ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ ТА ПРАВА "КРОК"»

КАХУТА Н.Д.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(практикум)

Частина 1

ВЕКТОРИ І КООРДИНАТИ
ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ
ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Київ 2017

УДК 51
ББК 22.1
К-12

Рекомендовано до друку Вченою Радою
ВНЗ «Університет економіки та права “КРОК”»
(протокол № 6 від 26.05.2016 року)

Кахута Н.Д.

Вища математика — Частина 1. Вектори і координати. Похідна та її застосування. Інтеграл і його застосування. Диференціальні рівняння. Елементи теорії ймовірностей. Практикум для формування компетентностей студентів. — К.: Університет економіки та права «КРОК», 2017. — 95 с.
ISBN 978-966-170-013-9

У практикумі подано короткі теоретичні відомості, основні означення, теореми та формули, приклади типових завдань з докладним розв’язанням та поясненням, завдання для самостійної роботи студентів із відповідями до них, а також завдання для контрольної роботи студентів.

УДК 51
ББК 22

ISBN 978-966-170-013-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Рівень математичної культури значною мірою залежить від уміння розв'язувати задачі. Здобути таке уміння допомагає знання прийомів і методів розв'язання задач, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки студентів, а також усіх, хто цікавиться математикою.

Розв'язування задач з математики зі студентами часто пов'язане з багатьма труднощами. Допомогти студентам подолати ці труднощі, навчити їх застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач з окремих розділів з курсу вищої математики — основне призначення цього практикуму.

Відомо, що при самостійному розв'язанні задач багато студентів потребують постійних консультацій щодо способів і методів їх розв'язання, оскільки знайти шлях до розв'язування задач без допомоги викладача або відповідного посібника не під силу. Такі консультації студент може знайти в цьому практикумі.

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів теоретичних знань і практичних навичок з основ математичного апарату для творчого розв'язування задач, які зустрічаються у житті та на виробництві; навчити студентів виконувати практичні розрахунки на основі формул.

Завданнями, що мають бути вирішені у процесі вивчення дисципліни, є набуття студентами знань з основних розділів вищої математики, здатність розвивати й використовувати математичні здібності та формувати вміння:

- виконувати дії над векторами;
- досліджувати функції за допомогою диференціального числення;
- здійснювати інтегральні числення;
- розв'язувати диференціальні рівняння першого та вищих порядків;
- застосовувати теорію ймовірностей до розв'язування задач.

Результатом вивчення дисципліни повинна стати спроможність студентів самостійно опрацьовувати математичну літературу, оволодіти розв'язуванням задач та прикладів з курсу вищої математики, розвивати логічне мислення, поглиблювати знання.

Бажаю успіху!

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Даний практикум ставить своєю метою допомогти студентам вищих навчальних закладів в організації їх самостійної роботи з володіння системою знань, вмінь і навичок в обсязі діючої програми.

Ця робота потребує не тільки великої наполегливості, але й вмінь, без яких затрата сил і часу не дасть потрібного ефекту. Читати, розуміти прочитане і застосувати його практично — ось у чому суть вміння працювати з навчальним посібником. Пам'ятайте: практикум потрібно не просто читати, а вивчати; основою запам'ятовування є розуміння, знання здобуваються — розуміння ніколи; повторення — важливий засіб, який запобігає забуванню; необхідно виробити звичку систематичної самостійної роботи.

Кращим методом закріплення навчального матеріалу є розв'язок задач. Звичайно, загальних рецептів для розв'язку різноманітних задач не існує, але рекомендую дотримуватись наступних порад:

1. Величини, які дані в умові задачі, необхідно перевести в одну систему одиниць; порушення цього правила є розповсюдженим джерелом помилок у студентів.

2. Уважно вивчіть поставлену мету в задачі; виявіть, які теоретичні положення пов'язанні з даною задачею в цілому або з деякими її елементами.

3. Не належить приступати до розв'язку задачі, не обдумавши умову і не знайшовши плану розв'язку.

4. Спробуйте співставити дану задачу з певним типом задач, метод розв'язку яких вам відомий.

5. Якщо відразу не видно хід розв'язку, то послідовно відповідайте на запитання: що дано; що потрібно знайти; чи достатньо даних, щоб знайти невідоме і т.д.

6. Спробуйте розкласти дану задачу на серію допоміжних, послідовність розв'язку яких може скласти розв'язок даної задачі.

7. Знайшовши план розв'язку, виконайте його, переконайтесь в необхідності і правильності кожного кроку, зробіть перевірку розв'язку і, якщо потрібно, його дослідження.

8. Продумайте, чи можна було розв'язати задачу інакше; відомо, що одна і та ж сама задача може мати кілька розв'язків, тому потрібно виділити найбільш раціональний.

