністю p може відбутися подія A, буде відтворюватися n раз. Позначимо через $\xi(n)$ дискретну випадкову величину, яка означатиме кількість разів, коли подія A відбудеться. Це — біноміально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $\overline{\xi(n)}$, яке дорівнює $n\,p$ та дисперсією $\sigma^2_{\xi(n)} = n\,p(1-p)$.

Оберемо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$ та в нерівності Чебишева $P\{|\,\xi(n) - \overline{\xi(n)}\,| > a\} \le \dfrac{\sigma^2_{\xi(n)}}{a^2}$ покладемо $a = n\varepsilon$.

Одержимо нерівність: $P\{|\,\xi(n) - n\,p| > n\varepsilon\} \le \dfrac{n\,p(1-p)}{(n\varepsilon)^2}$ або, остаточно:

$$P\{|\,\frac{\xi(n)}{n} - p\,| > \varepsilon\} \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \le \frac{1}{4\,n\varepsilon^2}\,,$$

тому що $p(1-p) \le \dfrac{1}{4}$, яким би не було число p.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\,\dfrac{\xi(n)}{n} - p\,| > \varepsilon\} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4\,n\varepsilon^2} = 0$.

Дійшли висновку, що коли певний комплекс умов відтворювати дуже багато разів, тоді для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ ймовірність того, що частота $\frac{\xi(n)}{n}$ виникнення події A відрізнятиметься від ймовірності p події A на величину, більшу від ε, є дуже малою, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi(n)}{n} - p| > \varepsilon\} = 0$.

Отже, для довільного числа ε > 0 справджується і така нерівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi(n)}{n} - p| \le \varepsilon\} = 1 - \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi(n)}{n} - p| > \varepsilon\} = 1.$$

Це означає, якщо далі перейти до границі при $\varepsilon \to +0$, що:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\xi(n)}{n} = p\} = 1.$$

Тобто при дуже великій кількості випробувань n частота виникнення випадкової події A з імовірністю 1 збігатиметься з імовірністю p цієї події A. Отриманий висновок має назву **теореми Бернуллі**.

Зверніть увагу, що ця теорема зовсім не стверджує, що із зростанням кількості випробувань відносна частота прямує до ймовірності; мова йде лише про **ймовірність**, що частота виникнення випадкової події збігатиметься при $n \to \infty$ до ймовірності цієї події.

4.4. Геометричний розподіл

Припустимо, що певний комплекс умов, за результатами виконання якого з імовірністю p може відбутися випадкова подія A, відтворюється включно до першого такого випадку, коли подія A відбулася. Позначимо, далі, через ξ випадкову величину, яка дорівнює кількості разів відтворення комплексу умов. Множиною можливих значень випадкової величини ξ є множина усіх натуральних чисел: $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Закон розподілу ймовірностей цієї випадкової величини є таким:

$$p_n = P\{\xi = n\} = (1-p)^{n-1} p, \; n \in N.$$

Дискретна випадкова величина ξ, що розглядається зараз, називається **геометрично розподіленою**, оскільки числова послідовність $\{(1-p)^{n-1}p\}_{n=1}^{\infty}$ утворює геометричну прогресію з першим членом $p_1 = p$ та знаменником $(1-p)$. При $0 < p < 1$ ця геометрична прогресія є збіжною, а сума усіх її членів, як того й слід очікувати, дорівнює 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1 .$$

Отже, геометричний закон розподілу ймовірностей визначається лише одним параметром $p \in (0; 1)$, а багатокутник розподілу ймовірностей може виглядати так (наводимо фрагменти відповідних діаграм для значень $p = 0,3$ та $p = 0,5$ — рис. 4.2):

n	$p = 0,3$	$p = 0,5$
1	0,3	0,5
2	0,21	0,25
3	0,147	0,125
4	0,1029	0,0625
5	0,07203	0,03125
6	0,050421	0,015625
7	0,0352947	0,007813
8	0,0247063	0,003906
9	0,0172944	0,001953
10	0,0121061	0,000977

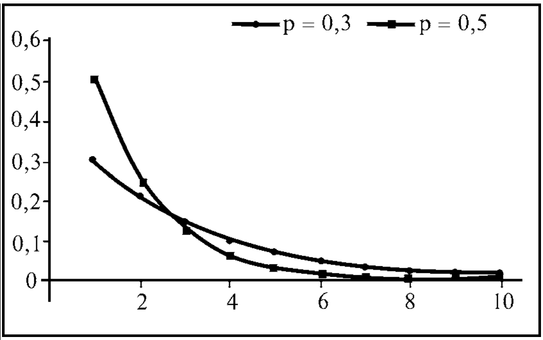


Рис. 4.2. Геометричний розподіл

Основні числові характеристики геометрично розподіленої випадкової величини ξ, якщо параметр розподілу дорівнює p, обчислюються за формулами:

- математичне сподівання: $M[\xi] = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = \dfrac{1}{p}$,
- дисперсія: $D[\xi] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n - \dfrac{1}{p}\right)^2 (1-p)^{n-1}p = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Зокрема, при p = 0,5 для дискретної геометрично розподіленої випадкової величини ξ одержимо: $\overline{\xi} = 2$ та $\sigma_\xi = \sqrt{\dfrac{1-0,5}{0,5^2}} = \sqrt{2}$.

Приклад. Щоб відпочити від комп'ютера, бухгалтер взяв гральний кубик та вирішив підкидати його, доки не випаде "6". Знайдемо математичне сподівання кількості кидків, які зробить бухгалтер під час відпочинку.

Розв'язування. Позначимо випадкову кількість кидків, які зробить бухгалтер, через ξ. Ця дискретна випадкова величина має геометричний розподіл імовірностей. Отже, ймовірність події, що ξ дорівнюватиме числу $k \in N$, обчислюється за формулою:

$$P\{\xi = k\} = p \cdot q^{k-1},$$

де $q = 1 - p$; причому в нашому прикладі $p = {}^1\!/_6$. Тому для математичного сподівання $\overline{\xi}$ випадкової величини ξ матимемо формулу:

$$\overline{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1}.$$

Для обчислення суми $\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1}$ скористаємося властивостями збіжних степеневих рядів:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} = \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Отже, $\overline{\xi} = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}$. Тобто при $p = {}^1\!/_6$ математичне сподівання кількості кидків, які зробить бухгалтер під час відпочинку, таке: $\overline{\xi} = 6$.

Стандартне відхилення цієї випадкової кількості кидків ξ пропонуємо обчислити самостійно. Приклад закінчено.

4.5. Розподіл Пуассона

Припустимо, що дискретна випадкова величина ξ може набирати довільні значення з множини цілих невід'ємних чисел з ймовірностями $p_n = P\{\xi = n\}$, які обчислюються за формулами:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \ n \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

де $\lambda > 0$ — задане дійсне число. Така дискретна випадкова величина називається **пуассонівською**, а її закон розподілу ймовірностей повністю визначається додатним параметром λ.

Проілюструємо пуассонівський закон розподілу ймовірностей для випадків, коли $\lambda = 3$ та $\lambda = 5$.

n	p_n	
	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}5$
0	0,049787	0,000912
1	0,149361	0,006383
2	0,224042	0,022341
3	0,224042	0,052129
4	0,168031	0,091226
5	0,100819	0,127717
6	0,050409	0,149003
7	0,021604	0,149003
8	0,008102	0,130377
9	0,002701	0,101405
10	0,00081	0,070983
11	0,000221	0,045171
12	5,52E-05	0,02635
13	1,27E-05	0,014188
14	2,73E-06	0,007094
15	5,46E-07	0,003311

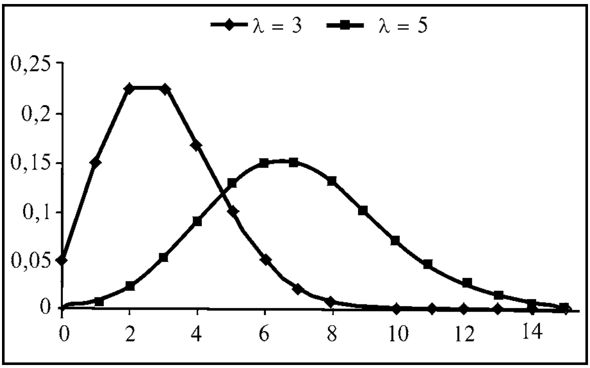


Рис. 4.3. Пуассонівський розподіл

Пуассонівський закон розподілу ймовірностей використовується, зокрема, для опису кількості однотипних випадків, які можуть статися за певний проміжок часу, якщо впродовж довільного досить малого проміжку часу може статися максимум лише один випадок, причому упродовж одного проміжку часу довільної довжини кількість випадків, які на ньому можуть статися, не залежить від їх кількості на будь-якому іншому часовому проміжку; припускається також, що завжди середня кількість випадків за одиницю часу є практично сталою.

Основні числові характеристики дискретної випадкової величини ξ, що має розподіл Пуассона з параметром λ — математичне сподівання та дисперсія — обчислюються за формулами, доведення яких ґрунтується на відомому розвиненні експоненційної функції — $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$:

$$M[\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda ,$$

$$D[\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\lambda)^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda .$$

Отже, якщо випадкова величина має розподіл Пуассона, її математичне сподівання та дисперсія за величинами збігаються (але різняться за одиницями виміру!).

Якщо, наприклад, до консультаційної фірми за один тиждень, що має 5 восьмигодинних робочих днів, в середньому звертається 15 клієнтів, тобто в середньому щодня до неї звертається 3 клієнти ($\lambda = 3$), тоді ймовірності $p_k = P\{\xi = k\}$ подій, що упродовж одного дня до фірми завітає k клієнтів ($k = 0, 1, 2, \ldots, 5$), можна оцінити так:

$$p_0 = \frac{3^0}{0!} e^{-3} \approx 0,0498 , \quad p_1 = \frac{3^0}{1!} e^{-3} \approx 0,1494 , \quad p_2 = \frac{3^0}{2!} e^{-3} \approx 0,2240 ,$$

$$p_3 = \frac{3^0}{3!} e^{-3} \approx 0,2240 , \quad p_4 = \frac{3^0}{4!} e^{-3} \approx 0,1680 , \quad p_5 = \frac{3^0}{5!} e^{-3} \approx 0,1008 .$$

У свою чергу, ймовірність події, що упродовж одного дня до консультаційної фірми завітає більше п'яти клієнтів, складає:

$$P\{\xi > 5\} = 1 - P\{\xi \le 5\} = 1 - (0.0498 + 0,1494 + 0,2240 +$$

$$+0,2240 + 0,1680 + 0,1008) = 0,0840 .$$

4.6. Ілюстрація прикладного використання закону Пуассона

Закон розподілу Пуассона активно задіяний, зокрема, при моделюванні роботи різноманітних систем масового обслуговування (СМО) — автозаправних станцій, білетних кас, перукарень тощо.

Припустимо, що до деякої СМО надходить певний випадковий потік запитів на обслуговування, який має такі властивості:

1) **ординарність** — в кожний окремий момент часу до системи може надійти не більше одного запиту;

2) **відсутність післядії** — для кожного моменту часу кількість запитів, які надійдуть пізніше, не залежить від кількості запитів, які надійшли до цього моменту часу у минулому;

3) **стаціонарність** — ймовірність надходження до системи певної кількості запитів за деякий проміжок часу залежить лише від довжини цього проміжка та на залежить від моменту часу, коли починається цей проміжок.

В теорії масового обслуговування випадковий потік запитів, який задовольняє зазначені три властивості, називається **найпростішим**.

Оберемо довільне число $t \geq 0$ та позначимо через $\xi(t)$ кількість запитів найпростішого випадкового потоку, які надійдуть до СМО за проміжок часу $[0, t]$. Це — дискретна випадкова величина, множиною можливих значень якої є сукупність усіх невід'ємних цілих чисел. З'ясуємо закон розподілу ймовірностей цієї випадкової величини. Для цього потрібно знайти усі залежні від часу t функції: $p_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, значення яких для кожного моменту часу $t \geq 0$ якраз і показують ймовірності усіх відповідних можливих значень випадкової величини $\xi(t)$.

Очевидно, що для довільного моменту часу $t \geq 0$ справджуються нерівності: $0 \leq p_k(t) \leq 1$ для всіх значень $k = 0, 1, 2, \dots$, а також має місце рівність $\sum\limits_{k=o}^{+\infty} p_k(t) = 1$. Окрім цього, врахуємо математичні властивості найпростішого випадкового потоку запитів на обслуговування.

Ординарність потоку означає, що для проміжку часу $[0, \Delta t]$ нескінченно малої довжини $\Delta t > 0$ ймовірність події, що до системи надійде точно один запит, є нескінченно малою одного порядку малості з Δt: $p_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, а ймовірність того, що за цей проміжок надійде більше одного запиту, — нескінченно малою вищого порядку малості, аніж Δt: $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} p_k(\Delta t) = o(\Delta t)$. З цього випливає також, що $p_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

Відсутність післядії означає, що події, пов'язані з надходженням до системи певних кількостей запитів на проміжках часу, що не перетинаються, є незалежними випадковими подіями.

Стаціонарність потоку запитів, у свою чергу, дозволяє брати до уваги лише довжину певного проміжку часу, не звертаючи увагу на момент часу, коли цей проміжок розпочинається.

Отже, властивості відсутності післядії та стаціонарності дозволяють стверджувати, що $p_k(t + \Delta t) = \sum\limits_{l=0}^{k} p_{k-l}(t)\, p_l(\Delta t)$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Зокрема, при $k = 0$ одержимо: $p_0(t + \Delta t) = p_0(t)\, p_0(\Delta t)$ та, з урахуванням властивості ординарності:

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\,).$$

З цієї рівності одержимо:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + p_0(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad .$$

Після переходу до границі при $\Delta t \to 0$ матимемо: $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$.

Розв'язком цього диференціального рівняння, з очевидною початковою умовою $p_0(0) = 1$, є такий: $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

В свою чергу, при $k \ge 1$ одержимо:

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)\, p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t)\, p_1(\Delta t) + o(\Delta t) =$$

$$= p_k(t)\,(1 - \lambda\Delta t + 0(\Delta t)\,) + p_{k-1}(t)\,(\lambda\Delta t + 0(\Delta t)\,) + o(\Delta t),$$

що після ділення на Δt та переходу до границі при $\Delta t \to 0$ призведе до системи рекурентних диференціальних рівнянь: $p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, з початковими умовами $p_0(0) = 1$ та $p_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Розв'язок цієї системи рекурентних диференціальних рівнянь наступний: $p_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k e^{-(\lambda t)}}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Знайшли закон розподілу ймовірностей випадкової кількості запитів найпростішого випадкового потоку, які надійдуть до СМО за проміжок часу $[0, t]$, тобто закон розподілу досліджуваної випадкової величини $\xi(t)$:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-(\lambda t)}}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Це повністю відповідає пуассонівському закону, параметр якого дорівнює добутку λt. Зокрема, кількість запитів, які надійдуть на обслуговування за довільний проміжок часу одиничної довжини ($t = 1$), є випадковою величиною, розподіленою за законом Пуассона з параметром $\lambda > 0$, що характеризує **інтенсивність** потоку — середню кількість надходжень запитів за одиницю часу. Тож не дивно, що найпростіший (тобто ординарний, з відсутністю післядії та стаціонарний) випадковий потік запитів на обслуговування називають **пуассонівським**.

4.7. Пуассонівський розподіл як апроксимація біноміального

Щодо пуассонівського закону розподілу імовірностей доведено, що він є прийнятною апроксимацією біноміального розподілу Бернуллі у випадку, коли кількість відтворювань комплексу умов — n — є великою, ймовірність настання випадкової події A у кожному з випробувань — p — дуже малою, а добуток np — відносно невеликий. Такою апроксимацією рекомендують користуватися при $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ та $np \leq 5$. У разі виконання цих умов параметр λ пуассонівського розподілу потрібно покласти таким, що дорівнює добутку $n\,p$, причому похибка апроксимації не перевищуватиме величини $n\,p^2$.

Припустимо, наприклад, що в страховій компанії застраховано 300 автомобілів ($n = 300$), причому ймовірність настання страхового випадку за кожним із договорів страхування дорівнює 0,001 ($p = 0{,}001$). Тоді ймовірність події, що страховій компанії доведеться 5 разів виплачувати страхові відшкодування, обчислена згідно закону Бернуллі, дорівнюватиме:

$$p_5 = \frac{300!}{5!\cdot(300-5)!}\cdot 0{,}001^5\cdot(1-0{,}001)^{300-5}\approx 0{,}00001458\,.$$

Наближена оцінка цієї ж імовірності, обчислена згідно закону Пуассона, є такою (врахуємо, що $\lambda = n\,p = 300\cdot 0{,}001 = 0{,}3$):

$$p_5 = \frac{0{,}3^5}{5!}e^{-0{,}3}\approx 0{,}00001500\,,$$

тобто відносна похибка апроксимації зараз є меншою від 3%, що виявилося навіть значно кращим у порівнянні з оцінкою абсолютної похибки апроксимації $n\,p^2 = 300\cdot 0{,}001^2 = 0{,}0003$.

4.8. Локальна теорема Муавра-Лапласа про апроксимацію біноміальних імовірностей

Окрім апроксимації біноміального розподілу пуассонівським, у випадках, коли кількість випробувань n є дуже великою, а ймовірність p настання випадкової події A у кожному з випробувань та ймовірність $(1-p)$, що подія A не станеться в такому випробуванні, не є дуже малими ($0{,}1\le p\le 0{,}9$), причому добуток $n\,p(1-p)$ досить великий, ймовірність, що подія A відбудеться k раз, може наближено бути обчислена, згідно **локальної теореми Муавра-Лапласа**, за формулою: $p_k\approx\dfrac{f(t)}{\sqrt{n\,p(1-p)}}$, де

$$t = \frac{k-n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}}\ \text{ і }\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Наприклад, при $n = 500$ і $p = 0,2$ добуток $n \cdot p = 100$ є великим, великим є і добуток $n \cdot p(1-p) = 80$. Тому апроксимацію біноміальних ймовірностей будемо виконувати не за пуассонівським законом, а з використанням вищенаведеної формули локальної теореми Муавра-Лапласа.

Скажімо, при $k = 90$ одержимо:

$$t = \frac{90 - 500 \cdot 0,2}{\sqrt{500 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -\frac{10}{\sqrt{80}} \approx -1,118$$

і

$$f(-1,118) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-1,118)^2}{2}} \approx 0,21354,$$

тому $p_{80} \approx \dfrac{0,21354}{\sqrt{80}} \approx 0,0239$.

Водночас точне значення цієї ймовірності, обчислене згідно біноміального закону, дорівнює:

$$p_{90} = C_{500}^{90} p^{90} (1-p)^{500-90} = \frac{500!}{90! \cdot 410!} \cdot 0,2^{90} \cdot 0,8^{410} \approx 0,0244,$$

тобто відносна похибка обчислень є цілком прийнятною, оскільки складає $\dfrac{0,0244 - 0,0239}{0,0239} \cdot 100 = 2,1$ (відсотки).

4.9. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

4.9.1. Ринкова ціна продукції найближчим часом з однаковою ймовірністю може збільшитися або на 1 %, або на 2 %, або на 3 %, і так далі, або ж на 10 %. Обчислити математичне сподівання та стандартне відхилення випадкового відсотка можливого збільшення ціни.