9. Якщо розв'язати задачу не вдається, то знайдіть в навчальній (або популярній) літературі вже розв'язану задачу, яка схожа на дану, вивчіть уважно цей «готовий» розв'язок і спробуйте добути з нього користь для розв'язку своєї задачі.

Контрольну роботу потрібно виконувати самостійно і лише після опрацювання відповідного теоретичного матеріалу і розв'язання необхідного мінімуму задач. Оскільки кожній темі відповідає задача або вправа, то контрольну роботу потрібно виконувати в міру вивчення матеріалу.

При розв'язанні задач потрібно обґрунтувати кожний крок розв'язку, виходячи з теоретичних основ курсу. Неприйнятним є застосування формул, що не входять у програму. Розв'язок повинен бути доведений до кінцевої відповіді.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Контрольна робота виконується в окремому зошиті шкільного формату. Потрібно нумерувати сторінки і залишити на них поля не менше 3 см. для зауважень викладача.

2. На обкладинці зошита повинен бути приклеєний титульний лист затвердженого зразка або акуратно записані всі дані титульного листка: шифр, спеціальність, прізвище, ім'я, по-батькові студента, назва навчальної дисципліни і номер роботи.

3. Робота повинна бути виконана чорнилом одного кольору, охайно і розбірливо.

4. Кожну задачу потрібно починати з нової сторінки.

5. Розв'язок задач бажано розміщати в порядку номерів, які вказані в завданні, номера потрібно вказувати перед умовою.

6. Умови задач повинні бути обов'язково переписані повністю в контрольний зошит.

7. При оформленні записів у зошиті необхідно виконувати загальні вимоги до культури їх ведення. Найважливіші з цих вимог такі:

a) студенти повинні робити абзаци, будь-яку нову думку потрібно починати з нового рядка;

b) важливі формули, рівності, визначення потрібно виділяти в окремі рядки, щоб зробити їх більш оглядовими;

c) при описі розв'язку задачі, короткий запис умови відокремлюється від самого розв'язку і в кінці його ставиться відповідь;

d) серйозну увагу потрібно віддати правильному написанню скорочених одиниць величин;

e) необхідно правильно застосувати математичні символи.

8. Розв'язки задач повинні супроводжуватися коротким, але достатньо обґрунтованим поясненням, а також потрібно використовувати формули, якими користуєтесь.

9. Рисунки потрібно виконувати олівцем, дотримуючись масштабу.

10. В кінці роботи потрібно вказати літературу, якою ви користувались, поставити дату виконання роботи і підпис.

11. Якщо в роботі допущенні недоліки та помилки, то студент повинен виконати всі зазначені в рецензії вказівки викладача.

12. Контрольна робота повинна бути виконана в термін (у відповідності з навчальним планом-графіком). В період сесії роботи на перевірку не приймаються.

13. Виконана не за своїм варіантом робота не зараховується і повертається студентові без оцінки.

14. Студенти, які не мають заліку з контрольної роботи, до іспиту не допускаються.

15. Під час іспиту залікові контрольні роботи подаються викладачу разом з даними методичними вказівками.

Контрольна робота має 100 варіантів. Варіант роботи вибирається за двома останніми цифрами шифру (номер особової справи). Наприклад, студенти, які мають шифри 23, 117, 300, 207, отримують варіанти 23, 17, 00, 07 відповідно. Студенти, у яких шифри від 1 до 9, повинні добавити спереду цифру «0» і отримати варіанти 01, 02, 03, 04, 05 і т.д.

ТАБЛИЦЯ ВАРІАНТІВ

Варіант	Номер задач
00	7, 38, 80, 86, 139, 162
01	14, 29, 64, 89, 149, 170
02	20, 35, 68, 93, 129, 154
03	9, 34, 79, 103, 137, 169
04	12, 33, 69, 97, 135, 165
05	10, 32, 63, 90, 128, 153
06	19, 35, 74, 99, 138, 161
07	11, 37, 62, 94, 130, 157
08	15, 47, 66, 88, 134, 171
09	2, 43, 61, 87, 123, 172
10	4, 30, 75, 101, 142, 159
11	18, 49, 71, 107, 148, 164
12	5, 28, 84, 105, 136, 167
13	21, 50, 73, 109, 132, 155
14	25, 44, 66, 95, 131, 152
15	17, 40, 72, 100, 126, 176
16	8, 42, 77, 110, 133, 156
17	23, 48, 82, 104, 141, 166
18	1, 46, 76, 91, 127, 160
19	6, 45, 70, 102, 140, 163
20	3, 36, 67, 106, 144, 151
21	22, 31, 83, 108, 143, 156
22	13, 27, 85, 122, 145, 151
23	24, 41, 78, 96, 150, 163
24	16, 26, 79, 92, 147, 170
25	4, 43, 65, 94, 138, 154
26	2, 47, 62, 112, 128, 165
27	15, 39, 81, 95, 135, 169
28	11, 54, 63, 97, 137, 167
29	19, 32, 69, 103, 126, 152
30	10, 52, 80, 93, 146, 162
31	7, 29, 68, 111, 136, 161
32	14, 34, 78, 92, 134, 168
33	1, 45, 67, 117, 142, 155
34	6, 36, 85, 96, 127, 157
35	23, 46, 72, 114, 144, 180
36	16, 38, 77, 89, 145, 170
37	24, 30, 84, 87, 129, 166
38	21, 28, 72, 107, 130, 163
39	18, 30, 61, 115, 122, 158
50	20, 41, 75, 88, 150, 168
51	2, 28, 64, 106, 143, 173
52	3, 26, 61, 86, 126, 153
53	4, 29, 65, 90, 127, 174
54	11, 30, 66, 91, 128, 154
55	9, 32, 67, 93, 143, 165
56	7, 27, 71, 94, 150, 175
57	5, 31, 62, 87, 129, 159
58	23, 47, 83, 108, 142, 158
59	25, 35, 84, 109, 149, 162
60	1, 45, 69, 103, 137, 177
61	10, 49, 85, 107, 140, 167
62	12, 39, 76, 102, 133, 179
63	21, 50, 82, 102, 133, 168
64	6, 40, 63, 78, 122, 156
65	17, 41, 74, 105, 130, 164
66	15, 38, 73, 114, 131, 169
67	13, 42, 81, 120, 136, 151
68	24, 46, 72, 115, 138, 178
69	14, 37, 68, 106, 131, 166
70	20, 44, 79, 98, 135, 157
71	19, 40, 70, 97, 148, 167
72	22, 43, 80, 105, 146, 159

Таблиця варіантів

Варіант	Номер задач
73	16, 56, 78, 104, 147, 161
74	18, 50, 77, 123, 145, 165
75	21, 38, 82, 101, 144, 158
76	16, 58, 75, 119, 139, 153
77	8, 39, 72, 90, 128, 152
78	1, 57, 84, 93, 131, 155
79	10, 44, 74, 97, 136, 163
80	25, 30, 83, 114, 132, 160
81	6, 48, 85, 107, 148, 151
82	17, 42, 76, 118, 126, 146
83	4, 27, 64, 99, 141, 161
84	24, 55, 63, 121, 147, 152
85	14, 37, 65, 87, 135, 169
86	23, 28, 81, 96, 146, 162
87	2, 45, 62, 124, 140, 153
88	7, 35, 80, 95, 134, 166
89	20, 43, 61, 100, 142, 154
90	11, 26, 61, 110, 150, 156
91	22, 59, 66, 88, 149, 164

Варіант	Номер задач
92	3, 41, 69, 102, 145, 168
93	18, 34, 70, 89, 138, 157
94	9, 32, 78, 89, 133, 170
95	15, 36, 73, 94, 130, 165
96	19, 51, 71, 125, 127, 158
97	5, 29, 77, 106, 143, 163
98	12, 33, 79, 103, 129, 159
99	13, 40, 68, 108, 137, 155
90	11, 26, 61, 110, 150, 156
91	22, 59, 66, 88, 149, 164
92	3, 41, 69, 102, 145, 168
93	18, 34, 70, 89, 138, 157
94	9, 32, 78, 89, 133, 170
95	15, 36, 73, 94, 130, 165
96	19, 51, 71, 125, 127, 158
97	5, 29, 77, 106, 143, 163
98	12, 33, 79, 103, 129, 159
99	13, 40, 68, 108, 137, 155

П Р О Г Р А М А

Вектори і координати

Векторні величини. Дії з векторами (додавання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів). Прямокутні координати в просторі. Ділення відрізка в даному відношенні.

Література: [4], гл. 1, §1—23; гл. 2, §28—41; гл. 3, §42—60; [9], гл. 2, §1—10; гл. 4, §1—11; [13], гл. 1, §1—8; гл. 2, §1—10; гл. 3, §1—12.

Похідна та її застосування

Властивості і графіки основних елементарних функцій. Поняття границі і неперервності функції в точці. Основні властивості границь.

Границя функції при $x \to \propto$. Обчислення границь. Неперервність основних елементарних функцій. Похідна, її геометричний і фізичний зміст. Правила диференціювання. Зростання і спадання функції. Екстремум функції. Друга похідна та її фізичний зміст. Опуклість, точки перегину графіка функції. Дослідження функції і побудова графіків. Задачі на найбільше і найменше значення. Економічний зміст похідної.