4.9.2. Санітарний інспектор перевіряє мережу торгівельних кіосків підприємства "Наша риба" до виявлення першого грубого порушення санітарно-гігієнічних норм. Ймовірність, що в кожному окремому кіоску всіх санітарних вимог не дотримано, дорівнює 0,015. Знайти закон розподілу ймовірностей випадкової кількості кіосків, які перевірить інспектор, обчислити числові характеристики цієї випадкової величини.

4.9.3. Щоб зняти гроші з карткового рахунку, особа вирішила скористатися банкоматом. Якщо банкомат виявиться несправним, особа піде до іншого банкомату. Ймовірність, що кожний окремий банкомат буде справним, дорівнює 0,9. Вважаючи, що банкомати можуть вийти з ладу незалежно один від одного, обчислити математичне сподівання та стандартне відхилення випадкової кількості банкоматів, до яких звертатиметься особа, щоб отримати гроші.

4.9.4. Товарознавець оглядає 40 зразків нового товару. Ймовірність, що кожний окремий зразок буде схвалений до продажу, дорівнює 0,8. Яку найімовірнішу кількість зразків буде схвалено до продажу?

Вказівка. Обґрунтувати, що для розподіленої за законом Бернуллі з параметрами n і p випадкової величини ξ найімовірніше її значення k задовольняє нерівності: $np - q \le k \le np + p$, де $q = 1 - p$.

4.9.5. У роздрібну мережу з 8 кіосків, розташованих в різних районах міста, надійшов новий товар. Ймовірність, що в кожному окремому кіоску реалізація товару буде успішною, дорівнює 0,75. Побудувати закон розподілу ймовірностей випадкової кількості кіосків в яких реалізація товару не матиме успіху.

4.9.6. В їдальні є 5 холодильників. Ймовірність виходу з ладу кожного холодильника упродовж року дорівнює 0,2. Знайти ймовірності подій, що впродовж року потрібно буде ремонтувати: не менше двох холодильників, три холодильники, не більше чотирьох холодильників.

4.9.7. Середня кількість вантажних машин, які привозять товари до супермаркету, складає 3 автомобілі за одну годину. Автомашини прибувають у випадкові моменти часу, незалежно один від одного. Яка ймовірність події, що за годину прибуде понад 4 автомашини?

4.9.8. Середня щодобова кількість замовлень на ремонт, що надходять до приватного підприємства "Домашній майстер", дорівнює 3. Вважаючи потік замовлень пуассонівським, обчислити ймовірність події, що за тиждень (7 днів) до підприємства надійде від 20 до 22 замовлень на ремонт.

4.9.9. Кількість банкоматів, які встановив банк, дорівнює 15. Ймовірність, що кожний окремий банкомат є справним, дорівнює 0,99. Середня вартість ремонту несправного банкомата — 100 грошових одиниць. Обчислити математичне сподівання та стандартне відхилення витрат на ремонт усіх несправних банкоматів.

4.9.10. Мале підприємство, яке надає послуги із засклення балконів, має 5 бригад. Щоденна кількість замовлень, які надходять до підприємства, має розподіл Пуассона із середнім значенням 4. Обчисліть середню на місяць кількість днів, коли окремим клієнтам буде відмовлено в обслуговуванні через брак виконавців.

Л Е К Ц І Я 5

ВАЖЛИВІ РОЗПОДІЛИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Для неперервних випадкових величин опрацюємо, насамперед, рівномірний, бета, трикутний, показниковий та нормальний розподіли.

5.1. Рівномірний розподіл

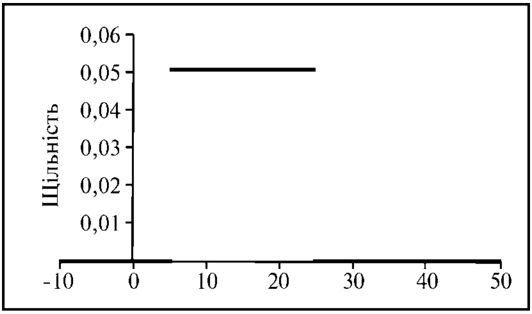
Неперервна випадкова величина ξ називається **рівномірно розподіленою** на відрізку обмеженої довжини $[a, b]$, якщо її функція щільності ймовірностей $f(x)$ є сталою на цьому відрізку і, відповідно, функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є лінійною на $[a, b]$ (рис. 5.1).

Основні числові характеристики неперервної рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$ **випадкової величини** ξ наступні:

- математичне сподівання: $\overline{\xi} = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}$,
- дисперсія: $\sigma_\xi^2 = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$,
- стандартне відхилення: $\sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \approx 0,289 \cdot (b-a)$.

Припустимо, наприклад, що бухгалтер добирається до роботи за 35...40 хвилин, причому будь-який час у цих межах є рівноймо-

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b < x. \end{cases}$$

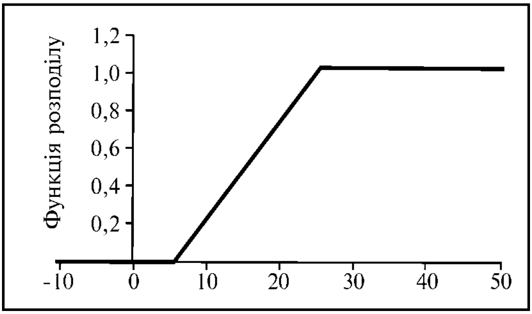


Рис. 5.1. Неперервний рівномірний розподіл

вірними. Якщо бухгалтер вийшов з дому о 8^{23}, тоді ймовірність події, що він з'явиться на роботі пізніше 9^{00}, дорівнює: $\int_{37}^{40} \frac{dx}{40-35} = 0,6$.

5.2. Бета розподіл

Неперервна випадкова величина ξ називається **бета-розподіленою** (записують також: β-розподіленою) на відрізку $[a, b]$, якщо її функція щільності ймовірностей $f(x)$ є одновершинною на цьому відрізку та **нелінійно** зменшується до нуля по мірі відхилення аргументу від точки свого максимуму до граничних значень, причому аналітичний вигляд функції щільності ймовірностей наступний:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ B(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\gamma}, & a \le x \le b; \end{cases}$$

де стала B є такою: $B = \left[\int\limits_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\gamma} d\,x \right]^{-1}$.

Щодо числових параметрів α і γ бета-розподілу вважатимемо, що $\alpha > 0$ та $\gamma > 0$. В економічних дослідженнях часто використовують наступні значення цих параметрів: або $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ та $\gamma = 2 - \sqrt{2}$, або ж $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ та $\gamma = 2 + \sqrt{2}$.

Наведемо графік функції щільності ймовірностей неперервної випадкової бета-розподіленої на відрізку $[3, 10]$ величини при $\alpha = 2 - \sqrt{2} \approx 0,585786$ і $\gamma = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414214$ (рис. 5.2).

Основними числовими характеристиками неперервної випадкової величини ξ, **що має** на відрізку $[a, b]$ **бета-розподіл** з параметрами α і γ, є такі:

- мінімальне (мінімально можливе) значення: $x^{\min} = a$;
- модальне (найімовірніше — в якому щільність ймовірностей максимальна) значення: $x^{\text{mod}} = \dfrac{\alpha b + \gamma a}{\alpha + \gamma}$;
- максимальне (максимально можливе) значення: $x^{\max} = b$;

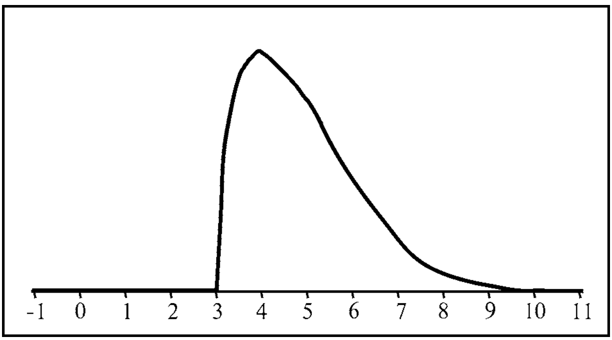


Рис. 5.2. Бета-розподіл

- очікуване значення (математичне сподівання):

$$\bar{\xi} = \frac{(1+\alpha)\,b + (1+\gamma)\,a}{\alpha+\gamma+2};$$

- дисперсія: $\sigma_\xi^2 = \dfrac{(b-a)^2(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)(\alpha+\gamma+2)^2}$.

При широковживаних значеннях параметрів $\alpha = 2 \pm \sqrt{2}$ та $\gamma = 2 \mp \sqrt{2}$ формули для обчислення числових характеристик випадкової бета-розподіленої величини ξ спрощуються та набирають вигляд:

- очікуване значення: $\bar{\xi} = \dfrac{x^{\min} + 4\,x^{\text{mod}} + x^{\max}}{6}$;
- стандартне відхилення: $\sigma_\xi = \dfrac{x^{\max} - x^{\min}}{6}$.

Наприклад, якщо майбутній прибуток підприємства вважається бета-розподіленою випадковою величиною з мінімально можливим значенням 10 тис. грошових одиниць, найімовірнішим значенням 13 тис. грошових одиниць та максимально можливим значенням 19 тис. грошових одиниць, тоді у першому наближенні математичне сподівання цього випадкового прибутку можна оцінити величиною $\dfrac{10 + 4\cdot 13 + 19}{6} = 13{,}5$ тис. грошових одиниць, а стандартне відхилення — величиною $\dfrac{19-10}{6} = 1{,}5$ тис. грошових одиниць.

5.3. Трикутний розподіл

Неперервна випадкова величина ξ називається **розподіленою за трикутним законом** на відрізку $[a, b]$, якщо її функція щільності є одновершинною на цьому відрізку та **лінійно** зменшується до нуля пропорційно відхиленням аргументу від свого модального до граничних значень. Аналітичний вигляд функції щільності ймовірностей такої випадкової величини наступний:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a \text{ або } x>b;\\ \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{якщо } a\le x\le c;\\ \dfrac{2((b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{якщо } c\le x\le b,\end{cases}$$

де $c\in(a,b)$ - модальне (найімовірніше) значення неперервної трикутно розподіленої випадкової величини ξ, тобто таке її значення, за якого функція щільності розподілу імовірностей набирає на відрізку $[a,b]$ свого максимального значення, що дорівнює $\dfrac{2}{b-a}$.

Наприклад, графік функції щільності розподілу імовірностей неперервної трикутно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини з мінімально можливим значенням $a=-1$, максимально можливим $b=7$ та модальним значенням $c=5$ матиме вигляд, що показаний на рис 5.3.

Зверніть увагу, що модальне значення c неперервної трикутно розподіленої на відрізку $[a,b]$ випадкової величини ξ може бути довільним числом з інтервалу (a,b), а не лише його централь-

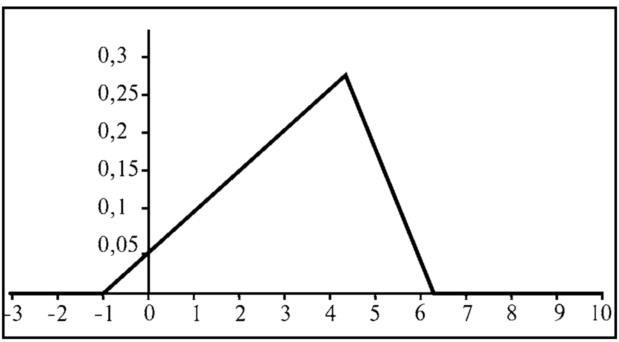


Рис. 5.3. Трикутний розподіл

ною точкою $\dfrac{a+b}{2}$. Водночас в багатьох посібниках з теорії ймовірностей трикутним називається лише **симетричний** трикутний розподіл, коли $c = \dfrac{a+b}{2}$. Цей симетричний трикутний розподіл має також назву **розподілу Сімпсона**.

Основні числові характеристики неперервної трикутно розподіленої на відрізку $[a, b]$ **випадкової величини** ξ, яка має модальне значення $c \in (a, b)$, обчислюються за формулами:

- математичне сподівання: $\overline{\xi} = \dfrac{a+c+b}{3}$;
- стандартне відхилення: $\sigma_\xi = \dfrac{\sqrt{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (b-c)^2}}{6}$.

Припустимо, що майбутній прибуток підприємства вважається, з огляду на виробничі та ринкові ризики, випадковою величиною з мінімально можливим значенням 10 тис. грошових одиниць, найімовірнішим значенням 13 тис. грошових одиниць та максимально можливим значенням 19 тис. грошових одиниць. У припущенні про трикутний розподіл ймовірностей цього випадкового прибутку його очікуваний рівень оцінюватиметься в $\dfrac{10+13+19}{3} = 14$ тис. грошових одиниць, а стандартне відхилення — в $\dfrac{\sqrt{(19-10)^2 + (13-10)^2 + (19-13)^2}}{6} \approx 1{,}87$ тис. грошових одиниць.

5.4. Показниковий (експоненційний) розподіл

Неперервна випадкова величина ξ, множиною можливих значень якої є лише всі невід'ємні числа, називається **розподіленою за показниковим законом** з параметром $\lambda > 0$, якщо вона має таку функцію щільності розподілу імовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Показниковий закон розподілу ймовірностей називають також **експоненційним**. Графіки функцій щільності експоненційного розподілу з деякими окремими значеннями параметра λ наведені на рис. 5.4.

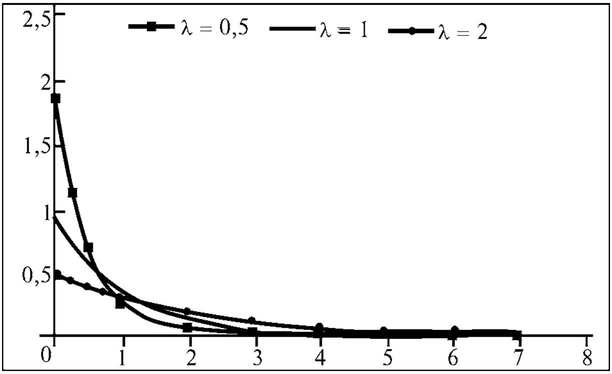


Рис. 5.4. Показниковий розподіл

Основні числові характеристики неперервної випадкової величини ξ, **розподіленої за показниковим законом** з параметром $\lambda > 0$, обчислюються за такими формулами:

- математичне сподівання: $M[\xi] = \dfrac{1}{\lambda}$;
- дисперсія: $D[\xi] = \dfrac{1}{\lambda^2}$;
- стандартне відхилення: $\sigma[\xi] = \dfrac{1}{\lambda}$.

Отже, якщо випадкова величина має експоненційний розподіл, її математичне сподівання та стандартне відхилення збігаються, причому мають не лише однакові числові значення, а також і однакові одиниці виміру.

Якщо, наприклад, до системи масового обслуговування з інтенсивністю $\lambda > 0$ надходить випадковий пуассонівський потік запитів, тоді час τ між моментами надходження двох сусідніх запитів є неперервною випадковою величиною, що має функцію розподілу ймовірностей $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$, і, відповідно, функцію щільності $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$; це якраз і відповідає експоненційному закону розподілу з таким середнім значенням довжини часового проміжку між надходженнями двох сусідніх запитів, яке є оберненим до інтенсивності λ: $\bar{\tau}=\frac{1}{\lambda}$.

5.5. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса)

Неперервна випадкова величина ξ, множиною можливих значень якої є вся числова вісь, називається **розподіленою за нормальним законом** з параметрами μ та σ, де μ — довільне, а σ — довільне додатне число, якщо її функція щільності розподілу імовірностей наступна:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty .$$

Графіки функцій щільності імовірностей нормально розподіленої випадкової величини при $\mu=3$ та значеннях $\sigma=2$ і $\sigma=5$ мають наведені на рис. 5.5.

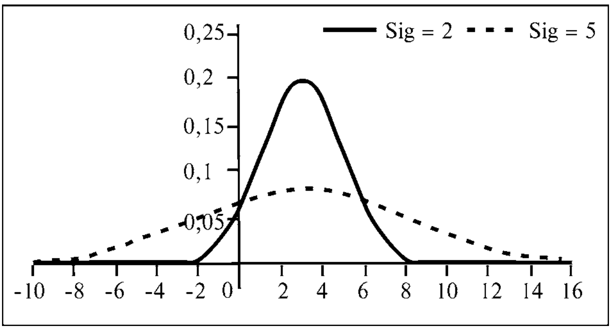


Рис. 5.5. Нормальний розподіл

Зміст параметрів μ і σ **нормально розподіленої випадкової величини** ξ стає очевидним, якщо обчислити її **основні числові характеристики**:

- математичне сподівання: $M[\xi] = \mu$;
- дисперсія: $D[\xi] = \sigma^2$;
- стандартне відхилення: $\sigma[\xi] = \sigma$.

5.6. Властивості нормально розподіленої випадкової величини

Нормальний закон розподілу ймовірностей на практиці використовують досить часто. Це пояснюється, зокрема, тим, що будь-яка випадкова величина, яка є сумою великої кількості інших випадкових величин, кожна з яких несуттєво впливає на суму, виявляється розподіленою майже за нормальним законом (це питання докладніше обговорюватиметься в лекції 7). Тому розглянемо властивості неперервної нормально розподіленої з параметрами μ та σ випадкової величини ξ ретельніше.

Розпочнемо з функції щільності імовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} :$$

1) ця функція є визначеною та неперервною на всій числовій осі ($-\infty < x < +\infty$) та завжди додатна;

2) на проміжку $(-\infty, \mu]$ функція зростає, а на проміжку $[\mu, +\infty)$ — спадає;

3) при $x = \mu$ функція набирає максимальне значення, яке дорівнює $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;

4) графік функції є симетричним відносно прямої $x = \mu$;

5) графік функції при $x \to -\infty$ або при $x \to +\infty$ асимптотично наближається до осі Ox : $f(-\infty) = f(+\infty) = +0$;

6) в точках $x = \mu \pm \sigma$, які є точками перегину графіка нашої функції, він змінює кривизну: на проміжку $(-\infty, \mu - \sigma]$ функція опукла, на проміжку $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ вона вгнута, а на проміжку $[\mu + \sigma, +\infty)$ знову опукла;

7) із зростанням математичного сподівання μ графік кривої щільності ймовірностей нормального розподілу зсувається вздовж осі Ox вправо, а із зменшенням — вліво;

8) із збільшенням стандартного відхилення σ крива щільності ймовірностей нормального розподілу стає більш пологою (плосковершинною), оскільки максимум функції $f(x)$ зменшується, а із зменшенням σ графік стає більш гостровершинним, оскільки максимум функції щільності збільшується.

У свою чергу, інтегральна функція розподілу неперервної нормально розподіленої випадкової величини — $F(x)$, яка визначається через диференціальну функцію $f(x)$ за правилом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, d\,x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\,x\,, \quad -\infty < x < +\infty\,,$$

є зростаючою, обмеженою: $F(-\infty) = +0$, $F(+\infty) = 1 - 0$, опуклою при $x \le \mu$ та вгнутою при $x \ge \mu$.

Нормально розподілена випадкова величина називається **нормованою** (або **стандартизованою** чи **стандартною**), якщо $\mu = 0$ та $\sigma = 1$. Зверніть увагу, що у лекції 3 якраз і було наведено графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу нормованої нормально розподіленої випадкової величини.