Література: [1], гл. 4, §15—19; гл. 6, §27—30; гл. 7, §31—37; [2], гл. 2, §4; [9], гл. 5, §1—17; гл. 6, §1—5.

Інтеграл і його застосування

Невизначений інтеграл і його властивості. Основні табличні інтеграли. Інтегрування методом заміни змінної. Визначений інтеграл і його основні властивості. Обчислення визначеного інтеграла.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Геометричний зміст визначеного інтеграла. Обчислення площ плоских фігур та об’ємів тіла обертання за допомогою визначеного інтеграла. Застосування інтеграла для розв'язування прикладних задач. Інтеграл в економіці.

Література: [2], гл. 2 §5(1—3); §6 (1, 2); гл. 3, §7—10 (1, 2); §11 (1, 2); гл. 4, §12;.14, (1—3); [9], гл. 7 §1—6; гл. 8, §1—14.

Диференціальні рівняння

Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Поняття про диференціальне рівняння першого порядку, множина його розв'язків. Задача Коші. Диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальне рівняння другого порядку. Задачі Коші. Диференціальні рівняння в науці і техніці.

Література: [2], гл. 7, §24—30, [9], гл. 10 §1, 2.

Елементи теорії ймовірностей

Предмет теорії ймовірностей. Поняття про випадкові події. Види випадкових подій. Класичне означення ймовірності подій.

Основні подання комбінаторики: розміщення, перестановки, сполучення. Властивості сполучень.

Теорема додавання ймовірностей. Умовна ймовірність подій. Формула повної ймовірності (без доведення).

Послідовність незалежних випробувань. Формула Байєса (без доведення) і її застосування.

Поняття про задачі математичної статистики.

Література: [2], гл. 6, §18, (1—3) гл. 7 §20—23; [9] гл. 11 §1—9.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Вектори і координати

З даної теми спочатку вивчіть §1—23 гл. 1 [4] або §1—8 гл. 1 [13]. Тоді ознайомтесь з методичними вказівками з цієї теми і уважно розберіть розв'язок прикладів з даного посібника. Дайте відповіді на запитання і виконайте вправи для самоперевірки. Розв'яжіть наступні задачі: [4] гл. 1 №30—34; 39—43; 56—64.

З контрольної роботи виконайте перше завдання свого варіанту.

Вектори в просторі

Координати вектора. Зі шкільного курсу математики відомо, що прямокутна система координат в просторі визначається завданням прямокутного базиса ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) і точки 0 (рис. 1).

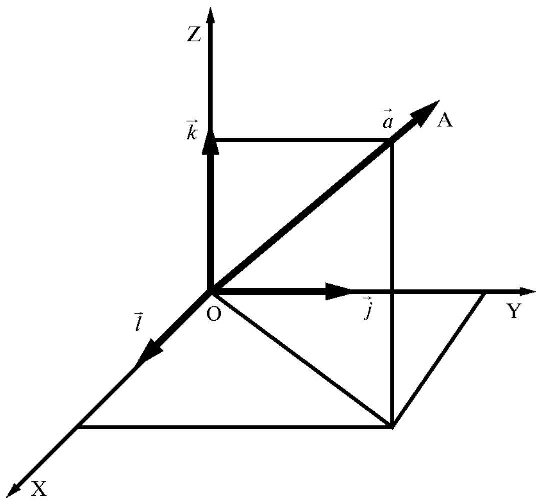

Рис. 1

Вектори $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ називають *координатними векторами*; $\vec{i}$ — одиничний вектор осі абсцис (OX); $\vec{j}$ — одиничний вектор осі ординат (OY); $\vec{k}$ — одиничний вектор осі аплікат (OZ); O — початок координат.

Справедлива *теорема*: будь–який вектор $\vec{a}$ можна розкласти єдиним чином за базисними векторами, тобто $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$. Коефіцієнти x; y; z цього розкладання називаються координатами вектора $\vec{a}$ в даній системі координат.

Вектор $\vec{a}$ з координатами x; y; z записують так: $\vec{a} = \{x;\ y;\ z\}$.

Координати точки A (рис.1) співпадають з відповідними координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ або $\vec{a}$. Точку A з координатами x; y; z записують так: A $\{x;\ y;\ z\}$.

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її координати (x; 0; 0;); якщо на осі ординат, то (0; y; 0); якщо на осі аплікат, то (0; 0; z).

Довжина вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат: $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Наприклад, довжина вектора $|\vec{m}|=\{6;\ 3;\ -2\}$ дорівнює 7, оскільки

$$|\vec{m}| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7.$$

Якщо вектор задано двома точками A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і B$(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координати вектора дорівнюють різниці одноіменних координат кінця і початку вектора: $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$.

Приклад 1. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{MK}$, якщо M (5; –1; –4) і K (2; –5; 8).

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати вектора $\overrightarrow{MK}$:

$$\overrightarrow{MK} = \{2-5;\ -5-(-1);\ 8-(-4)\}=\{-3;\ -4;\ 12\}.$$

Тепер знаходимо його довжину:

$$\left|\overrightarrow{MK}\right| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$$

Дії над векторами, що задані своїми координатами

Нехай дано вектори $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. При додаванні векторів їх одноіменні координати додаються, а при відніманні — віднімаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\};$$

При множенні вектора на число, його координати множать на це число:

$$k\vec{a} = \{kx_1;\ ky_1;\ kz_1\}$$

Приклад 2. Дано вектори $\vec{p} = \{-2;\ 1;\ 3\}$ і $\vec{q} = \{3;\ -2;\ -4\}$. Обчисліть координати вектора $3\vec{p} - 4\vec{q}$.

Розв'язок. Знайдемо координати векторів $3\vec{p}$ і $-4\vec{q}$, а тоді додамо ці вектори:

$3\vec{p} = \{-6;\ 3;\ 9\}$; $-4\vec{q} = \{-12;\ 8;\ 16\}$. $3\vec{p} + (-4\vec{q}) = \{-18;\ 11;\ 25\}$.

Умова колінеарності двох векторів

Вектори $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх одноіменні координати пропорційні:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff x_1 = kx_2;\ y_1 = ky_2;\ z_1 = kz_2.$$

Наприклад, вектори $\vec{m} = \{1;\ -8;6\}$ і $\vec{n} = \{0,5;\ -4;3\}$ колінеарні, оскільки

$$\frac{1}{0,5} = \frac{-8}{-4} = \frac{6}{3} = 2,$$

але ці вектори ще й сонаправлені, тому що $\vec{m} = 2\vec{n}$.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ дорівнює сумі попарних добутків одноіменних координат векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Знайдемо, наприклад, скалярний добуток векторів $\vec{m} = \{4; -2; -4\}$ і $\vec{n} = \{6; -3; 2\}$.

$$\vec{\boldsymbol{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 24 + 6 - 8 = 22$$

Умова перпендикулярності двох векторів

Вектори $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ або } x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Наприклад, вектори $\vec{a} = \{2;\ 3;\ -6\}$ і $\vec{b} = \{-3;\ 4;\ 1\}$ перпендикулярні, оскільки

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-3) + 3 \cdot 4 + (-6) \cdot 1 = -6 + 12 - 6 = 0.$$

Знаходження кута між векторами

Кут φ між векторами $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ знаходять за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ де } \vec{a} \neq 0 \text{ і } \vec{b} \neq 0,$$

або, в координатах, $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Приклад 3. Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = \{4;\ -10;\ 1\}$ і $\vec{b} = \{11;\ -8;\ -7\}$.

Розв’язок. Для знаходження кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ використаємо приведену формулу, але спочатку знайдемо скалярний добуток векторів, їх довжини і добуток довжин векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 11 + (-10) \cdot (-8) + 1 \cdot (-7) = 44 + 80 - 7 = 117;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16 + 100 + 1} = \sqrt{117}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{121 + 64 + 49} = \sqrt{234};$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{117} \cdot \sqrt{234} = \sqrt{117 \cdot 117 \cdot 2} = 117\sqrt{2}.$$

Тоді, $\cos\varphi = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Відстань між двома точками

У прямокутній системі координат відстань між двома точками A(x_1; y_1; z_1) і B(x_2; y_2; z_2) обчислюють за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}.$$

Приклад 4. Обчислити відстань між точками A(1; 2; 1) і C(7; 4; –2).

Розв'язок. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{CA}$ або $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \{7–1;\ 4–2;\ –2–1\} = \{6;2;–3\}$$

Тепер знайдемо довжину: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$.

Ділення відрізка в даному відношенні

Якщо точка M (x; y; z) ділить відрізок між точками A (x_1; y_1; z_1) і B (x_2; y_2; z_2) (рис. 2) у відношенні $|AM| : |MB| = \lambda$, то координати точки M знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

Якщо точка M ділить відрізок AB навпіл, то $\lambda = 1$ і координати точки M знаходять за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

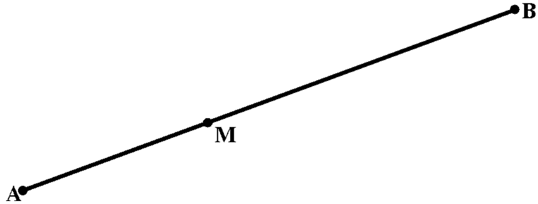

Рис.2

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі одноіменних координат початку і кінця відрізка.