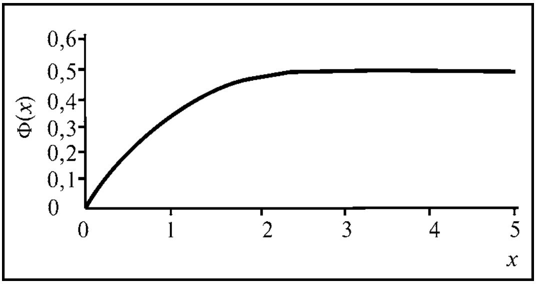
Щоб обчислити ймовірність попадання заданої нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал $[x_1, x_2]$, скористаємося у відповідному інтегралі заміною змінної $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$:

$$P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, d\,x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, d\,x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, d\,t = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} d\,x$ — вже знайома нам функція Лапласа, яка є неперервною, непарною та на проміжку $x \in [0; +\infty]$ зростаючою (рис. 5.6).

Рис. 5.6. Функція Лапласа в області $x \geq 0$



Функцію Лапласа не можна виразити елементарними функціями, але вже у XIX столітті для неї були побудовані відповідні таблиці значень, які з часом лише уточнювались та доповнювались.

Окремими значеннями функції Лапласа, якими часто користуються, є, наприклад, наступні:

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0,00000000	2	0,47724987
0,01	0,00398936	2,5	0,49379033
0,05	0,01993881	3	0,49865010
0,1	0,03982784	3,5	0,49976737
0,5	0,19146246	4	0,49996833
1	0,34134475	4,5	0,49999660
1,5	0,43319280	5	0,49999971

У практичних цілях при $x \geq 5$ значення функції Лапласа зазвичай обирають таким, що дорівнює 0,5.

Знайдемо, далі, імовірність події, що нормально розподілена випадкова величина ξ за абсолютною величиною відхиляється від свого математичного сподівання $\bar{\xi}$ — тобто параметра μ — не більше, ніж на задане наперед число $\varepsilon > 0$:

$$P\{|x-\mu| \leq \varepsilon\} = P\{\mu-\varepsilon \leq x \leq \mu+\varepsilon\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu+\varepsilon)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-\varepsilon)-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Зокрема, при ε, що дорівнює σ, 2σ або 3σ, матимемо наступні правила:

- **правило однієї сигми**: $P\{|\,x-\mu\,|\le\sigma\} = 2\Phi(1) \approx 0{,}6827$;
- **правило двох сигм**: $P\{|\,x-\mu\,|\le 2\sigma\} = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545$;
- **правило трьох сигм**: $P\{|\,x-\mu\,|\le 3\sigma\} = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973$.

Скажімо, останнє — правило трьох сигм — означає, що коли випадкова величина підпорядковується нормальному закону розподілу з параметрами μ та σ, тоді її значення з імовірністю 0,9973 знаходитимуться в інтервалі $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$, тобто практично не виходитимуть за межі інтервалу довжиною 6σ із центром μ.

З правила трьох сигм випливає також спосіб оцінювання стандартного відхилення нормально розподіленої випадкової величини: потрібно поділити на число 3 максимальне практично можливе відхилення цієї випадкової величини від її середнього рівня.

Нормальний розподіл може слугувати апроксимацією біноміального розподілу з параметрами n і p, якщо n досить велике, p задовольняє нерівності: $0{,}1 < p < 0{,}9$ (краще, щоб p не сильно відрізнялося від 0,5), а також добутки $n\,p$ і $n(1-p)$ є більшими, аніж 5. Параметри μ (математичне сподівання) та σ (стандартне відхилення) апроксимуючого нормального закону розподілу в такому разі обчислюються за формулами: $\mu = n\,p$, $\sigma = \sqrt{n\,p(1-p)}$.

Нормальний розподіл може також слугувати апроксимацією розподілу Пуассона з параметром λ, якщо $\lambda \ge 10$. У таких випадках параметри μ та σ апроксимуючого нормального закону розподілу обчислюються за формулами: $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

У свою чергу, симетричний на відрізку $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ бета-розподіл з параметрами $\alpha = \gamma = 3$ може слугувати прийнятною апроксимацією нормального розподілу з параметрами μ і σ. У цьому можна візуально пересвідчитись, якщо порівняти графіки відповідних функцій щільності. Як приклад, наводимо, наприклад, такі графіки для значень параметрів $\mu = 5$ і $\sigma = 3$ (рис. 5.7).

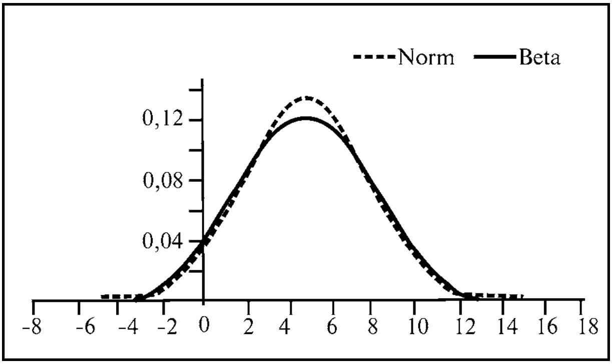


Рис. 5.7. Апроксимація нормального розподілу симетричним бета-розподілом

І хоч історично саме нормальний розподіл набув широкого поширення в практиці математико-статистичних досліджень, вважаємо за необхідне привернути увагу і до бета-розподілу, оскільки більшість економічних, фінансових, соціальних показників тощо принципово мають обмежені проміжки своїх теоретично можливих значень. Наприклад, майбутній обсяг виробництва будь-якого підприємства ніколи не може бути від'ємним, а його виробничі потужності, хоч і можуть бути дуже великими, коректно розглядати лише як обмежені. До того ж, на відміну від нормального, бета-розподіл може відбивати і випадки несиметричності функції щільності розподілу імовірностей.

5.7. Поняття про моменти випадкової величини

Насамкінець опрацюємо поняття про початкові та центральні моменти випадкової величини, а також про їх використання з метою обчислення асиметрії та ексцесу досліджуваного ймовірнісного розподілу.

Як вже було зазначено в лекції 3, основними числовими характеристиками випадкової величини ξ виступають математичне сподівання $M[\xi]$ та дисперсія $D[\xi]$ (або ж стандартне відхилення $\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}$). Початкові та центральні моменти випадкової величини являють собою узагальнення цих показників.

Початковим моментом k -го порядку — ν_k — випадкової величини ξ називають математичне сподівання величини ξ^k:

$$\nu_k = M[\xi^k],\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Отже, початковий момент першого порядку — це звичайне математичне сподівання випадкової величини, початковий момент другого порядку — це математичне сподівання квадрата цієї величини, третього порядку — її кубічних значень тощо.

В свою чергу, **центральним моментом k -го порядку** — μ_k — випадкової величини ξ називають математичне сподівання такої випадкової величини: $(\xi - M[\xi])^k$:

$$\mu_k = M[(\xi - M[\xi])^k],\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Бачимо, зокрема, що центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю: $\mu_1 = 0$, а центральний момент другого порядку є дисперсією нашої випадкової величини: $\mu_2 = D[\xi]$.

Третій центральний момент характеризує асиметрію розподілу ймовірностей випадкової величини відносно її середнього значення. За його допомогою обчислюється **коефіцієнт асиметрії**:

$$A_\xi = \frac{\mu_3}{\sigma^3[\xi]} .$$

Для симетричного розподілу коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю, для зміщеного вліво він додатний, а для зміщеного вправо — від'ємний (рис. 5.8 та рис. 5.9 а).

Четвертий центральний момент характеризує гостровершинність або, навпаки, плосковершинність розподілу ймовірностей. На його основі обчислюють **ексцес**: $E_\xi = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4[\xi]} - 3$.

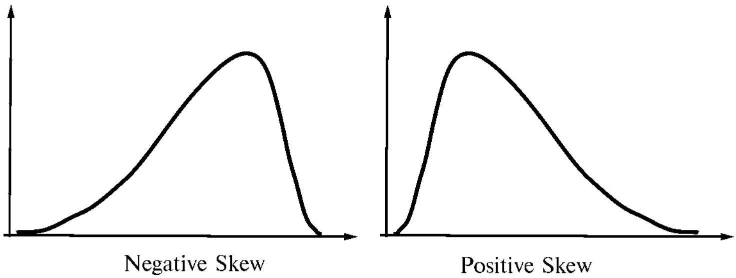
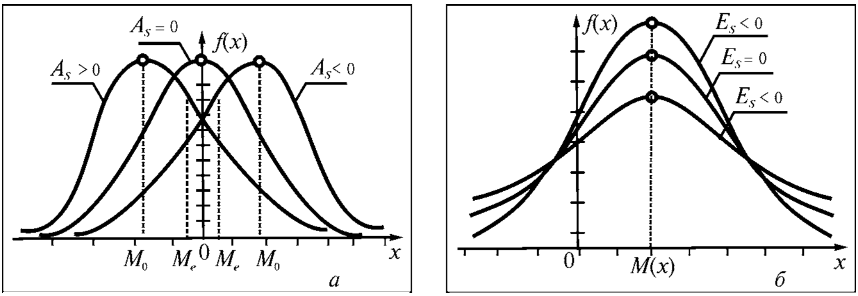


Рис. 5.8. Крива ліворуч має від'ємну асиметрію, а крива праворуч — додатню
Джерело: https://uk.wikipedia.org/wiki...
...File:Negative_and_positive_skew_diagrams_(English).svg



Для нормального закону розподілу асиметрія дорівнює нулю. Якщо асиметрія додатна, функція щільності розподілу зміщена ліворуч, а якщо від'ємна — праворуч

Для нормального закону розподілу ексцес дорівнює нулю. Якщо ексцес додатний, функція щільності розподілу має гостру вершину, а якщо від'ємний — більш пологу

Рис. 5.9. Графіки функцій щільності ймовірностей при різних значеннях коефіцієнта асиметрії (а) та ексцесу (б)
Джерело: http://yukhym.com/uk/vipadkovi-velichini/asimetriya-i-ekstses-obchislennya-grafiki.html

Для нормального розподілу ексцес дорівнює нулю. Додатне значення ексцесу свідчить, що графік функцій щільності є більш гостровершинним, аніж нормальна крива, а від'ємне — що менш гостровершинним, тобто плоскішим у порівняння зі щільністю нормального розподілу (рис. 5.9 б).

5.8. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

5.8.1. Виробничі витрати залежать від ринкової ціни ресурсів та вважаються випадковою величиною, що рівномірно розподілена в межах від 200 до 700 грошових одиниць. Яке математичне сподівання випадкової величини витрат та її стандартне відхилення? Обчисліть також ймовірність події, що виробничі витрати не будуть вищими, аніж 500 грошових одиниць.

5.8.2. Прибуток від реалізації першої продукції є випадковою величиною, що рівномірно розподілена в межах від 500 до 1000 грошових одиниць, а прибуток від реалізації другої продукції — випадковою величиною, рівномірно розподіленою в межах від 700 до 1500 грошових одиниць. Зазначені випадкові прибутки є незалежними між собою. Обчислити межі варіації, математичне сподівання та стандартне відхилення випадкового прибутку від реалізації загалом першої та другої продукції.

5.8.3. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{3(x+1)}{4}, & -1 \le x < \dfrac{1}{3} \\ 1, & x \ge \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Знайти функцію щільності ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини, назвати її закон розподілу. Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу ймовірностей випадкової величини ξ. Обчислити імовірність події, що випадкова величина ξ набере значення з інтервалу (0; $^1/_3$).

5.8.4. Тривалість терміну окупності інноваційного інвестиційного проекту розглядають як випадкову величину, що має бета-розподіл із мінімально можливим значенням 15 місяців, максимально можливим — 33 місяці та найімовірнішим значенням 21 місяць. Обчислити математичне сподівання, стандартне відхилення та побудувати графік диференціальної функції розподілу ймовірностей цієї випадкової величини, якщо скористатися найуживанішими значеннями параметрів бета-розподілу. Як зміняться основні числові характеристики випадкового терміну окупності, якщо замість припущення про бета-розподіл звернутися до несиметричного трикутного розподілу?

5.8.5. Випадковий потік дзвінків оператору call-центру є пуассонівським з інтенсивністю $\lambda = 10$ дзвінків за годину. Обчислити математичне сподівання та стандартне відхилення проміжків часу між суміжними викликами.

5.8.6. Прибуток від реалізації першої продукції розглядається як випадкова нормально розподілена величина із середнім значенням 150 тис. грн. та стандартним відхиленням 20 тис. грн., а прибуток від реалізації другої продукції — як випадкова нормально розподілена величина із середнім значенням 200 тис. грн. та стандартним відхиленням 50 тис. грн. Вважаючи ці прибутки незалежними та знаючи, що їх сума має нормальний закон розподілу ймовірностей, обчислити імовірності наступний подій:

а) загальний прибуток від реалізації усієї продукції виявиться меншим від 280 тис. грн.;

б) загальний прибуток знаходитиметься в межах від 300 тис. грн. до 400 тис. грн.;

в) загальний прибуток буде не меншим від 420 тис. грн.

Яким є найімовірніше значення загального прибутку від реалізації всієї продукції?

5.8.7. Витрати на закупівлю виробничих ресурсів розглядаються як рівномірно розподілена випадкова величина в межах від 120 до 150 грошових одиниць, а витрати на їх транспортування — як рівномірно розподілена випадкова величина в межах від 30 до 50 грошових одиниць. Витрати на закупівлю та витрати на транспортування вважаються незалежними між собою. Обчислити математичне сподівання та стандартне відхилення можливих загальних витрат на закупівлю та транспортування виробничих ресурсів.

5.8.8. Опрацюємо питання про **використання нормального закону як апроксимацію біноміального**. Припустимо, що з дуже великої кількості цеглин, 30 % яких є з дефектами, у випадковий спосіб відібрано 1000 цеглин. Потрібно оцінити ймовірність, що серед відібраних цеглин кількість цеглин з дефектами знаходитиметься в межах від 290 до 320.

За умовою, ймовірність події, що навмання обрана з великої партії цеглина має дефекти, дорівнює 0,3: $p = 0,3$. Відповідно, подія, що ця цеглина не матиме дефектів, дорівнює 0,7: $q = 1 - p = 0,7$. Тому ймовірність події, що серед відібраних навмання 1000 цеглин точно k цеглин матимуть дефекти, обчислюється за формулою, яку використовують при описі біноміального закону: $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, де число n дорівнює кількості відібраних цеглин: $n = 1000$. Отже, обчислення ймовірності P події, що серед відібраних 1000 цеглин кількість цеглин з дефектами знаходитиметься в межах від 290 до 320, слід робити за формулою:

$$P = \sum_{k=290}^{320} p_k = \sum_{k=290}^{320} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} .$$

Щоб спростити обчислення за цією формулою, які вимагатимуть знаходження та підсумовування 31 доданка, скористаємося апроксимацією біноміального розподілу нормальним. Прийнятність такого способу пояснюється тим, що $n = 1000$ — велике число, ймовірність $p = 0,3$ лежить у межах від 0,1 до 0,9, а добутки $np = 300$ та $nq = 700$ є значно більшими, аніж число 5.

Далі обчислимо параметри апроксимуючого нормального закону розподілу:

- математичне сподівання $\mu = np = 300$,
- стандартне відхилення

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300 \cdot 0,7} = \sqrt{210} \approx 14,5 .$$

Нехай ξ — неперервна випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $\mu = 300$, $\sigma = 14,5$. Тоді, з поправкою на неперервність, ймовірності P події, що серед відібраних 1000 цеглин кількість цеглин з дефектами знаходитиметься в межах від 290 до 320, дорівнюватиме ймовірності, що випадкова величина ξ набере значення в межах від 289,5 до 320,5:

$$P = P\{289,5 \le \xi \le 320,5\} = F_\xi(320,5) - F_\xi(289,5) =$$

$$= \Phi\left(\frac{320,5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{289,5 - \mu}{\sigma}\right),$$

де $F_\xi(\cdot)$ — інтегральна функція розподілу нормального закону з параметрами $\mu = 300$ та $\sigma = 14{,}5$, значення якої обчислюватимемо з використанням функції Лапласа $\Phi(\cdot)$, скориставшись її непарністю.

Отже,

$$P = \Phi\left(\frac{320{,}5-300}{14{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{289{,}5-300}{14{,}5}\right) = \Phi\left(\frac{20{,}5}{14{,}5}\right) + \Phi\left(\frac{10{,}5}{14{,}5}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}41) + \Phi(0{,}72) = 0{,}4212887 + 0{,}2655095 = 0{,}6867982\,.$$

Для порівняння наведемо більш точний результат, отриманий за допомогою Excel, якщо користуватися підсумовуванням біноміальних ймовірностей: $P = 0{,}6857307$. Відносна похибка складає 0,16%, що підкреслює практичну доцільність заміни, коли це можливо, біноміального розподілу нормальним.

Примітка. Наведений підхід ґрунтується на **інтегральній теоремі Муавра-Лапласа**, якою доведено, що ймовірність P появи в n незалежних випробуваннях події A, яка має ймовірність p ($0 < p < 1$), не менше k_1 разів і не більше k_2 разів ($k_1 < k_2$), при дуже великих значеннях n наближено визначається залежністю:

$$P = \Phi\left(\frac{k_2 - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}}\right),$$

де $\Phi(\cdot)$ — функція Лапласа.

Зауважимо, що у практичних розрахунках, оскільки $n << +\infty$, наведену формулу слушно коригувати, користуючись поправкою на неперервність. Дійсно, без цієї поправки наближений результат в нашому прикладі був би таким:

$$P = \Phi\left(\frac{320-300}{14{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{290-300}{14{,}5}\right) = \Phi\left(\frac{20}{14{,}5}\right) + \Phi\left(\frac{10}{14{,}5}\right) =$$

$$= 0{,}41610047 + 0{,}25479447 = 0{,}67089494\,,$$

тобто відносна похибка складала б вже не 0,16%, а 2,16%.

5.8.9. З'ясуємо тепер **спосіб апроксимації пуассонівського закону розподілу ймовірностей нормальним**. Нагадаємо, що така апроксимація є прийнятною, коли параметр λ розподілу Пуассона задовольняє нерівність: $\lambda \geq 10$. Тоді параметри μ та σ апроксимуючого нормального закону розподілу ймовірностей визначаються за формулами: $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Припустимо, наприклад, що до страхової компанії щодня, в середньому, звертається 30 клієнтів ($\lambda = 30$). Потрібно, вважаючи потік клієнтів пуассонівським, оцінити ймовірність P, що упродовж дня звернеться понад 35 клієнтів.

Керуючись пуассонівськими ймовірностями ($p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, де k — це кількість відвідувачів страхової компанії упродовж дня, $k = 0, 1, 2, \ldots$), для знаходження шуканої ймовірності P потрібно було б скористатися формулою:

$$P = \sum_{k=36}^{\infty} p_k = \sum_{k=36}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{35} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Обчислимо цю ймовірність за допомогою Excel:

$$P = 0{,}157383474.$$

Якщо користуватися нормальним законом, обчисливши його параметри $\mu = \lambda = 30$ і $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{30}$ та позначивши відповідну інтегральну функцію розподілу ймовірностей через $F(\cdot)$, одержимо такі результати:

а) без поправки на неперервність:

$$\text{або } P = 1 - F(35) = 0{,}180655214\,1,$$

$$\text{або ж } P = 1 - F(36) = 0{,}136660839;$$

б) з поправкою на неперервність:

$$P = 1 - F(35{,}5) = 0{,}157651226.$$

Бачимо, що результат з поправкою на неперервність значно кращий від результатів, знайдених без такої поправки, та є цілком прийнятним при заміні пуассонівського закону розподілу ймовірностей на нормальний.

5.8.10. Довести, що для нормального закону розподілу ймовірностей і коефіцієнт асиметрії, і ексцес дорівнюють нулю.

Л Е К Ц І Я 6

СУКУПНОСТІ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

6.1. Поняття, приклади сукупності випадкових величин

Дотепер, коли йшла мова про ймовірності та розподіли, ми розглядали лише окремі випадкові величини. Але на практиці доводиться мати справу з випадковими величинами, які є сенс розглядати у сукупності, оскільки кожний з економічних процесів часто характеризується не одним, а системою показників. Поширений приклад — коли деяка випадкова величина є результатом впливу кількох інших випадкових величин. Скажімо, майбутній прибуток підприємства, що розглядається як випадкова величина, є результатом різниці майбутнього випадкового доходу цього підприємства та майбутніх випадкових витрат, причому випадковість показників витрат і доходу є наслідком, зокрема, випадкового характеру майбутніх ринкових цін на виробничі ресурси, що використовуватимуться, та цін на продукцію, яка буде виготовлена підприємством.

Найпростішою є сукупність з двох випадкових величин. Позначимо окремі випадкові величини через ξ та ζ, а їх сукупність (або систему) — через $\{\xi, \zeta\}$. Інколи сукупність двох випадкових величин позначають і через (ξ, ζ) та називають **двовимірним випадковим вектором**, **випадковою точкою у просторі** R^2 або ж **двовимірною випадковою величиною**. Наприклад, точні довжина та ширина окремої кахельної плитки, що буде випадково обрана з великої партії однотипних плиток, можуть розглядатися у сукупності як двовимірна випадкова величина.

Аналогічно двовимірній вводиться і поняття n-вимірної випадкової величини, яка є упорядкованою сукупністю n одновимірних випадкових величин ($n \geq 2$). Залежно від типу окремих своїх складових, багатовимірна випадкова величина може бути або дискретною, або неперервною, або мішаною. У першому випадку всі компоненти такої сукупності є одновимірними дискретними випадковими величинами, а другому випадку — неперервними, у третьому — випадковими величинами різних типів.

Надалі пропонуємо, щоб зняти певну невизначеність при використанні поняття "випадкова величина", для системи випадкових одновимірних величин використовувати поняття "випадкова система", "випадковий вектор", "сукупність випадкових величин", а поняття "випадкова величина" вживати лише щодо одновимірної випадкової величини, опускаючи при цьому уточнення "одновимірна".

6.2. Опис та числові характеристики дискретної двовимірної сукупності

У випадку **дискретної двовимірної сукупності випадкових величин** — тобто сукупності, що складається з дискретної випадкової величини ξ з множиною можливих значень $X = \{x_i \mid i = \overline{1, m}\}$ та дискретної випадкової величини ζ з множиною можливих значень $Y = \{y_j \mid j = \overline{1, n}\}$ — закон розподілу системи $\{\xi, \zeta\}$ цих двох випадкових величин зручно подати **матрицею (таблицею) розподілу ймовірностей**: $P = \| p_{ij} \|_{(m \times n)}$ (рис. 6.1), кожний елемент p_{ij} якої є ймовірністю події, що випадкова величина ξ набере значення x_i та, одночасно, випадкова величина ζ набере значення y_j:

$$p_{ij} = P\{(\xi = x_i) \cap (\zeta = y_j)\}:$$

Можливі значення ξ	Можливі значення ζ				
	y_1	y_2	y_3	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	...	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}	...	p_{mn}

Рис. 6.1. Загальний вигляд таблиці розподілу ймовірностей дискретної двовимірної сукупності випадкових величин

Всі елементи матриці ймовірностей невід'ємні, а їхня сума дорівнює одиниці:

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0\,, \; i = \overline{1, m}\,, \; j = \overline{1, n}\,; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\,. \end{cases}$$

За матрицею ймовірностей для кожної з випадкових величин двовимірної системи $\{\xi, \zeta\}$ можна — шляхом підсумовування елементів відповідного або рядка, або стовпця — обчислити ймовірності окремих подій:

- або подій, що стосуються окремо першої випадкової величини ξ:

$$\{\xi = x_i\}: \; P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,, \; i = \overline{1, m}\,;$$

- або подій, що стосуються окремо другої випадкової величини ζ:

$$\{\zeta = y_j\}: \; P\{\zeta = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\,, \; j = \overline{1, n}\,.$$

Тому **основні числові характеристики кожної з випадкових величин** ξ та ζ — математичні сподівання та дисперсії — обчислюватимуться за такими формулами:

- $M[\xi] = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}\,,$
- $D[\xi] = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - M[\xi])^2 \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}\,;$
- $M[\zeta] = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}\,,$
- $D[\zeta] = \sum\limits_{j=1}^{n} (y_i - M[\zeta])^2 \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}\,.$

Окрім цього, обчислюються також **показники ймовірнісного (або стохастичного**, не плутати з функціональним!**) зв'язку** між цими випадковими величинами:

- **коваріація**: $\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = M[(\xi - M[\xi])(\zeta - M[\zeta])] =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - M[\xi])(y_j - M[\zeta])\, p_{ij}\ ;$$

- **коефіцієнт кореляції**: $\rho(\xi, \zeta) \equiv \rho_{\xi\zeta} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi, \zeta)}{\sqrt{D[\xi]\, D[\zeta]}}$.

Очевидно, що $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D[\xi]$ і $\operatorname{cov}(\zeta, \zeta) = D[\zeta]$.

За аналогією з нерівністю Коші-Буняковського, завжди справджується нерівність: $-1 \le \rho_{\xi\zeta} \le +1$.

Приклад. Припустимо, що таблиця розподілу ймовірностей дискретних випадкових величин ξ та ζ є такою:

ξ	ζ			Сума
	2	5	10	
8	0,1	0,2	0,1	0,4
14	0,3	0,1	0,2	0,6
Сума	0,4	0,3	0,3	1,0

Тоді, скажімо, ймовірність події $\{\xi = 8\}$ буде результатом підсумовування усіх імовірностей з першого рядка матриці ймовірностей цієї таблиці:

$$P\{\xi = 8\} = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4\,,$$

тобто закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ матиме вигляд:

Номер значення	i	1	2
Значення	x_i	8	14
Ймовірність	$P\{\xi = x_i\}$	0,4	0,6

У свою чергу, ймовірність події $\{\zeta = 5\}$ буде результатом підсумовування усіх ймовірностей з другого стовпця матриці розподілу ймовірностей:

$$P\{\zeta = 5\} = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3\,,$$

а закон розподілу ймовірностей випадкової величини ζ матиме вигляд:

Номер значення	j	1	2	3
Значення	y_j	2	5	10
Ймовірність	$P\{\zeta = y_j\}$	0,4	0,3	0,3

Тепер можемо обчислити основні числові характеристики випадкових величини ξ та ζ — їхні математичні сподівання та дисперсії:

$$M[\xi] = 8 \cdot 0,4 + 14 \cdot 0,6 = 11,6\ ,$$

$$D[\xi] = (8 - 11,6)^2 \cdot 0,4 + (14 - 11,6)^2 \cdot 0,6 = 8,64\ ;$$

$$M[\zeta] = 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,3 = 5,3\ ,$$

$$D[\zeta] = (2 - 5,3)^2 \cdot 0,4 + (5 - 5,3)^2 \cdot 0,3 + (10 - 5,3)^2 \cdot 0,3 = 11,01\ .$$

Обчислимо також показники стохастичного зв'язку між випадковими величинами ξ та ζ — коваріацію та коефіцієнт кореляції. Причому обчислення коваріації виконаємо із використанням операції матричного множення:

а) коваріація:

$$\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = \left[x_1 - M[\xi]\ ;\quad x_2 - M[\xi]\ \right] \cdot \| p_{ij} \|_{(2\times 3)} \cdot \begin{bmatrix} y_1 - M[\zeta] \\ y_2 - M[\zeta] \\ y_3 - M[\zeta] \end{bmatrix} =$$

$$= \left[8 - 11,6;\quad 14 - 11,6\right] \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 - 5,3 \\ 5 - 5,3 \\ 10 - 5,3 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[0,36;\quad -0,48;\quad 0,12\right] \cdot \begin{bmatrix} -3,3 \\ -0,3 \\ 4,7 \end{bmatrix} = -0,48\ ;$$

б) коефіцієнт кореляції:

$$\rho(\xi, \zeta) \equiv \rho_{\xi\zeta} = \frac{-0,48}{\sqrt{8,64 \cdot 11,01}} \approx -0,0492 ,$$

тобто між випадковими величинами ξ та ζ маємо практично непомітний від'ємний стохастичний зв'язок.

Приклад закінчено.

В особливому, але вельми поширеному випадку — коли випадкові величини ξ та ζ незалежні — маємо формулу:

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\zeta = y_j\} , \ i = \overline{1, m} , \ j = \overline{1, n} ,$$

тому що ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

З цього випливає, що коваріація та коефіцієнт кореляції незалежних між собою випадкових величин дорівнюють нулю.

Проте з рівності $\rho_{\xi\zeta} = 0$ (у такому разі випадкові величини ξ та ζ називаються **некорельованими**) зовсім не випливає, що випадкові величини ξ та ζ незалежні.

Коли ж коефіцієнт кореляції значно відрізняється від нуля, тобто чим ближчим до +1 за абсолютною величиною є значення $\rho_{\xi\zeta}$, тим більш корельованими (залежними у ймовірнісному сенсі) є випадкові величини ξ та ζ. Часто вважають, що при $|\rho_{\xi\zeta}| > 0,7$ між випадковими величинами ξ та ζ є сильна, а при $0,3 < |\rho_{\xi\zeta}| <$ $< 0,7$ — слабка кореляційна залежність. При $0 < |\rho_{\xi\zeta}| < 0,3$ кореляційна залежність між випадковими величинами ξ та ζ є майже непомітною. Причому зараз слід звернути увагу, що вислів "кореляційна залежність" означає не будь-яку, а лише **лінійну** стохастичну залежність.

У випадку функціональної лінійної залежності між випадковими величинами ξ та ζ матимемо: $|\rho_{\xi\zeta}| = 1$. Розглянемо, наприклад, систему з двох дискретних випадкових величин ξ та ζ, які зв'язані функціональною лінійною залежністю: $\xi = 2\zeta + 1$, а таблиця розподілу ймовірностей є такою:

ξ	ζ	
	1	3
3	0,6	0
7	0	0,4

Зараз математичні сподівання та дисперсії випадкових величин ξ та ζ дорівнюють:

$$M[\xi] = 4,6\ ,\ \ M[\zeta] = 1,8\ ,\ \ D[\xi] = 3,84\ ,\ \ D[\zeta] = 0,96\ .$$

Далі, коваріація і коефіцієнт кореляції між ξ та ζ є такими:

$$\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = \left[3 - 4,6;\quad 7 - 4,6\right] \cdot \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - 1,8 \\ 3 - 1,8 \end{bmatrix} = 1,92\ ,$$

$$\rho_{\xi\zeta} = \frac{1,92}{\sqrt{3,84 \cdot 0,96}} = +1\ .$$

Отже, коефіцієнт кореляції між ξ та ζ дорівнює 1: $\rho_{\xi\zeta} = +1$. Це є наслідком функціональної позитивної лінійної залежності $\xi = 2\zeta + 1$ між випадковими величинами ξ та ζ.

6.3. Опис та числові характеристики двовимірної сукупності неперервних випадкових величин

У випадку **двох неперервних** випадкових величин ξ та ζ їх сукупність $\{\xi, \zeta\}$ можна охарактеризувати визначеною в площині xOy **функцією розподілу ймовірностей системи з двох випадкових величин** $F(x, y)$, яка описує ймовірності того, що випадкові величини ξ та ζ одночасно задовольнятимуть нерівності $\xi < x$ і $\zeta < y$:

$$F(x, y) = P\{(\xi < x) \cap (\zeta < y)\},\ (x, y) \in R^2\ .$$

Отже, функція розподілу ймовірностей $F(x, y)$ системи з двох неперервних випадкових величин ξ та ζ показує ймовірність події, що випадкова точка (ξ, ζ) на площині в прямокутній декартовій системі координат потрапить в необмежений квадрант з єдиною верхньою правою вершиною — точкою (x, y) (рис. 6.2).

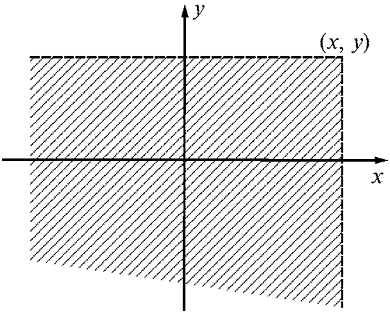


Рис. 6.2. Геометричний зміст функції розподілу ймовірностей системи з двох неперервних випадкових величин
Джерело: rucont.ru/file.ashx?guid=a7187223-e180-47bf-8f1b-785eafb25514

Функція розподілу ймовірностей $F(x, y)$ вважається визначеною у просторі R^2, неперервною зліва за кожним з аргументів, а також володіє такими основними властивостями:

1) $0 \le F(x, y) \le 1$,

2) $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ при $x_1 < x_2$,

3) $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$ при $y_1 < y_2$,

4) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$,

5) $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Перша властивість — це звичайна властивість будь-якої ймовірності. Друга та третя властивості випливають з того, що при збільшенні будь-якого з аргументів відповідний квадрант в площині xOy збільшується, тобто ймовірність, що випадкова точка (ξ, ζ) потрапить до нього, на може зменшитись. Четверта властивість випливає з того, що події $\{\xi < -\infty\}$, $\{\zeta < -\infty\}$, а також добуток цих подій є неможливими. Нарешті, п'ята властивість є результатом достовірності події $\{(\xi < +\infty) \cap (\zeta < +\infty)\}$.

За функцією розподілу двовимірної системи можна, наприклад, обчислити ймовірність, що двовимірна випадкова точка (ξ, ζ) потрапить у заданий прямокутник, сторони якого є паралельними до координатних осей:

$$P\{(x_1 < \xi < x_2) \bigcap (y_1 < \zeta < y_2)\} =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)\ ;$$

можна визначити також і функції розподілу $F_\xi(x)$ і $F_\zeta(y)$ кожного з компонентів випадкової системи $\{\xi, \zeta\}$:

$$F_\xi(x) = F(x, +\infty)\ ,$$
$$F_\zeta(y) = F(+\infty, y)\ .$$

Щільність розподілу системи з двох випадкових величин визначається як мішана частинна похідна другого порядку від функції розподілу ймовірностей цієї системи:

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y)\ .$$

Отже, з іншого боку, функцію розподілу ймовірностей $F(x, y)$ неперервної системи випадкових величин ξ та ζ можна визначити через функцію щільності ймовірностей цієї системи за формулами:

або $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} d\,x \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\, d\,y\ ,$

або $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} d\,y \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\, d\,x\ .$

Геометрично щільність розподілу для системи двох неперервних випадкових величин є границею відношення ймовірності, що випадкова точка (ξ, ζ) потрапить у малий прямокутник, до площі цього прямокутника за умов, що довжини його сторін прямують до нуля.

Функція щільності розподілу ймовірностей двовимірної системи випадкових величин невід’ємна:

$$f(x, y) \geq 0 \ \text{ для всіх } \ (x, y) \in R^2\ ,$$

а також має властивість:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, d\,x\, d\,y = 1\ .$$

За відомою функцією щільності ймовірностей системи випадкових величин ξ та ζ можна обчислити ймовірність події, що випадкова точка (ξ, ζ) потрапить в деяку область S координатної площини xOy:

$$P\{(\xi, \zeta) \in S\} = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy .$$

Якщо, наприклад, система випадкових величин ξ та ζ має функцію щільності ймовірностей $f(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, ймовірність попадання випадкової точки (ξ, ζ) в квадрат з діагональними вершинами $(0, 0)$ та $(1, 1)$ дорівнює $\dfrac{1}{16}$:

$$P\{(\xi, \zeta) \in S = \{(x, y) | 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}\} =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\, y \,\Big|_0^1\right)\left(arctg\, x \,\Big|_0^1\right) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16} .$$

За функцію щільності ймовірностей $f(x, y)$ системи неперервних випадкових величин ξ та ζ обчислюються також:

а) функції щільності ймовірностей окремо кожної з цих випадкових величин ξ та ζ:

- $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$,
- $f_\zeta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$

б) основні числові характеристики випадкових величин ξ та ζ — їхні математичні сподівання та дисперсії:

- $M[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy\, dx$,

- $M[\zeta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{\zeta}(y)\, d\,y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, d\,x\, d\,y$,
- $D[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi]^2)\, f_{\xi}(x)\, d\,x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi]^2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, d\,y\, d\,x$,
- $D[\zeta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M[\zeta]^2)\, f_{\zeta}(y)\, d\,y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M[\zeta]^2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, d\,x\, d\,y$;

в) показники стохастичного зв’язку між цими випадковими величинами:

- **коваріація**: $\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])(y - M[\zeta]) f(x, y)\, d\,x\, d\,y$;
- **коефіцієнт кореляції**: $\rho(\xi, \zeta) \equiv \rho_{\xi\zeta} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi, \zeta)}{\sqrt{D[\xi]\, D[\zeta]}}$.

Для **незалежних** неперервних випадкових величин ξ та ζ справджується рівність:

$$F(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\zeta}(y) ,$$

де $F_{\xi}(x)$ і $F_{\zeta}(y)$, відповідно, функції розподілу ймовірностей випадкових величин ξ та ζ. Тож, у випадку незалежних випадкових величин щільність розподілу ймовірностей такої системи є добутком функцій щільності розподілу ймовірностей $f_{\xi}(x)$ і $f_{\zeta}(y)$ кожної з випадкових величин ξ та ζ:

$$f(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\zeta}(y) .$$

Це означає, що коваріація та коефіцієнт кореляції незалежних між собою неперервних випадкових величин дорівнюють нулю.

Водночас з некорельованості між собою випадкових величини ξ та ζ (коли $\rho_{\xi\zeta} = 0$) ще не випливає, що неперервні випадкові величини ξ та ζ незалежні.

Як і у дискретному випадку, $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = D[\xi]$, $\operatorname{cov}(\zeta,\zeta) = D[\zeta]$, а коефіцієнт кореляції між двома довільними неперервними випадковими величинами ξ та ζ завжди задовольняє нерівність: $-1 \le \rho_{\xi\zeta} \le +1$, причому чим ближчими до $+1$ за абсолютною величиною є значення $\rho_{\xi\zeta}$, тим більш корельованими між собою є випадкові величини ξ та ζ.

У випадку функціональної лінійної залежності між випадковими величинами ξ та ζ завжди $|\rho_{\xi\zeta}| = 1$.