Приклад 5. Дано вершини чотирикутника A(1; 2; 3), B(7; 3; 2), C(–3; 0; 6) і D(9, 2, 4). Доведіть що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

Розв'язок. Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} = \{-3-1;\ 0-2;\ 6-3\} = \{-4;\ -2;\ 3\};$$

$$\overrightarrow{BD} = \{9-7;\ 2-3;\ 4-2\} = \{2;\ -1;\ 2\}.$$

Тепер знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -8 + 2 + 6 = 0$$

Оскільки скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ дорівнює нулю, то ці вектори перпендикулярні; значить, перпендикулярні і діагоналі чотирикутника ABCD.

Приклад 6. На осі ординат знайти точку, що рівновіддалена від точок A(1; –3; 7) і B(5; 7; –5).

Розв'язок. Шукану точку позначимо буквою C; оскільки вона лежить на осі ординат, то її координати (0; y; 0). За умовою $|AC| = |BC|$, тому знайдемо кожну з цих відстаней:

$$\overrightarrow{AC} = \{0-1;\ y-(-3);\ 0-7\} = \{-1;\ y+3;\ -7\};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = |AC| = \sqrt{1+(y+3)^2+49} = \sqrt{50+(y+3)^2};$$

$$\overrightarrow{BC} = \{0-5;\ y-7;\ 0-(-5)\} = \{-5;\ y-7;\ 5\}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = |BC| = \sqrt{25+(y-7)^2+25} = \sqrt{50+(y-7)^2}.$$

Так як $|AC| = |BC|$, то $|AC|^2 = |BC|^2$ і отримаємо рівняння

$$50 + (y+3)^2 = 50 + (y-7)^2;$$

$$(y+3)^2 = (y-7)^2;$$

$$y^2 + 6y + 9 = y^2 - 14y + 49;$$

$$20y = 40; \quad y = 2.$$

Точка C(0; 2; 0) рівновіддалена від точок A і B.

Приклад 7. Дано вершини трикутника А (2; –1; 4), В(3; 2;—6) і С(–5; 0;2).

Знайдіть довжину його медіани, проведеної з вершини А.

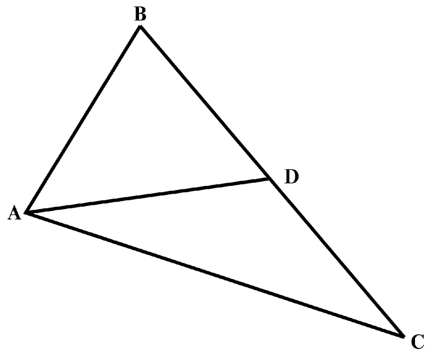

Рис. 3

Розв'язок. Нехай AD — медіана (рис.3), тоді точка D ділить відрізок BC навпіл. Значить,

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2};\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2};\ z_D = \frac{z_B + z_C}{2},$$

тобто

$$x_D = \frac{3-5}{2} = -1; \quad y_D = \frac{2+0}{2} = 1;\ z_D = \frac{-6+2}{2} = -2.$$

Тоді, D(–1;1;–2). Тепер знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = \{-1-2;\ 1-(-1);\ -2-4\} = \{-3;\ 2;\ -6\}.$$

Його довжина дорівнює

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7.$$

ЗАПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається вектором; довжиною вектора; направленням вектора; нульовим вектором?

2. Дайте визначення колінеарності вектора.

3. Дайте визначення рівних векторів.

4. Як знайти координати вектора, що заданий парою точок, які не співпадають?

5. Як знайти довжину вектора?

6. Дайте визначення скалярного добутку двох векторів.

7. Напишіть формулу для обчислення скалярного добутку двох векторів за їх координатами.

8. Сформулювати умову колінеарності двох векторів.

9. Сформулювати умову перпендикулярності двох векторів.

10. Напишіть формулу для обчислення кута між двома векторами.

11. Як знайти відстань між двома точками?

12. Як знайти координати середини відрізка?

13. Дано вектори $\vec{a} = \{2; -5; 5\}$ і $\vec{в} = \{2; -3; 4\}$. Обчислити довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{в}$.

14. На осі абсцис знайти точку *K,* відстань якої до точки *C* дорівнює 5 одиниць, якщо *C*(2; −3; 0).

15. Дано три вершини паралелограма: *A*(3; −4; 7), *B*(−5; 3; −2) і *C*(1; 2; −3). Знайдіть координати його четвертої вершини *D*, яка протилежна вершині *B*.

16. Дано трикутник з вершинами: *A*(−3; 5; 6), *B*(1; −5; 7), і *C*(8; −3; −1). Знайдіть внутрішній кут трикутника при вершині С.