Наприклад, для системи $\{\xi, \zeta\}$ неперервних випадкових величин з наступною функцією щільності ймовірностей:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, \ (x, y) \in R^2,$$

послідовно знаходимо:

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}\cdot \pi = 0,$$

тому що в останньому інтегралі підінтегральна функція $\dfrac{x}{1+x^2}$ є непарною в області інтегрування $R = (-\infty, +\infty)$; аналогічно, $M[\zeta] = 0$ — внаслідок симетричності функції щільності $f(x, y)$ відносно своїх аргументів x і y.

Отже,

$$\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,y\,dx\,dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,dy}{(1+y^2)} = 0,$$

тобто випадкові величини ξ та ζ є некорельованими.

Більш того, в нашому прикладі випадкові величини ξ та ζ незалежні, тому що щільність розподілу ймовірностей $f(x, y)$ є добутком функцій щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$ і $f_\zeta(y)$ кожної з випадкових величин. Дійсно,

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\left(arctg\, y\,\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

і, відповідно, $f_\zeta(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$.

Аналогічно визначаються закон розподілу ймовірностей, функція розподілу, щільність ймовірностей, основні числові характеристики та показники попарного стохастичного зв'язку випадкових величин, які є складовими системи, що складається з більшої, аніж дві, кількості випадкових величин.

6.4. Корисні властивості коваріації та коефіцієнта кореляції

Насамкінець зазначимо ще й такі **корисні властивості коваріації та коефіцієнта кореляції**, які притаманні системі $\{\xi, \zeta\}$ як дискретних, так і неперервних випадкових величин:

- $\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = \operatorname{cov}(\zeta, \xi)$,
- $\rho\,(\xi, \zeta) = \rho\,(\zeta, \xi)$;
- $\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \zeta) = \operatorname{cov}(\xi_1, \zeta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \zeta)$;
- якщо c — невипадкова величина, тоді:

$$\operatorname{cov}(\xi, c) = 0 ,$$

$$\operatorname{cov}(c \cdot \xi, \zeta) = c \cdot \operatorname{cov}(\xi, \zeta) ,$$

$$\rho\,(c \cdot \xi, \zeta) = \operatorname{sign}(c) \cdot \rho\,(\zeta, \xi) ,$$

де $$\operatorname{sign}(c) = \begin{cases} +1, & \text{якщо} \quad c > 0 , \\ -1, & \text{якщо} \quad c < 0 . \end{cases}$$

Перевірити ці властивості пропонуємо самостійно.

6.5. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

6.5.1. Маємо таблицю розподілу ймовірностей дискретної двовимірної системи випадкових величин $\{\xi, \zeta\}$:

ξ	ζ			
	3	7	12	15
4	0,10	0,08	0,05	0,08
9	0,07	0,12	0,13	0,18
13	0,02	0,08	0,05	0,04

Знайти:

а) закон розподілу випадкової величини ξ;

б) закон розподілу випадкової величини ζ;

в) основні числові характеристики (математичні сподівання, дисперсії та стандартні відхилення) випадкових величини ξ та ζ;

г) показники стохастичного зв'язку (коваріацію, коефіцієнт кореляції) між випадковими величинами ξ та ζ.

6.5.2. Довести, що і коваріація, і коефіцієнт кореляції незалежних між собою випадкових величин дорівнюють нулю. (Окремо розглянути випадки дискретної та неперервної системи двох випадкових величин.)

6.5.3. Обґрунтувати, що коефіцієнт кореляції $\rho_{\xi\zeta}$ між випадковими величинами ξ та ζ завжди задовольняє нерівність: $|\rho_{\xi\zeta}| \le 1$. (Окремо опрацювати випадки дискретної та неперервної системи відповідних випадкових величин.)

6.5.4. Прибуток за звичайною акцією за певний період часу визначається, в основному, двома складовими — розміром нарахованих на акцію упродовж періоду дивідендів та курсовою різницею (тобто різницею між ринковою ціною акції на кінець та на початок цього періоду). Вважаючи розмір дивідендів ξ та курсову різницю ζ дискретними випадковими величинами, охарактеризувати зв'язок між ними, якщо відома таблиця розподілу ймовірностей системи $\{\xi, \zeta\}$:

ξ	ζ			
	25	30	35	40
100	0,03	0,04	0,02	0,01
200	0,04	0,06	0,03	0,03
300	0,05	0,08	0,15	0,14
400	0,02	0,07	0,12	0,11

6.5.5. Вважаючи майбутні курси гривні щодо іноземної валюти *A* та щодо іноземної валюти *B* дискретними випадковими величинами — відповідно, ξ та ζ — за відомим законом розподілу системи $\{\xi, \zeta\}$ обчислити основні числові характеристики цих двох випадкових величин та показники стохастичного зв'язку між ними.

Можливі значення ξ	Можливі значення ζ				
	4,64	5,01	5,27	5,73	6,12
20,34	0,01	0,02	0,03	0,02	0,01
20,67	0,04	0,06	0,08	0,05	0,01
21,05	0,05	0,08	0,12	0,11	0,07
21,41	0,02	0,05	0,06	0,07	0,04

6.5.6. За відомою функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x, y) = \sin x \cos y \ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2} \le y \le 0 \right)$$

потрібно знайти ймовірність події, що двовимірна випадкова точка (ξ, ζ) координатної площини xOy потрапить у прямокутник, обмежений прямими $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = -\frac{\pi}{3}$, $y = -\frac{\pi}{4}$.

6.5.7. Двовимірний випадковий вектор (ξ, ζ) розподілений із сталою щільністю всередині трикутника OAB, де $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$.

Записати аналітичний вигляд функції щільності двовимірної випадкової системи $\{\xi, \zeta\}$, знайти функції щільності ймовірностей окремо кожної з випадкових величин ξ та ζ, обчислити математичні сподівання, дисперсії та стандартні відхилення цих випадкових величин, розрахувати коваріацію та коефіцієнт кореляції, а також охарактеризувати зв'язок між ξ та ζ.

6.5.8. Відома функція розподілу ймовірностей $F(x, y)$ неперервної системи $\{\xi, \zeta\}$ двох випадкових величин:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-(x+y)}, & \text{якщо} \quad x \ge 0 \quad \text{та} \quad y \ge 0; \\ 0, \quad \text{якщо} \quad x < 0 \quad \text{або} \quad y < 0. \end{cases}$$

Знайти:

а) функції розподілу ймовірностей $F_{\xi}(x)$ і $F_{\zeta}(y)$ кожної з випадкових величин ξ та ζ;

б) щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$ і $f_\zeta(y)$ цих випадкових величин;

в) функцію щільності ймовірностей системи випадкових величин ξ та ζ.

6.5.9. Відомі щільності розподілу незалежних складових неперервної двовимірної випадкової системи $\{\xi, \zeta\}$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0\,; \\ 0\,, & \text{якщо} \quad x < 0\,; \end{cases}$$

$$f_\zeta(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & \text{якщо} \quad y \geq 0\,; \\ 0\,, & \text{якщо} \quad y < 0\,. \end{cases}$$

Знайти щільність та функцію розподілу системи $\{\xi, \zeta\}$.

6.5.10. За відомою функцією щільності розподілу ймовірностей неперервної системи випадкових величин $\{\xi, \zeta\}$ знайти математичні сподівання та дисперсії кожної з випадкових величин ξ та ζ:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4\,x\,y\,e^{-x^2-y^2}, & \text{якщо} \quad x \geq 0 \quad \text{та} \quad y \geq 0\,; \\ 0\,, & \text{якщо} \quad x < 0 \quad \text{або} \quad y < 0\,. \end{cases}$$

Вказівка. Взяти до уваги інтеграл Пуассона: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} d\,x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Л Е К Ц І Я 7

ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ТА ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА. ОКРЕМІ ВАЖЛИВІ РОЗПОДІЛИ, ПОВ'ЯЗАНІ ІЗ НОРМАЛЬНИМ ЗАКОНОМ

7.1. Функції випадкових величин

Нехай ξ — деяка одновимірна випадкова величина: або дискретна — з множиною можливих значень $X = \{x_j\}$ та законом розподілу ймовірностей $\{ p_j = P\{\xi = x_j\} \}$, або неперервна — з функцією щільності ймовірностей $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

Розглянемо деяку числову функцію φ від цієї випадкової величини та позначимо $\varphi(\xi)$ через η:

$$\eta = \varphi(\xi) .$$

Оскільки ξ — випадкова величина, величину η теж слушно вважати випадковою — наприклад, коли різним можливим значенням ξ відповідатимуть різні можливі значення η, у тому числі, коли функціональна залежність φ на числовій осі є або зростаючою, або спадною. Поза увагою залишимо випадок, коли функція φ є сталою на множині усіх можливих значень випадкової величини ξ.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини η визначаються за формулами:

а) у випадку, коли ξ — дискретна випадкова величина:

- $M[\eta] \equiv M[\varphi(\xi)] = \sum\limits_{x_j \in X} \varphi(x_j) \cdot P\{\xi = x_j\} = \sum\limits_{x_j \in X} p_j \varphi(x_j)$,

- $D[\eta] = \sum_{x_j \in X} (\varphi(x_j) - M[\eta])^2 \cdot P\{\xi = x_j\} =$

$= \sum_{x_j \in X} p_j \{\varphi(x_j) - M[\varphi(\xi)]\}^2$

б) у випадку, коли ξ — неперервна випадкова величина:

- $M[\eta] \equiv M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx$,

- $D[\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M[\eta])^2 \cdot f(x)\, dx$

Для дисперсії функції $\eta = \varphi(\xi)$ від випадкової (дискретної або неперервної) величини ξ маємо також формулу:

$$D[\eta] = M[\varphi^2(\xi)] - M^2[\varphi(\xi)] \ .$$

Розглянемо далі певну сукупність одновимірних випадкових величин і деяку числову функцію, аргументами якої виступають ці випадкові величини. Найпростішою з таких сукупностей є система $\{\xi, \zeta\}$, яка складається з двох одновимірних випадкових величин ξ та ζ, а простим прикладом функції від них — їхня сума: $\eta = \xi + \zeta$.

Як правило, функція випадкових аргументів теж є випадковою величиною (*контрприклад*: $0 \cdot \xi + 0 \cdot \zeta \equiv 0$ — завжди невипадкова величина).

Отже, позначимо функцію $\varphi(\xi, \zeta)$ двох випадкових величин ξ та ζ через η: $\eta = \varphi(\xi, \zeta)$. Вважатимемо, що функціональна залежність φ нам відома, та поставимо питання про закон (функцію) розподілу ймовірностей та основні числові характеристики випадкової величини η. Аналогічні питання виникають і у випадках, коли функція φ має не два, а більше випадкових аргументів.

Окремі факти про функції випадкових величин можна вважати вже відомими. А саме, з основних властивостей випадкових величин (тема 3) маємо:

1) математичне сподівання алгебраїчної суми кількох випадкових величин дорівнює відповідній алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин;

2) математичне сподівання добутку кількох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин;

3) дисперсія суми довільної скінченної кількості попарно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

Далі бажано отримати формулу для обчислення дисперсії суми двох випадкових величин у загальному випадку — коли вони є, можливо, стохастично залежними. Обмежимося у міркуваннях випадком, коли ξ є дискретною випадковою величиною з множиною можливих значень $X = \{x_i \mid i = \overline{1, m}\}$, ζ — дискретною випадковою величиною з множиною можливих значень $Y = \{y_j \mid j = \overline{1, n}\}$, а закон розподілу системи $\{\xi, \zeta\}$ подано таблицею розподілу ймовірностей $P = \| p_{ij} \|_{(m \times n\}}$.

Нагадаємо, що:

$$P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \ i = \overline{1, m}; \ M[\xi] = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij};$$

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^{m} (x_i - M[\xi])^2 \sum_{j=1}^{n} p_{ij};$$

$$P\{\zeta = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, \ j = \overline{1, n}; \ M[\zeta] = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij};$$

$$D[\zeta] = \sum_{j=1}^{n} (y_i - M[\zeta])^2 \sum_{i=1}^{m} p_{ij};$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - M[\xi])(y_j - M[\zeta]) p_{ij};$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D[\xi]; \ \operatorname{cov}(\zeta, \zeta) = D[\zeta].$$

Тому:

$$M[\xi + \zeta] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j) p_{ij} == \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = M[\xi] + M[\zeta]$$

– це є підтвердженням правила обчислення математичного сподівання суми двох випадкових величин; а також:

$$D[\xi + \zeta] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\,(x_i + y_j) - M[\xi + \zeta]\,)^2 p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\,(x_i - M[\xi]) + (y_j - M[\zeta])\,)^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_i - M[\xi])^2 p_{ij} +$$

$$+2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_i - M[\xi])(y_j - M[\zeta])p_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_j - M[\zeta])^2 p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i - M[\xi])^2 \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_i - M[\xi])(y_j - M[\zeta])p_{ij} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} (y_j - M[\zeta])^2 \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = D[\xi] + 2\operatorname{cov}(\xi, \zeta) + D[\zeta].$$

Отже,

$$M[\xi + \zeta] = M[\xi] + M[\zeta],$$

$$D[\xi + \zeta] = D[\xi] + 2\operatorname{cov}(\xi, \zeta) + D[\zeta]$$

або $D[\xi + \zeta] = \operatorname{cov}(\xi, \xi) + 2\operatorname{cov}(\xi, \zeta) + \operatorname{cov}(\zeta, \zeta)$.

Такі ж формули мають місце і у випадку неперервних випадкових величин ξ та ζ.

Якщо розглядати скінченну суму n одновимірних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, формули обчислення математичного сподівання та дисперсії узагальнюються та набирають такого вигляду:

$$M[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n] = M[\xi_1] + M[\xi_2] + \ldots + M[\xi_n] = \sum_{j=1}^{n} M[\xi_j],$$

$$D[\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(\xi_i,\,\xi_j)=\sum_{j=1}^{n}D[\xi_j]+\sum_{\substack{i,\,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\mathrm{cov}(\xi_i,\,\xi_j)\,,$$

причому у випадку попарної незалежності між собою окремих одновимірних складових багатовимірної системи $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$, тобто коли $\mathrm{cov}(\xi_i,\,\xi_j)=0$ для всіх $i\neq j$, дисперсія суми таких складових обчислюється просто як сума дисперсій цих складових:

$$D[\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(\xi_i,\,\xi_j)=\sum_{j=1}^{n}D[\xi_j]\,.$$

Що стосується добутку $\eta=\xi\zeta$ двох випадкових величин ξ та ζ, то в загальному випадку для його математичного сподівання маємо формулу:

$$M[\eta]\equiv M[\xi\zeta]=M[\xi]\cdot M[\zeta]+\mathrm{cov}(\xi,\zeta)\,,$$

а у випадку незалежності ξ та ζ — формулу:

$$M[\xi\zeta]=M[\xi]\cdot M[\zeta]\,.$$

Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин обчислюється за формулою:

$$D[\eta]\equiv D[\xi\zeta]=D[\xi]\cdot D[\zeta]+M^2[\xi]\cdot D[\zeta]+M^2[\zeta]\cdot D[\xi]\,,$$

а у частинному випадку, коли $M[\xi]=0$ та $M[\zeta]=0$, маємо спрощення:

$$D[\xi\zeta]=D[\xi]\cdot D[\zeta]\,.$$

Ще одним важливим питанням є визначення закону, функції або виду розподілу ймовірностей випадкової величини, яка є функцією від інших випадкових величин, за відомими розподілами своїх випадкових аргументів.

Припустимо, наприклад, що випадкова величина η є сумою двох неперервних незалежних випадкових величин ξ та ζ: $\eta=\xi+\zeta$, які мають функції щільності ймовірностей $f_\xi(x)$ і $f_\zeta(y)$, кожна з яких визначена на множині дійсних чисел $R=(-\infty,+\infty)$.

Тоді функція щільності ймовірностей $f_\eta(z)$ випадкової величини $\eta = \xi + \zeta$ може бути знайдена за однією з двох наступних формул:

- або $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\, f_\zeta(z-x)\, d\,x$,
- або $f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z-y)\, f_\zeta(y)\, d\,y$.

Нехай, наприклад, неперервні незалежні випадкові величини ξ та ζ є рівномірно розподіленими на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, тобто $f_\xi(x) = f_\zeta(y) = \dfrac{1}{b-a}$ при $x, y \in [a, b]$ і $f_\xi(x) = f_\zeta(y) = 0$ при $x, y \notin [a, b]$. Тоді випадкова величина $\eta = \xi + \zeta$ матиме множиною можливих значень відрізок $[2a, 2b]$ та функцію щільності ймовірностей $f_\eta(z)$, яка дорівнює:

$$f_\eta(z) = \begin{cases} 0, & z < 2a\,; \\ \dfrac{z-2a}{(b-a)^2}, & 2a \le z \le a+b\,; \\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2}, & a+b \le z \le 2b\,; \\ 0, & 2b < z\,. \end{cases}$$

Таким чином, сума двох неперервних незалежних і рівномірно розподілених на одному й тому ж відрізку $[a, b]$ випадкових величин є неперервною випадковою величиною, яка має на відрізку $[2a, 2b]$ симетричний трикутний розподіл (розподіл Сімпсона).

Що стосується суми $\eta = \xi + \zeta$ двох нормально розподілених випадкових величин ξ та ζ з відомими параметрами $M[\xi] = \mu_1$, $M[\zeta] = \mu_2$, $D[\xi] = \sigma_1^2$, $D[\zeta] = \sigma_2^2$ та коефіцієнтом кореляції $\rho(\xi, \zeta) = \rho_{12}$, то вона є нормально розподіленою випадковою величиною та має наступні числові характеристики:

$$M[\eta] = \mu_1 + \mu_2, \quad D[\eta] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 .$$

І взагалі, сумою довільного скінченного числа нормально розподілених випадкових величин є теж нормально розподілена випадкова величина.

Закон розподілу суми n незалежних випадкових величин, кожна з яких має пуассонівський розподіл з параметром $\lambda > 0$, має назву **закону Ерланга** порядку $(n-1)$, тобто сам показниковий закон — це закон Ерланга нульового порядку. Щільність розподілу Ерланга $(n-1)$ -го порядку описується формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(нагадаємо, що $0! = 1$).

Що стосується суми двох незалежних дискретних випадкових величин, розподілених за законом Пуассона з параметрами, відповідно, λ_1 і λ_2, вона також має розподіл Пуассона, параметр якого дорівнює $\lambda_1 + \lambda_2$.

7.2. Закон великих чисел

У широкому розумінні під **законом великих чисел** розуміють групу теорем, у кожній з яких встановлюється факт наближення за тих чи інших умов певних характеристик (показників, результатів) щодо великої кількості реалізацій випадкової величини або групи випадкових величин до відповідних сталих невипадкових величин. Закон великих чисел висвітлює певні детерміновані закономірності у масових випадкових подіях за умов, що конкретний результат реалізації окремо кожної з випадкових подій є недетермінованим, непередбачуваним наперед.

Прикладом закону великих чисел є доведена в лекції 4 теорема Бернуллі: за дуже великої кількості випробувань частота виникнення випадкової події A, тобто випадкова величина, з імовірністю 1 наближається до ймовірності p події A, яка є сталим невипадковим числом. Це твердження висвітлює властивість **стій-**

кості відносної частоти виникнення випадкової події за необмеженого зростання кількості випробувань (саме на підставі цієї властивості і було винайдене фундаментальне поняття ймовірності).

Іншим прикладом закону великих чисел є твердження про **стійкість середнього значення** групи випадкових величин, що є результатом взаємного погашення індивідуальних відхилень кожної з випадкових величин від свого середнього значення. Зокрема, має місце така властивість.

Теорема про закон великих чисел Чебишева. Нехай $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\}$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин, які мають скінченні математичні сподівання та дисперсії, що обмежені у сукупності:

$$M[\xi_n] = \overline{\xi}_n \in R\,,\ D[\xi_n] = \sigma_n^2 \le \sigma^2 \in R \text{ для всіх } n \in N\,.$$

Тоді для довільного (як завгодно малого) числа $\varepsilon > 0$ справджується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M[\xi_1] + M[\xi_2] + \ldots + M[\xi_n]}{n}\right| < \varepsilon\} = 1\,.$$

Тобто середнє арифметичне великого числа випадкових величин з близькою до одиниці ймовірністю набирає значення, що мало відрізняється від середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Доведення. Розглянемо допоміжну випадкову величину $\zeta = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$, яка є простою середньою арифметичною попарно незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Основні числові характеристики цієї випадкової величини наступні:

$$M[\zeta] = \frac{M[\xi_1] + M[\xi_2] + \ldots + M[\xi_n]}{n}\,,$$

$$D[\zeta] = \frac{D[\xi_1] + D[\xi_2] + \ldots + D[\xi_n]}{n^2}\,,$$

причому з умови про обмеженість у сукупності дисперсій випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ випливає, що $D[\zeta] \le \frac{n\cdot\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Оберемо тепер довільне число $\varepsilon > 0$ та застосуємо щодо випадкової величини ζ нерівність Чебишева, за якою

$$P\{|\zeta - M[\zeta]| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D[\zeta]}{\varepsilon^2}:$$

$$P\{|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M[\xi_1] + M[\xi_2] + \ldots + M[\xi_n]}{n}| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Лишається перейти в цій нерівності до границі при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M[\xi_1] + M[\xi_2] + \ldots + M[\xi_n]}{n}| < \varepsilon\} = 1.$$

Теорему доведено.

Із щойно розглянутого закону великих чисел Чебишева одразу ж випливає, що коли в послідовності $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ попарно незалежних випадкових величин, які мають обмежені в сукупності дисперсії, причому всі випадкові величини мають однакові математичні сподівання: $M[\xi_n] = \mu \in R$ для всіх $n \in N$, тоді для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ справджується нерівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

Бачимо, зокрема, що з близькою до одиниці ймовірністю середнє арифметичне великої кількості реалізацій випадкової величини набиратиме значення, що мало відрізняється від математичного сподівання цієї випадкової величини.

7.3. Центральна гранична теорема

Ще одна група теорем теорії ймовірностей, які об'єднані під назвою **центральної граничної теореми**, визначають умови виникнення нормального розподілу випадкової величини. Зокрема, доведено, що нормальний розподіл виникає тоді, коли підсумовується багато незалежних або слабко залежних між собою випадкових величин, хоч окремо кожний з доданків може і не підпорядковуватися нормальному закону розподілу ймовірностей.

Теорема. Нехай $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин, кожна з яких має обмежені математичні сподівання та дисперсії: $M[\xi_n] = \overline{\xi}_n \in R$, $D[\xi_n] = \sigma_n^2 \in R$ для всіх $n \in N$.

Тоді випадкова величина $\dfrac{(\xi_1 + \ldots + \xi_n) - (M[\xi_1] + \ldots + M[\xi_n])}{\sqrt{D[\xi_1] + \ldots + D[\xi_n]}}$ при $n \to +\infty$ за розподілом ймовірностей наближається до такої випадкової величини ζ, яка має нормований нормальний закон розподілу ймовірностей, тобто $M[\zeta] = 0$ та $D[\zeta] = 1$.

Наслідком з цієї теореми є, зокрема, висновок, що коли в сукупності $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ всі випадкові величини попарно незалежні та мають однакові математичні сподівання та однакові дисперсії:

$$M[\xi_j] = \mu, \; D[\xi_j] = \sigma^2 \text{ для всіх } j = \overline{1, n},$$

тоді при великих значеннях *n* сума $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ має майже нормальний розподіл з параметрами $n\mu$ та $\sigma\sqrt{n}$, а середнє арифметичне $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ — майже нормальний розподіл з параметрами μ та $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Зверніть увагу, що зараз окремо кожна з випадкових величин сукупності $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ може мати будь-який, а не обов'язково нормальний, закон розподілу ймовірностей; більш того, кожна з випадкових величин може бути як неперервною, так і дискретною випадковою величиною, тобто сукупність $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ може бути не лише дискретною або неперервною, а також і мішаною.

7.4. Окремі важливі розподіли, пов'язані із нормальним законом

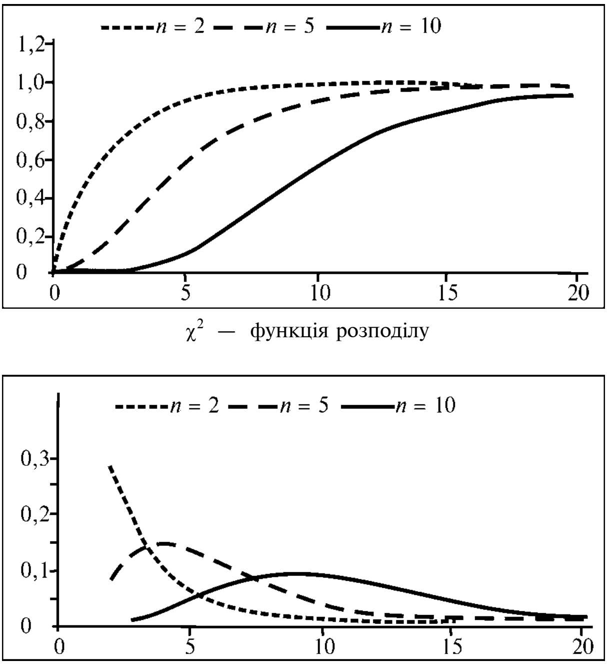
Із нормальним законом розподілу ймовірностей пов'язані кілька важливих розподілів, які знайшли прикладне застосування у статистичній обробці даних. Це, насамперед, розподіл хі-квадрат, розподіл Стьюдента і розподіл Фішера.

Розподіл хі-квадрат (або χ^2 — розподіл Пірсона). Випадкова величина χ^2 (зараз це позначення означає не квадрат величини χ, а використовується як єдиний символ!) називається **розподіленою за законом хі-квадрат** з n ступенями вільності, якщо вона є сумою квадратів n попарно незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, кожна з яких має нормований нормальний закон розподілу ймовірностей:

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 .$$

Очевидно, що $\chi^2 \geq 0$, причому $M[\chi^2] = n$ і $D[\chi^2] = 2n$, оскільки $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_i) = 1$ для всіх $i = \overline{1, n}$ і $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

Графіки інтегральної та диференціальної функцій хі-квадрат розподілу ймовірностей для окремих значень числа ступенів вільності (2, 5 або 10) наведені на рис. 7.1.



χ^2 — функція розподілу

χ^2 — функція щільності

Рис. 7.1. Хі-квадрат розподіл

При великому збільшенні значень n розподіл хі-квадрат стає все ближчим до нормального розподілу з параметрами $\mu = n$ та $\sigma^2 = 2n$.

Наявність між випадковими величинами ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n будь-якої залежності зменшує кількість ступенів вільності розподілу χ^2 на одиницю.

Розподіл Стьюдента (або t – розподіл Стьюдента). Цей закон було винайдено Госсетом, який друкував свої праці під псевдонімом "Стьюдент". Випадкова величина τ називається **розподіленою за законом Стьюдента** з n ступенями вільності, якщо вона є наступною функцією від незалежних нормованої нормально розподіленої випадкової величини ξ та випадкової величини χ^2, розподіленої за законом хі-квадрат з n ступенями вільності:

$$\tau = \frac{\xi\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2}} \equiv \frac{\xi}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{n}}}.$$

Доведено, що $M[\tau] = 0$ і $D[\tau] = \dfrac{n}{n-2}$.

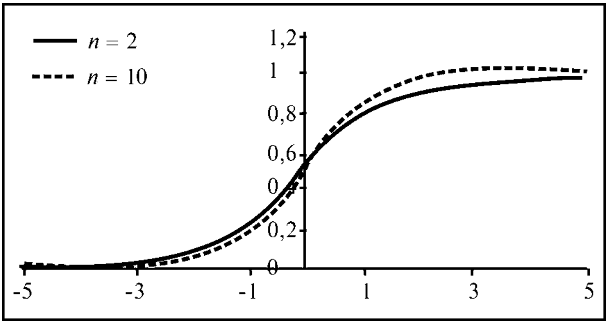
Графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу Стьюдента для окремих значень числа ступенів вільності (2 або 10) наведені на рис. 7.2.

При $n \to +\infty$ t – розподіл Стьюдента стрімко наближається до стандартного нормального розподілу.

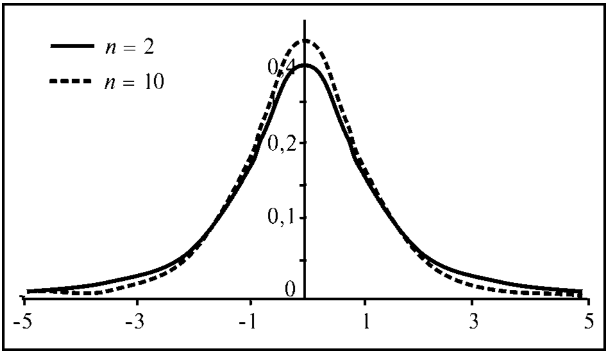
Розподіл Фішера (інші назви: F – розподіл або розподіл Фішера-Снедекора). Випадкова величина η називається **розподіленою за законом Фішера** з n_1 та n_2 ступенями вільності, якщо її можна подати як наступну функцію двох незалежних та розподілених за законом Пірсона випадкових величин χ_1^2 і χ_2^2:

$$\eta = \frac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2} \equiv \frac{\chi_1^2\, n_2}{\chi_2^2\, n_1},$$

де величина χ_1^2 має n_1 ступенів вільності, а величина χ_2^2 — n_2 ступенів вільності.



Функція t — розподілу ймовірностей



t — розподіл — функція щільності

Рис. 7.2. Розподіл Стьюдента

Значення розподіленої за законом Фішера випадкової величини завжди невід'ємні. Наведемо, наприклад, таблицю та графіки функцій щільності ймовірностей розподілу Фішера для наступних пар значень числа ступенів вільності: $n_1 = 2$ і $n_2 = 5$, а також $n_1 = 10$ і $n_2 = 3$ (рис. 7.3).

При великих значеннях ступенів вільності n_1 і n_2 розподіл Фішера наближається до нормального розподілу із середнім значенням $\mu = \dfrac{n_2}{n_2 - 2}$ ($n_2 > 2$).

Щільність F-розподілу з n_1 та n_2 ступенями вільності

n_1; n_2	2; 5	10; 3
x	$f(x)$	
0	0,0000	0,0000
1	0,3080	0,4041
2	0,1278	0,1585
3	0,0633	0,0768
4	0,0353	0,0434
5	0,0214	0,0272
6	0,0138	0,0184
7	0,0093	0,0131
8	0,0066	0,0097
9	0,0048	0,0074
10	0,0036	0,0058

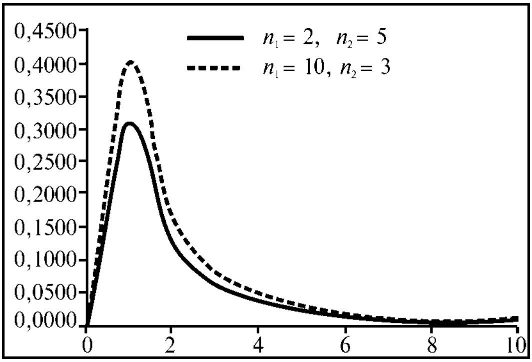


Рис. 7.3. Розподіл Фішера

Розгорнуті таблиці F – розподілу з різними значеннями ступенів вільності у більшості довідників чи підручників з теорії ймовірностей та математичної статистики не наводяться. Замість них часто подають для окремих значень числа α таблиці коренів рівняння $F_{n_1, n_2}(x) = 1 - \alpha$, де $F_{n_1, n_2}(x)$ — інтегральна функція розподілу Фішера з n_1 і n_2 ступенями вільності, оскільки основна практична потреба є саме у таких таблицях.

Як побачимо далі, розподіли Пірсона, Стьюдента і Фішера-Снедекора відіграватимуть важливу роль у математичній статистиці та економетрії.

7.5. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

7.5.1. Випадкова величина ξ має наступну функцію щільності розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0 \le x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти функцію щільності розподілу ймовірностей та математичне сподівання випадкової величини ζ, якщо $\zeta = \xi^2$.

7.5.2. На меблевій фабриці з дошок, середня довжина яких 200 см та стандартне відхилення 15 см, роблять дошки з середньою довжиною 150 см та стандартним відхиленням 5 см. Обчислити середню довжину та стандартне відхилення залишків.

7.5.3. Проілюструємо функціональний зв'язок між випадковими величинами на прикладі **задачі про оптимізацію обсягу закупівлі продукції з метою її вигідного перепродажу** за умов, що надлишкові (нереалізовані) обсяги підлягатимуть утилізації. Припустимо, що на початку періоду буде закуплено z одиниць продукції на загальну суму $a z$ грошових одиниць, де закупівельна ціна a одиниці продукції вважається відомою. Цю продукцію планується реалізувати в кінці періоду по ціні b грошових одиниць за одиницю продукції. Ціна реалізації b вважається відомою та справджуються нерівності: $0 < a < b$. Але майбутній попит наперед невідомий — обсяг реалізації (одиниць продукції) розглядається як неперервна випадкова величина ξ, яка має функцію щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$, причому ця функція вважається відомою.

За таких умов майбутній обсяг реалізації продукції теж є випадковою величиною — позначимо її через ζ, — яка пов'язана із випадковою величиною ξ залежністю: $\zeta = \min\{z, \xi\}$.

Подамо на підставі цієї залежності величину $M[\zeta]$ — математичне сподівання випадкової величини ζ — через відому щільність $f_\xi(x)$ випадкової величини ξ, позначивши через $P\{\xi > z\}$ ймовірність події, що випадкова величина ξ набере значення більше, аніж z (звертаємо увагу, що величина z, хоч і невідома, але вважається невипадковою):

$$M[\zeta] = z \cdot P\{\xi > z\} + \int_{-\infty}^{z} x \cdot f_\xi(x) \cdot dx =$$

$$= z \cdot \int_{z}^{+\infty} f_\xi(x) \cdot dx + \int_{-\infty}^{z} x \cdot f_\xi(x) \cdot dx .$$

Випадковою величиною є і обсяг продукції, яка підлягатиме утилізації; цей надлишок ν також є функцією від випадкової величини ξ: $\nu = \max\{z-\xi; 0\}$.

Нарешті, і прибуток π від операції із закупівлі та перепродажу продукції теж є випадковою величиною, яка залежить від ξ:

$$\pi = -az + b\zeta = -az + b\min\{z, \xi\}.$$

Цікаво визначити такий обсяг закупівлі z, щоб математичне сподівання випадкового прибутку π було б якнайбільшим.

Враховуючи невипадковий характер сталих a, b та керованої змінної z, одержимо наступну залежність між математичними сподіваннями випадкових величин π та ξ:

$$M[\pi] = -az + bM[\zeta] = -az + bz\int_z^{+\infty} f_\xi(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{z} x f_\xi(x)\,dx.$$

Отже, оптимальний обсяг z закупівлі продукції — за якого математичне сподівання випадкового прибутку π набиратиме максимально можливе значення — визначається умовою: $\left(M[\pi]\right)'_z = 0$. З цієї умови матимемо рівняння:

$$-a + b\int_z^{+\infty} f_\xi(x)\,dx - bz f_\xi(z) + bz f_\xi(z) = 0,$$

з якого остаточно одержимо:

$$\int_z^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = \frac{a}{b}.$$

Якщо, наприклад, $\frac{a}{b} = 0{,}75$, а випадкова величина ξ має рівномірний розподіл в межах від 1000 до 2000 одиниць продукції, тоді оптимальний за критерієм максимізації очікуваного прибутку обсяг закупівлі z задовольнятиме рівняння: $\int_z^{2000} \frac{dx}{2000-1000} = 0{,}75$, тобто рівняння: $2000 - z = (2000-1000)\cdot 0{,}75$, з якого, очевидно, $z = 1250$ (одиниць продукції).

Далі пропонуємо самостійно дослідити випадок, коли надлишкова продукція в обсязі $\nu = \max\{z - \xi; 0\}$ одиниць не знищуватиметься, а продаватиметься за дуже малою ціною за одиницю c $(0 < c < a)$.

7.5.4. Довести, що коли неперервна випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу ймовірностей з математичним сподіванням μ та стандартним відхиленням σ, тоді залежна від ξ випадкова величина $\zeta = \dfrac{\xi - \mu}{\sigma}$ має стандартний нормальний закон розподілу ймовірностей.

7.5.5. Довести, що коли неперервна випадкова величина ξ має функцію розподілу $F_\xi(x)$, тоді випадкова величина $\zeta = F_\xi(\xi)$ має на відрізку $[0; 1]$ рівномірний закон розподілу імовірностей.

7.5.6. Обґрунтувати, що сума n незалежних випадкових величин, кожна з яких має розподіл Пуассона з параметром λ_i, $i = \overline{1, n}$ і λ_2, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Вказівка. Скористатися методом математичної індукції.

7.5.7. Користуючись законом великих чисел Чебишева отримати ще один варіант доведення теореми Бернуллі про те, що при дуже великій кількості випробувань n частота $\dfrac{m}{n}$ виникнення події A з імовірністю 1 збігатиметься з імовірністю p_A: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\dfrac{m}{n} = p\} = 1$.

7.5.8. Користуючись центральною граничною теоремою обґрунтувати, що послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, які мають однаковий нормальний розподіл з параметрами μ та σ^2, при необмеженому зростанні n задовольнятимуть умову:

$$P\left\{a < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < b\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx,$$

тобто що закон розподілу їх нормованої суми наближається до стандартного нормального розподілу.

З цієї властивості вивести **інтегральну теорему Муавра-Лапласа**, за якою ймовірність P появи в n незалежних випробуваннях події A, яка має в кожному з випробувань імовірність p ($0 < p < 1$), не менше k_1 разів і не більше k_2 разів ($k_1 < k_2$), при дуже великих значеннях n наближено визначається залежністю:

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

7.5.9. Обґрунтувати, що коли випадкові величини $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні та мають однаковий нормальний розподіл з параметрами μ та σ^2, тоді випадкова величина $\zeta = \dfrac{\xi_0 - \mu}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu)^2}}$ має незалежний від параметрів μ та σ^2 розподіл Стьюдента з n ступенями вільності.