Відповіді: №13. 3, № 14. (6; 0), №15. (9; −5; 6), № 16. 45°

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

З даної теми вивчаємо спочатку §27—30 гл. 6 [1] або §1—17 гл. 5 [9]. Далі ознайомтесь з методичними вказівками з цієї теми і уважно розгляньте розв'язки прикладів з даного посібника. Дайте відповіді на запитання і виконайте вправи для самоперевірки. Розв'яжіть наступні задачі: [1] гл. 6 §30, № 6.21—6.49 (непарні) або [6], гл. 5, №11—31; 36—39, 67, 71(1—5), 75(1; 5), 77(1; 2), 79(1—4), 81—87.

З контрольної роботи виконайте друге завдання свого варіанту.

Похідна

Поняття похідної являється одним із фундаментальних понять математики. Багато задач, як самої математики, так і природознавства і техніки, приводять до цього поняття.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргумента, якщо приріст аргумента прямує до нуля:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функція, яка має кінцеву похідну, називається **диференційованою**. Операція знаходження похідної називається **диференціюванням**.

Якщо $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ — диференційовані функції своїх аргументів, то похідна ***складної*** функції $y = f(\varphi(x))$ існує і дорівнює добутку похідної функції за проміжковим аргументу **u** на похідну проміжкового аргументу ***u*** за незалежною змінною *x:* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Аналогічна формула вірна і для складних функцій, які задаються за допомогою ланцюжка, який має три ланки і більше.

Таблиця формул диференціювання

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
4. $(UV)' = UV' \pm VU'$
5. $(CU)' = CU'$
6. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{VU' - UV'}{V^2}$
7. $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-CV'}{V^2}$
8. $(U^n)' = nU^{n-1} \cdot U'$
9. $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$
10. $(a^U)' = a^U lna U'$
11. $(e^U)' = e^U \ln e U' = e^U U'$
12. $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$, де $U > 0$
13. $(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a}$, де $U > 0$
14. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
15. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
16. $(\text{tg}\, U)' = \frac{U'}{\cos^2 U} = \sec^2 U \cdot U'$
17. $(\text{ctg}\, U)' = \frac{-U'}{\sin^2 U} = -\text{cosec}^2\, U \cdot U'$
18. $(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}}$
19. $(\arccos U)' = \frac{-U'}{\sqrt{1 - U^2}}$

20. $(\mathrm{arctg}\,U)' = \dfrac{U'}{1+U^2}$

21. $(\mathrm{arcctg}\,U)' = \dfrac{-U'}{1+U^2}$

Тут U і V — диференційовані функції від x, а c — постійна величина.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 5x^3 - 2x + \dfrac{3}{x}$;

Розв'язок. Дана функція являє собою алгебраїчну суму функцій. Диференціюємо її, використовуючи формули 2; 3; 5; 7; 8:

$$y' = (5x^3) - (2x)' + \left(\frac{3}{x}\right)' = 5(x^3)' - 2x' - \frac{3}{x^2} =$$

$$= 5\cdot 3x^2 - 2 - \frac{3}{x^2} = 15x^2 - 2 - \frac{3}{x^2}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Розв'язок. Диференціюємо функцію за формулами 6; 8:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x^2)' - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)2x - x^2 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $y = \sin^3\varphi$ і обчислити її значення при $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;

Розв'язок. Це складна функція з проміжним аргументом $\sin\varphi$. Використовуючи формули 8 і 14, маємо:

$$f'(\varphi) = 3\sin^2\varphi(\sin\varphi)' = 3\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Обчислимо значення похідної при $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції: $y = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln\cos x$.

Розв'язок. Це складна функція з проміжним аргументом $\cos x$. Застосовуючи формули 3; 5; 8; 12; 15, отримаємо

$$y' = \left(\frac{1}{2}\cos^2 x\right)' - (\ln\cos x)' = \frac{1}{2}2\cos x(\cos x)' - \frac{(\cos x)'}{\cos x} =$$

$$= \cos x(-\sin x) - \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x - \cos^2 x \sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos x} = \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos x} = tgx\sin^2 x.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Розв'язок. Спочатку перетворимо функцію, використовуючи властивості логарифмів: $y = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x)$. Диференціюючи, отримаємо

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(1+\sin x))' - \frac{1}{2}(\ln(1-\sin x))' = \frac{1}{2}\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} - \frac{1}{2}\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{1}{2}\frac{-\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{2(1+\sin x)} + \frac{\cos x}{2(1-\sin x)} =$$

$$= \frac{2\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x}$

Розв'язок. Диференціюємо дану функцію за формулами 6; 16; 3; 1:

$$y' = \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1)' - (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x} - (\operatorname{tg} x - 1)\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} : \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \dfrac{5^{2x}}{2+\sqrt{4+5^{2x}}}$ і обчислити її значення при $x = 0$