7.5.10. Обґрунтувати, що коли випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ і $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ незалежні та мають однаковий нормальний розподіл з параметрами μ та σ^2, тоді випадкова величина $\eta = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(\xi_i - \mu)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - \mu)^2}}$ має незалежний від параметрів μ та σ^2 розподіл Фішера-Снедекора з m та n ступенями вільності.

ЛЕКЦІЯ 8

ПОНЯТТЯ ПРО ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ, ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ТА ВИПАДКОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

8.1. Випадкова функція, її перерізи

Нехай t — числовий параметр, областю можливих значень якого є множина T, яка або збігається з множиною усіх дійсних чисел $R = (-\infty, +\infty)$, або є деякою її підмножиною, тобто $T \subset R$. Функція $\xi(t)$, $t \in T$, називається **випадковою**, якщо при довільному значенні параметра $t_0 \in T$ її результатом є випадкова величина $\xi(t_0)$. Ця випадкова величина $\xi(t_0)$ називається **перерізом** випадкової функції $\xi(t)$ при $t = t_0$. Тобто вся випадкова функція $\xi(t)$, $t \in T$ — це сукупність усіх своїх перерізів.

Якщо, наприклад, на відрізку $T = [3; 5]$ маємо випадкову функцію

$$\xi(t) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } t \geq \eta, \\ -1, & \text{якщо } t < \eta, \end{cases}$$

де η — неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0; 10]$, тоді при $t_0 = 4$ перерізом $\xi(t_0)$ цієї функції буде дискретна випадкова величина $\xi(4)$, яка може набирати два значення $x_1 = +1$ та $x_2 = -1$ з ймовірностями:

$$p_1 = P\{\xi(4) = +1\} = P\{4 \geq \eta\} = \frac{4-0}{10-0} = 0,4,$$

$$p_2 = P\{\xi(4) = -1\} = P\{4 < \eta\} = \frac{10-4}{10-0} = 0,6.$$

Отже, переріз $\xi(4)$ має наступний закон розподілу ймовірностей:

$\xi(4):$	Номер значення	k	1	2
	Значення	x_k	+1	-1
	Імовірність	p_k	0,4	0,6

Інший переріз нашої випадкової функції, наприклад $\xi(5)$, описується іншим розподілом імовірностей, а саме, як легко переконатися:

$\xi(5):$	Номер значення	k	1	2
	Значення	x_k	+1	-1
	Імовірність	p_k	0,5	0,5

8.2. Основні характеристики випадкової функції

Якщо основними числовими характеристиками випадкової величини були числа, то у випадку випадкової функції її основними характеристиками виступають вже не числа, а числові функції.

Математичним сподіванням випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, називається така невипадкова числова функція $M_\xi(t)$, яка при довільному значенні $t_0 \in T$ параметра $t \in T$ дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу $\xi(t_0)$: $M_\xi(t_0) = M[\xi(t_0)]$. Отже, функцію математичного сподівання можна визначити так:

$$M_\xi(t) = M[\xi(t)], \ t \in T .$$

Математичне сподівання випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, має такі **властивості**:

1) Математичне сподівання невипадкової функції $c(t)$, $t \in T$, збігається з цією функцією:

$$M[c(t)] \equiv M_c(t) = c(t), \ t \in T;$$

2) Математичне сподівання суми випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, та невипадкової функції $c(t)$, $t \in T$, дорівнює сумі не-

випадкової функції та математичного сподівання випадкової функції:

$$M[\xi(t)+c(t)] \equiv M_{\xi+c}(t) = M_{\xi}(t)+c(t),\ t \in T;$$

3) Математичне сподівання добутку випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, та невипадкової функції $c(t)$, $t \in T$, дорівнює добутку невипадкової функції та математичного сподівання випадкової функції:

$$M[\xi(t)\cdot c(t)] \equiv M_{\xi\cdot c}(t) = M_{\xi}(t)\cdot c(t),\ t \in T;$$

4) Математичне сподівання суми двох випадкових функції $\xi(t)$, $t \in T$, і $\zeta(t)$, $t \in T$, дорівнює сумі математичних сподівань цих функцій:

$$M[\xi(t)+\zeta(t)] \equiv M_{\xi+\zeta}(t) = M_{\xi}(t)+M_{\zeta}(t),\ t \in T.$$

Ці властивості одразу ж випливають з аналогічних властивостей математичного сподівання звичайної випадкової величини.

Дисперсією випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, називається така невипадкова числова функція $D_{\xi}(t)$, яка при довільному значенні $t_0 \in T$ параметра $t \in T$ дорівнює дисперсії відповідного перерізу $\xi(t_0)$: $D_{\xi}(t_0) = D[\xi(t_0)]$. Отже,

$$D_{\xi}(t) = D[\xi(t)],\ t \in T.$$

З властивостей дисперсії випадкової величини та властивостей математичного сподівання випадкової функції випливають наступні **властивості дисперсії випадкової функції**:

1) Дисперсія невипадкової функції $c(t)$, $t \in T$, дорівнює нулю:

$$D[c(t)] \equiv D_{c}(t) = 0,\ t \in T;$$

2) Дисперсія суми випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, та невипадкової функції $c(t)$, $t \in T$, дорівнює дисперсії випадкової функції:

$$D[\xi(t)+c(t)] \equiv D_{\xi+c}(t) = D_{\xi}(t),\ t \in T;$$

3) Невипадкову функцію — множник у добутку цієї функції $c(t)$, $t \in T$, та випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, — можна виносити за знак дисперсії, зводячи такий множник до квадрату:

$$D[c(t) \cdot \xi(t)] \equiv D_{c \cdot \xi}(t) = c^2(t) \cdot M_{\xi}(t), \ t \in T .$$

Дисперсія випадкової функції набирає лише невід'ємні значення. Арифметичний квадратний корінь від цієї дисперсії називається **стандартним відхиленням випадкової функції** та позначається через $\sigma_{\xi}(t)$. Таким чином:

$$\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{D[\xi(t)]}, \ t \in T .$$

Враховуючи це визначення, дисперсія випадкової функції може позначатися також і через $\sigma_{\xi}^2(t)$, оскільки вона є квадратом стандартного відхилення.

Приклад. Знайдемо математичне сподівання, дисперсію та стандартне відхилення вищенаведеної функції $\xi(t)$, $t \in T = [3; 5]$, де

$$\xi(t) = \begin{cases} +1, & \text{якщо} \quad t \geq \eta, \\ -1, & \text{якщо} \quad t < \eta, \end{cases}$$

а η — рівномірно розподілена на відрізку $[0; 10]$ неперервна випадкова величина.

Розв'язування. Визначимо спочатку сукупність усіх перерізів $\xi(t)$, $t \in [3; 5]$, нашої функцій:

$\xi(t)$:	Номер значення	k	1	2
	Значення	x_k	+1	-1
	Імовірність	p_k	$0,1t$	$1-0,1t$

(раніше ми розглядали лише два перерізи цієї функції — $\xi(4)$ і $\xi(5)$).

Далі послідовно знаходимо основні характеристики нашої випадкової функції ($t \in [3; 5]$):

- математичне сподівання:

$$M_{\xi}(t) = (+1) \cdot 0,1t + (-1) \cdot (1 - 0,1t) = 0,2t - 1 ;$$

• дисперсію:

$$D_\xi(t) = (+1-(0,2t-1))^2 \cdot 0,1t + (-1-(0,2t-1))^2 \cdot (1-0,1t) =$$
$$= 0,4 \cdot (1-0,1t) \cdot t\,;$$

• стандартне відхилення:

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{0,4 \cdot (1-0,1t) \cdot t}\,.$$

Щоб отримати певне уявлення про нашу випадкову функцію, вбачається за корисне побудувати на відрізку $T=[3;5]$ графіки функцій $M_\xi(t)$, $M_\xi(t)+\sigma_\xi(t)$ та $M_\xi(t)-\sigma_\xi(t)$ (рис. 8.1), оскільки будь-яка реалізація випадкової функції буде концентруватися вздовж математичного сподівання $M_\xi(t)$ та з високою ймовірністю знаходитиметься в межах від $M_\xi(t)-\sigma_\xi(t)$ до $M_\xi(t)+\sigma_\xi(t)$.

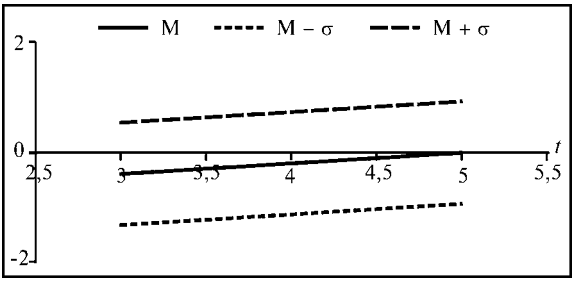


Рис. 8.1. Будь-яка реалізація випадкової функції концентрується вздовж математичного сподівання та з високою ймовірністю знаходитиметься в межах, визначених математичним сподіванням та стандартним відхиленням

Приклад закінчено.

Випадкова функція $\xi(t)$, $t \in T$, називається **центрованою**, якщо її математичне сподівання усюди дорівнює нулю: $M_\xi(t)=0$, $t \in T$, та **нормованою**, якщо її дисперсія усюди дорівнює одиниці: $D_\xi(t)=1$, $t \in T$.

Щоб від довільної випадкової функції $\eta(t)$ з ненульовим усюди стандартним відхиленням ($\sigma_\eta(t) \neq 0$, $t \in T$) перейти до центрованої та нормованої випадкової функції $\xi(t)$, можна скористатися простим лінійним перетворенням: $\xi(t)=\dfrac{\eta(t)-M_\eta(t)}{\sigma_\eta(t)}$, $t\in T$.

8.3. Коваріаційна та кореляційна функції випадкової функції

Ми вже зазначали, що випадкову функцію $\xi(t)$, $t\in T$, можна тлумачити як сукупність усіх її перерізів. Водночас основних характеристик випадкової функції — математичного сподівання та дисперсії або стандартного відхилення, які характеризують також окремо кожний з перерізів, ще замало, щоб повністю описати випадкову функцію. Додатковими важливими характеристиками випадкової функції виступають показники стохастичного зв'язку між її різними перерізами. Йдеться про коваріаційну та кореляційну функції.

Коваріаційною функцією випадкової функції $\xi(t)$, $t\in T$, називатимемо таку невипадкову числову функція $K_\xi(t_1,t_2)$, залежну від двох змінних $t_1,t_2\in T$, яка визначається коваріацію між перерізами $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$:

$$K_\xi(t_1,t_2)=\operatorname{cov}(\xi(t_1),\xi(t_2)),\ t_1,t_2\in T.$$

З властивостей коваріації для звичайних випадкових величин випливають, зокрема, наступні **властивості коваріаційної функції** ($t_1,t_2\in T$):

а) симетричність: $K_\xi(t_1,t_2)=K_\xi(t_2,t_1)$;

б) $K_\xi(t,t)=D_\xi(t)$;

в) $|K_\xi(t_1,t_2)|\le\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_1)$.

У свою чергу, **кореляційна функція** $\rho_\xi(t_1,t_2)$ **випадкової функції** $\xi(t)$, $t\in T$, визначається за правилом:

$$\rho_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2)},\ t_1,t_2\in T,$$

тобто вона теж симетрична, а всі її значення завжди знаходяться в межах від -1 до $+1$.

Приклад. Знайдемо коваріаційну та кореляційну функції вже знайомої нам випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T = [3;5]$, де

$$\xi(t) = \begin{cases} +1, & \text{якщо} \quad t \geq \eta, \\ -1, & \text{якщо} \quad t < \eta, \end{cases}$$

а η — неперервна та рівномірно розподілена на відрізку $[0;10]$ випадкова величина.

Розв'язування. Ми вже переконалися, що кожний з перерізів $\xi(t)$ має:

- відповідний дискретний розподіл імовірностей ($t \in [3;5]$):

$\xi(t)$:	Значення	x_k	+1	-1
	Імовірність	p_k	$0{,}1t$	$1-0{,}1t$

- математичне сподівання ($t \in [3;5]$): $M_\xi(t) = 0{,}2t - 1$;
- дисперсію ($t \in [3;5]$): $D_\xi(t) = 0{,}4 \cdot (1-0{,}1t) \cdot t$;
- стандартне відхилення ($t \in [3;5]$):

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{0{,}4 \cdot (1-0{,}1t) \cdot t}\,.$$

Тому далі, насамперед, потрібно побудувати таблицю розподілу ймовірностей для системи величин $\{\xi(t_1);\xi(t_2)\}$, знайшовши матрицю ймовірностей $\| p_{ij} \|_{(2\times 2)}$:

$\xi(t_1)$	$\xi(t_2)$		Сума
	1	-1	
1	p_{11}	p_{12}	$0{,}1t_1$
-1	p_{21}	p_{22}	$1-0{,}1t_1$
Сума	$0{,}1t_2$	$1-0{,}1t_2$	1,0

Враховуючи, що в описі перерізів $\xi(t_1) = \begin{cases} +1, \text{ якщо } t_1 \geq \eta, \\ -1, \text{ якщо } t_1 < \eta \end{cases}$ і

$\xi(t_2) = \begin{cases} +1, \text{ якщо } t_2 \ge \eta, \\ -1, \text{ якщо } t_2 < \eta \end{cases}$ задіяна одна й та сама випадкова величина η, яка має неперервний розподіл на відрізку $[0; 10]$, обчислимо спочатку, наприклад, імовірність $p_{11} = P\{ \{\xi(t_1\} = 1\} \cap \{\xi(t_2\} = 1\} \}$:

$$p_{11} = P\{ \{\eta \le t_1\} \cap \{\eta \le t_2\} \} = P\{ \{\eta \le \min\{t_1, t_2\} \} = \frac{\min\{t_1, t_2\}}{10}.$$

Далі можна або діяти аналогічним чином, або скористатися властивостями, що стосуються відповідних сум елементів матриці ймовірностей. З використанням зазначених властивостей знайдемо:

$$p_{12} = P\{ \{\xi(t_1\} = 1\} \cap \{\xi(t_2\} = -1\} \} = 0{,}1 t_1 - \frac{\min\{t_1, t_2\}}{10},$$

$$p_{21} = P\{ \{\xi(t_1\} = -1\} \cap \{\xi(t_2\} = 1\} \} = 0{,}1 t_2 - \frac{\min\{t_1, t_2\}}{10},$$

$$p_{22} = P\{ \{\xi(t_1\} = -1\} \cap \{\xi(t_2\} = -1\} \} = 1 - 0{,}1 t_1 - \left(0{,}1 t_2 - \frac{\min\{t_1, t_2\}}{10}\right).$$

Помічаємо, що:

$$t_1 - \min\{t_1, t_2\} = \max\{0; t_1 - t_2\},$$

$$t_2 - \min\{t_1, t_2\} = \max\{0; t_2 - t_1\},$$

$$t_1 + t_2 - \min\{t_1, t_2\} = \max\{t_1; t_2\}.$$

Тому в результаті елементарних перетворень приходимо до такої матриці ймовірностей:

$\xi(t_1)$	$\xi(t_2)$		Сума
	1	-1	
1	$p_{11} = \frac{\min\{t_1, t_2\}}{10}$	$p_{12} = \frac{\max\{0; t_1 - t_2\}}{10}$	$\frac{t_1}{10}$
-1	$p_{12} = \frac{\max\{0; t_2 - t_1\}}{10}$	$p_{22} = 1 - \frac{\max\{t_1; t_2\}}{10}$	$1 - \frac{t_1}{10}$
Сума	$\frac{t_2}{10}$	$1 - \frac{t_2}{10}$	1

Переходимо до визначення коваріаційної функції $K_\xi(t_1, t_2)$. При $t_1 = t_2 = t$ її значення нам вже відоме — це дисперсія перерізу $\xi(t)$:

$$K_\xi(t,t) = D_\xi(t) = 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}1t) \cdot t\ .$$

При $t_1 \neq t_2$ скористаємося властивістю симетричності коваріаційної функції, що дозволяє ґрунтовно опрацювати лише один з двох можливих випадків — наприклад, коли $t_1 > t_2$.

При $t_1 > t_2$ матриця ймовірностей є такою:

$\xi(t_1)$	$\xi(t_2)$		Сума
	1	-1	
1	$p_{11} = 0{,}1\,t_2$	$p_{12} = 0{,}1\,(t_1 - t_2)$	$0{,}1\,t_1$
-1	$p_{12} = 0$	$p_{22} = 1 - 0{,}1\,t_1$	$1 - 0{,}1\,t_1$
Сума	$0{,}1\,t_2$	$1 - 0{,}1\,t_2$	1

Тому при $t_1 > t_2$ коваріаційна функція набере вигляду:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \operatorname{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) =$$

$$= [2 \cdot (1 - 0{,}1t_1);\ -0{,}2\,t_1] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}1t_2 & 0{,}1 \cdot (t_1 - t_2) \\ 0 & 1 - 0{,}1t_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (1 - 0{,}1t_2) \\ -0{,}2\,t_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}1t_1) \cdot [t_2\ ; \quad -t_2] \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 - 0{,}1\,t_2 \\ -0{,}1\,t_2 \end{bmatrix} = 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}1t_1) \cdot t_2\ .$$

Нарешті, щодо кореляційної функції, яка теж є симетричною, при $t_1 > t_2$ одержимо:

$$\rho_\xi(t_1, t_2) = \frac{K_\xi(t_1, t_2)}{\sigma_\xi(t_1) \cdot \sigma_\xi(t_2)} = \frac{0{,}4 \cdot (1 - 0{,}1t_1) \cdot t_2}{\sqrt{0{,}4 \cdot (1 - 0{,}1t_1) \cdot t_1} \cdot \sqrt{0{,}4 \cdot (1 - 0{,}1t_2) \cdot t_2}}\ ,$$

або, після скорочення однакових у чисельнику та знаменнику множників:

$$\rho_\xi(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{(1-0{,}1t_1)\cdot t_2}{(1-0{,}1t_2)\cdot t_1}} \quad (\text{при } t_1 > t_2).$$

Нескладно переконатися, що при $t_1, t_2 \in [3; 5]$ отримана кореляційна функція завжди додатна, що свідчить про позитивний стохастичний зв'язок між довільними двома перерізами випадкової функції $\xi(t)$, $t \in [3; 5]$. Свого найбільшого значення $+1$ кореляційна функція набирає лише при $t_1 = t_2$. Із збільшенням відхилення t_1 від t_2 стохастичний зв'язок між перерізами $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ послаблюється. Мінімальний позитивний стохастичний зв'язок спостерігатиметься між найвіддаленішими між собою перерізами — коли $t_1 = 3$ і $t_2 = 5$ або навпаки, причому і між такими перерізами позитивний стохастичний зв'язок є досить відчутним:

$$\rho_\xi(3, 5) = \rho_\xi(5, 3) = \sqrt{\frac{(1-0{,}1\cdot 5)\cdot 3}{(1-0{,}1\cdot 3)\cdot 5}} = \sqrt{\frac{1{,}5}{3{,}5}} \approx 0{,}655\,.$$

Приклад закінчено.

Примітка. В літературі використовуване нами поняття "коваріаційна функція" може зустрічатися також під назвою "кореляційна функція"; натомість замість нашого поняття "кореляційна функція" у таких джерелах буде використано назву "нормована кореляційна функція".

8.4. Випадкові процеси та випадкові послідовності

Якщо параметр t випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, інтерпретують як час, така випадкова функція називається **випадковим процесом**. Серед випадкових процесів розрізняють **процеси з неперервним часом** — коли множина T являє собою або всю множину дійсних чисел R, або проміжок чи промінь з цієї множини, та **процеси з дискретним часом** — коли множина T є зліченною множиною окремих моментів часу: $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$.

Коли множина T — область визначення випадкової функції $\xi(t)$, $t \in T$, — є множиною натуральних чисел N, випадкова функція називається **випадковою послідовністю** і зазвичай позначається також через $\{\xi_t\}_{t=1}^{\infty}$.

Очевидно, що поняття випадкового процесу з дискретним часом і поняття випадкової послідовності є тотожними — різниця полягає лише в інтерпретації параметра t.

Оскільки опис реального випадкового процесу є надзвичайно складним і громіздким, або навіть і неможливим, при вивченні такого процесу часто обмежуються дослідженням лише найважливіших характеристик цього процесу, а саме: функціями математичного сподівання, дисперсії, стандартного відхилення та коваріаційною або кореляційною. Причому важливість останніх обумовлена саме тим, що реальні соціальні, економічні (і не тільки ці!) процеси характеризуються високим зв'язком між значеннями показників, які розташовані близько один від одного на осі часу, але із збільшенням часової відстані ці зв'язки слабішають.

8.5. Стаціонарний випадковий процес

Серед випадкових процесів розрізняють, насамперед, стаціонарні та нестаціонарні. Випадковий процес називається **стаціонарним**, якщо абсолютно всі його імовірнісні характеристики не залежать від конкретного значення параметру часу t. Це означає, зокрема, що математичне сподівання цього процесу є сталою функцією часу. Дисперсія та стандартне відхилення теж є сталими функціями. Натомість коваріаційна і, відповідно, кореляційна функції із плином часу змінюються. Щоб побачити характер таких змін, візьмемо, наприклад, кореляційну функцію та врахуємо, що її значення не поміняється, якщо зміститься по осі часу на величину, скажімо, $\Delta t = -t_1$:

$$\rho_\xi(t_1, t_2) = \rho_\xi(t_1 - \Delta t, t_2 - \Delta t) = \rho_\xi(0, t_2 - t_1).$$

Бачимо, що кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу залежить, фактично, не від двох параметрів t_1 і t_2, а лише від одного параметра — різниці $h = t_2 - t_1$. Залежність від h є парною, оскільки $\rho_\xi(0, h) = \rho_\xi(0, -h)$ - це є наслідком симетричності кореляційної функції, тому таку залежність вивчають лише при $h \geq 0$. При $h = 0$ матимемо найбільше значення кореляційної функції, що дорівнює +1, а із збільшенням h значення цієї функції за абсолютною величиною, як правило, зменшуються та все ближче наближаються до нуля, причому знак значень може або залишатися додатним, або ж поступово неодноразово змінюватися (рис. 8.2).

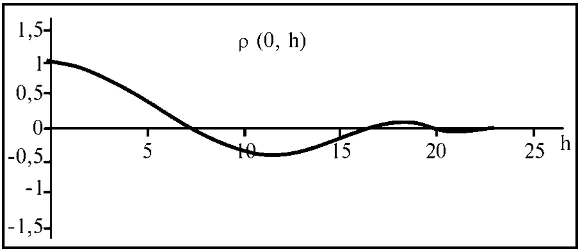


Рис. 8.2. До властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу

Зрозуміло, що не можна вважати будь-який з економічних або соціальних процесів стаціонарним. Проте часто зустрічаються випадки, коли нестаціонарний на довготривалому проміжку часу процес на короткому проміжку часу, якщо вивчається саме короткий період, є стаціонарним або майже стаціонарним.

8.6. Приклади поширених нестаціонарних процесів

Серед нестаціонарних випадкових процесів, які часто використовуються в економічних дослідженнях, зазначимо насамперед, процеси з незалежними приростами (неоднорідні та однорідні), пуассонівські, вінерівські та марківські. Дамо дещо спрощений опис таких процесів.

Випадковий процес $\xi(t)$, $t \in T$, є **процесом з незалежними приростами**, якщо для довільних двох різних значень $t, t+\Delta t \in T$ перерізи $\xi(t)$ і $[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]$ є незалежними випадковими величинами.

Процес з незалежними приростами $\xi(t)$, $t \in T$, називається **однорідним процесом з незалежними приростами**, якщо для довільних двох різних значень t і $t+\Delta t$ часового параметра ($t, t+\Delta t \in T$) закон розподілу ймовірностей випадкової величини $[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]$ не залежить від конкретного значення параметра часу t, а залежить лише від довжини часового приросту Δt. Пуассонівський та вінерівський процеси є окремими важливими випадками такого процесу.

Поширеними у дослідженнях є також і марківські процеси. Випадковий процес $\xi(t)$, $t \in T$, називається **марківським** якщо він позбавлений ефекту післядії, тобто якщо для довільного моменту часу $t_0 \in T$ подальший (при $t > t_0$) розвиток (йдеться про всі ймовірнісні характеристики) цього процесу залежить лише від того, я якому стані він перебуватиме в момент t_0 та абсолютно не залежить від його станів (імовірнісних характеристик) у минулому, тобто до моменту t_0. Відомими прикладами марківського процесу виступають марківські ланцюги.

Випадковий процес з дискретним часом, тобто випадкова послідовність $\{\xi_t\}_{t=1}^{\infty}$, називається **марківським ланцюгом** (або **марківською послідовністю**), якщо кожний переріз ξ_n є дискретною випадковою величиною із однаковою для всіх перерізів скінченною множиною можливих значень $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, причому всі ймовірнісні характеристики цього процесу визначаються лише **матрицею перехідних імовірностей** $P = \| p_{ik} \|_{(m)}$, кожний елемент p_{ik} якої — це ймовірність події, що коли чергова випадкова величина ξ_n $(n = 1, 2, \dots)$ набере значення x_i, тоді наступна за нею випадкова величина ξ_{n+1} набере значення x_k $(i, k = 1, 2, \dots, m)$.

За досить широких умов при $n \to \infty$ закон розподілу ймовірностей елементів марківської послідовності швидко наближається до вектору рівновагових (або стаціонарних) імовірностей $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, що показують імовірності, з якими випадкова величина у майбутньому ξ_n набиратиме відповідних значень з множини $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, причому ці ймовірності не залежать від того, яким був початковий стан випадкового процесу, тобто якою була реалізація найпершої випадкової величини ξ_1.

Ці рівновагові ймовірності визначається векторно-матричним рівнянням $q\,P = q$ та умовами $q \geq 0$ і $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$. Проілюструємо стрімку збіжність ймовірностей для марківської послідовності простим прикладом.

Приклад. Ілюстрацію швидкої збіжності ймовірностей для марківської послідовності покажемо прикладом у такому контексті, який говорить про значно ширші сфери прикладного застосування теорії ймовірностей, аніж лише щодо просто випадкових числових послідовностей.

Припустимо, що деяка динамічна система досліджується на незліченній дискретній множині моментів часу. У кожний з моментів система може перебувати лише в одному з двох можливих станів — або у стані a, або ж у стані b, а у наступному моменті часу — або залишатися у тому ж стані, або змінити цей стан. Матриця перехідних імовірностей $P = \| p_{ik} \|_{(2)}$ відома та наведена у таблиці:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Стан системи:</td><td colspan="2">наступний</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">поточний</td><td>a</td><td>0,7</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr>
</table>

Отже, $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Позначимо через $q^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)})$ вектор імовірностей випадкової події, що на n-му кроці система перебуватиме, відповідно, або в стані a, або в стані b ($n = 1, 2, \ldots$). Тому ймовірності для наступного кроку — вектор $q^{(n+1)} = (q_1^{(n+1)}, q_2^{(n+1)})$ — визначатимуться за формулою повної ймовірності через перехідні імовірності наступним чином:

$$\begin{cases} q_1^{(n+1)} = q_1^{(n)} p_{11} + q_2^{(n)} p_{21} \\ q_2^{(n+1)} = q_1^{(n)} p_{12} + q_2^{(n)} p_{22} \end{cases}$$

У матричному записі ці залежності виглядають так:

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} \boldsymbol{P}.$$

Таким чином, вектор стаціонарних імовірностей $q*$ задовольняє матричне рівняння $q* = q * P$, тобто рівняння $(E - P)^T (q*)^T = 0$, а також нерівність $q* \geq 0$ і умову $q_1^* + q_2^* = 1$.

Оскільки $(E - P)^T = \begin{pmatrix} 1-0,7 & 0-0,3 \\ 0-0,4 & 1-0,6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$, для знаходження вектора $q* = (q_1^*, q_2^*)$ маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,3q_1^* - 0,4q_2^* = 0 \\ -0,3q_1^* + 0,4q_2^* = 0 \\ q_1^* + \quad q_2^* = 1 \end{cases}$$

Очевидно, що $q_1^* = \dfrac{4}{7} \approx 0,572$ і $q_2^* = \dfrac{3}{7} \approx 0,428$ — розв'язок цієї системи рівнянь, тобто це ймовірності для стаціонарного стану нашої досліджуваної динамічної системи.

Тепер подивимось, як будуть змінюватися на кожному кроці ймовірності можливих станів системи для випадків, коли траєкторія її розвитку почнеться або зі стану *a*, або з протилежного — зі стану *b*. Наперед скажемо, що збіжність вектору ймовірностей є настільки стрімкою, що ми обмежилися розрахунками лише для перших шести кроків.

Початковий стан системи:					
Стан a			Стан b		
n	q_1^*	q_2^*	n	q_1^*	q_2^*
1	1	0	1	0	1
2	0,7	0,3	2	0,4	0,6
3	0,61	0,39	3	0,52	0,48
4	0,583	0,417	4	0,556	0,444
5	0,5749	0,4251	5	035668	0,4332
6	0,57247	0,42573	6	0,57004	0,429226

$q_1^* = \dfrac{4}{7} \approx 0,572$	$q_2^* = \dfrac{3}{7} \approx 0,428$

Приклад закінчено.

Питання про випадкові функції, випадкові процеси та випадкові послідовності ґрунтовно опрацьовуються у спеціальних розділах теорії ймовірностей та відповідної літератури прикладного спрямування. З-поміж іншого можна зазначити, наприклад, теорію масового обслуговування, методи аналізу фінансових потоків в оптимізаційних задачах фінансового менеджменту тощо.

8.7. Завдання для практичних занять і самостійної роботи студентів

8.7.1. Випадкова функція $\xi(t)$, $t \in [0; +\infty]$ є такою:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad t \geq \eta, \\ 5, & \text{якщо} \quad t < \eta, \end{cases}$$

де $\eta > 0$ — неперервна випадкова величина, яка має показниковий закон розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Визначити перерізи $\xi(1)$ та $\xi(10)$, обчислити їх математичні сподівання, дисперсії та стандартні відхилення.

8.7.2. Випадкова функція $\xi(t)$ визначена формулою: $\xi(t) = \eta \sin t$, $t \in R$, де η — випадкова величина з відомими математичним сподіванням та дисперсією: $\overline{\eta} = a$, $\sigma_\eta^2 = b$. Знайти основні характеристики (математичне сподівання, дисперсію та стандартне відхилення) цієї функції.

8.7.3. Обґрунтуйте, що лінійне перетворення $\xi(t) = \dfrac{\eta(t) - M_\eta(t)}{\sqrt{D_\eta(t)}}$, $t \in T$, дозволяє перейти від довільної випадкової функції $\eta(t)$ з ненульовою усюди дисперсією ($D_\eta(t) \neq 0$, $t \in T$) до центрованої та нормованої випадкової функції $\xi(t)$.

8.7.4. Випадкова функція $\xi(t)$ визначена формулою: $\xi(t) = \eta \cos t$, $t \in [-2\pi; 2\pi]$, де η — неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$. Проілюструвати сім'ю реалізацій цієї випадкової функції.

Вказівка. **Реалізацією** випадкової функції $\xi(t)=\eta\, f(t)$, $t\in T$, де $f(t)$, $t\in T$, - деяка числова невипадкова функція, а η — незалежна від параметра t випадкова величина, називається невипадкова функція $\eta_0 f(t)$, $t\in T$, яку буде отримано при певному фіксованому значенні (тобто при певній реалізації) η_0 випадкової величини η.

8.7.5. Доведіть, що додавання до випадкової функції $\xi(t)$, $t\in T$, довільної невипадкової функції $c(t)$, $t\in T$, не змінює ані коваріаційної $K_\xi(t_1,t_2)$, ані кореляційної функції $\rho_\xi(t_1,t_2)$ (t_1, $t_2\in T$).

8.7.6. Обчислити при $t_1=1$ і $t_2=10$ значення коваріаційної $K_\xi(t_1,t_2)$ та кореляційної $\rho_\xi(t_1,t_2)$ функцій для випадкової функції, наведеної у завданні 8.7.1.

Вказівка. Спочатку заповнити таблицю розподілу ймовірностей для системи величин $\{\xi(1);\xi(10)\}$:

$\xi(1)$	$\xi(10)$		Сума
	1	5	
1			
5			
Сума			1,0

8.7.7. Знайти коваріаціійну та кореляційну функції, якщо досліджувана випадкова функція є такою: $\xi(t)=\eta\cos^2 t$, $t\in R$, де η — випадкова величина з відомими математичним сподіванням та дисперсією: $\overline{\eta}=a$, $\sigma_\eta^2=b$.

8.7.8. Нехай маємо випадковий процес $\xi(t)=\eta\, e^{-t}$, $t\geq 0$, де η — неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[-1;1]$. Проілюструвати сім'ю траєкторій цього процесу.

Вказівка. **Траєкторією** або (**реалізацією**) випадкового процесу $\xi(t)=\eta\, f(t)$, $t\in T$, де $f(t)$, $t\in T$, - деяка числова невипадкова функція, а η — незалежна від часу t випадкова величина, називається невипадковий процес $\eta_0 f(t)$, $t\in T$, який буде отримано при певному фіксованому значенні (тобто при певній реалізації) η_0 випадкової величини η.

8.7.9. Довести, що транспонований вектор q^T рівноважних ймовірностей марківської послідовності $\{\xi_t\}_{t=1}^{\infty}$, кожний елемент якої може набирати значення лише зі спільної для всіх елементів множини $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, є власним вектором матриці P^T, де $P=\| p_{ik} \|_{(m)}$ — матриця перехідних імовірностей, а E — одинична матриця порядку m.

8.7.10. Нехай маємо марківську послідовність з відомою матрицею перехідних ймовірностей: $P=\| p_{ik} \| = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Знайти вектор рівноважних імовірностей $q=(q_1, q_2, q_3)$ та проілюструвати швидку збіжність до нього законів розподілу ймовірностей елементів досліджуваної випадкової послідовності.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Авраменко В.І., Карімов І.К.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчальний посібник. — Дніпроджержинськ: ДДТУ, 2009. — 254 с.

2. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник. — К.: ЦУЛ, 2010. — 424 с.

3. *Бобик О.В., Берегова Г.І., Копитко Б.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник. — К.: ВД "Професіонал", 2007. — 560 с.

4. *Валєєв К.Г., Джалладова І.А.* Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 2006. — 352 с.

5. *Валєєв К.Г., Джалладова І.А.* Теорія ймовірностей та теорія випадкових процесів: Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 2009. — 378 с.

6. *Волощенко А.Б., Джалладова І.А.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. — К.: КНЕУ, 2003. — 256 с.

7. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. — К.: Вища школа, 1988. — 439 с.

8. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие. — М.: Юрайт, 2011. — 404 с.

9. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. — М.: Юрайт, 2016. — 480 с.

10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей: Учебник. — М.: Наука, 1988. — 451 с.

11. *Грищенко В.О., Юхименко А.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів: Навчальний посібник. — Київ: КНТЕУ, 2000. — 170 с.

12. *Донченко В.С., Сидоров М.В.-С., Шарапов М.М.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник. — К.: ВЦ «Академія», 2009. — 288 с.

13. *Єжов С.М.* Теорія ймовірностей, математична статистика і випадкові процеси: Навчальний посібник. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2001. — 140 с.

14. *Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2015. — 705 с.

15. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчально-методичний посібник у 2-х ч. Ч. 1. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.

16. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчально-методичний посібник у 2-х ч. Ч. 2. Математична статистика. — К: КНЕУ, 2001. — 336 с.

17. *Зеленський К.Х.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчальний посібник. — К.: Кондор, 2007. — 208 с.

18. *Іванюта І.Д., Рибалка В.І., Рудоміно-Дусятська І.А.* Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник. — К.: Слово, 2006. — 272 с.

19. *Каніовська І.Ю.* Теорія ймовірностей у прикладах і задачах: Навчальний посібник. — К: Політехніка, 2004. — 156 с.

20. *Кармелюк Г.І.* Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач: Навчальний посібник. — К.: ЦУЛ, 2007. — 576 с.

21. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.

22. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та стохастичні методи в економетриці та фінансовій математиці: Навчальний посібник. — К.: Інформтехніка, 1995. — 380 с.

23. *Рудомино-Дусятская И.А., Кепич Е.И.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. — К.: Университет экономики и права "КРОК", 2007. — 116 с.

24. *Рудоміно-Дусятська І.А.* Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник завдань. — К.: Університет економіки та права «КРОК», 2003. — 54 с.

25. *Самойленко М.І., Кузнєцов А.І., Костенко О.Б.* Теорія ймовірностей: Підручник. — Х.: Видавництво "НТМТ". ХНАМГ, 2009. — 200 с. (рос. мовою).

26. *Сеньо П.С.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. — К.: ЦНЛ, 2004. — 448 с.

27. *Тичинська Л.М., Черепащук А.А.* Теорія ймовірностей: Навчальний посібник. Ч.1. Історичні екскурси та теоретичні відомості. — Вінниця: ВНТУ, 2010. — 112 с.

28. *Турчин В.М.* Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: Навчальний посібник. — К.: А.С.К., 2004. — 476 с.

29. *Чернова Н.И.* Теория вероятностей: Учебное пособие. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

30. *Черняк О.І., Бушна О.М., Ставицький А.В.* Теорія ймовірностей та математична статистика: Збірник задач. — К.: Знання, 2001. — 199 с.

31. *Шефтель З.Г.* Теорія ймовірностей: Підручник. — К.: Вища школа, 1994. — 194 с.

Вищий навчальний заклад
«УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ ТА ПРАВА «КРОК»

Навчальне видання

В.Р. КІГЕЛЬ, О.І. ШАРОВ

Теорія ймовірностей
ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ І МЕНЕДЖЕРІВ

Навчальний посібник

Комп'ютерна верстка *Л.В. Багненко*

Підписано до друку 01.080.2017. Формат 60 × 84/16.
Папір офс. № 1. Друк офс. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 9,0. Обл.-вид. арк. 7,34. Наклад 300 прим.
Замовлення № 132

ВНЗ «Університет економіки та права «КРОК»
Київ-113, вул. Лагерна, 30-32
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 613 від 25.09.2001 року

Надруковано департаментом поліграфії
ВНЗ «Університет економіки та права «КРОК»
місто Київ, вулиця Лагерна, 30-32
тел.: (044) 455-69-80
e-mail: polygrafia.krok@gmail.com