$$y' = \frac{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)\cdot\left(5^{2x}\right)' - \left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)'\cdot 5^{2x}}{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)^2}\cdot\left(\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)5^{2x}\ln 5(2x)' - \frac{(4+5^{2x})'}{2\cdot\sqrt{4+5^{2x}}}5^{2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)^2}\cdot\left(\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)5^{2x}\ln 5\cdot 2 - \frac{5^{2x}\ln 5\cdot 2}{2\sqrt{4+5^{2x}}}5^{2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\left(5^{2x}\ln 5\cdot 4 + 5^{2x}\ln 5\cdot 2\sqrt{4+5^{2x}}\right)\cdot\sqrt{4+5^{2x}} - 5^{2x}\ln 5\cdot 5^{2x}}{\sqrt{4+5^{2x}}} = \cdot$$

$$= \frac{1}{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)^2}\cdot\frac{5^{2x}\ln 5\cdot 4\sqrt{4+5^{2x}} + 5^{2x}\cdot\ln 5\cdot 2\left(4+5^{2x}\right) - 5^{2x}\ln 5\cdot 5^{2x}}{\sqrt{4+5^{2x}}} =$$

$$\frac{1}{\left(2+\sqrt{4+5^{2x}}\right)^2}\cdot\frac{5^{2x}\ln 5\cdot 4\sqrt{4+5^{2x}} + 8\cdot 5^{2x}\cdot\ln 5 + 5^{4x}\cdot\ln 5\cdot 2 - \ln 5\cdot 5^{4x}}{\sqrt{4+5^{2x}}} =$$

$$\frac{1}{8+4\sqrt{4+5^{2x}}+5^{2x}}\cdot\frac{5^{2x}\cdot\ln 5\left(4\sqrt{4+5^{2x}}+8+5^{2x}\right)}{\sqrt{4+5^{2x}}} = \frac{5^{2x}\cdot\ln 5}{\sqrt{4+5^{2x}}}$$

Обчислимо значення похідної при $x = 0$:

$$y'(0) = \frac{5^0\ln 5}{\sqrt{4+5^0}} = \frac{\ln 5}{\sqrt{5}}.$$

Геометричний зміст похідної

Похідна функції $y = f(x)$ це є кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до графіка функції в любій його точці.

Кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до графіка функції $y = f(x)$ в точці *A(a;в),* дорівнює значенню похідної функції при $x = a$:

$$k_{дот.} = y'(a) = f'(a)$$

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції в цій точці, має вигляд

$$y - b = k(x - a), \quad де \quad k = f'(a)$$

Приклад 8. Скласти рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x = 2$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо ординату точки дотику *A(*2*; y).* Так як точка *A* лежить на кривій,то її координати задовольняють рівняння кривої, тобто

$$y = \frac{3\cdot 2 - 4}{2\cdot 2 - 3} = \frac{6-4}{4-3} = \frac{2}{1} = 2;\ \text{A}(2;\ 2)$$

Рівняння дотичної, проведеної до кривої в точці *A*(2; 2) має вигляд

$$y - 2 = k(x - 2)$$

Для знаходження кутового коефіцієнта дотичної знайдемо похідну:

$$y' = \frac{(2x-3)(3x-4)' - (3x-4)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3)3 - (3x-4)2}{(2x-3)^2} =$$

$$= \frac{6x - 9 - 6x + 8}{(2x-3)^2} = \frac{-1}{(2x-3)^2}\,.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної функції при $x = 2$:

$$k = y'(2) = \frac{-1}{(2\cdot 2-3)^2} = \frac{1}{(4-3)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y-2=-(x-2), \text{або } y-2=-x+2, \text{ тобто } x+y-4=0$$

Приклад 9. Скласти рівняння дотичної до графіка функції

$$y=\frac{2}{3}x^3-x^2-2x+3 \text{ в точці } A(3;6).$$

Розв’язок. Для знаходження кутового коефіцієнта дотичної знайдемо похідну даної функції:

$$y' = \frac{2}{3}\left(x^3\right)' - \left(x^2\right)' - 2x' + (3)'$$

$$y' = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 - 2x - 2 = 2x^2 - 2x - 2.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної функції при $x=3$:

$$k = y'(3) = 2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 2 = 18 - 6 - 2 = 10$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y-6=10(x-3) \text{ або } y-6=10x-30, \text{ тобто } 10x-y-24=0$$

Фізичний зміст похідної

Якщо тіло рухається по прямій за законом $S=S(t)$, то похідна шляху S за часом t дорівнює швидкості руху тіла в даний момент часу t:

$$V(t) = S_t' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Похідна функції $y=f(x)$ дорівнює швидкості зміни цієї функції при даному значенні аргумента x: $V(x) = y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Приклад 10. Закон руху точки по прямій задано формулою $S = t^3 - 3t^2 + 3t + 5.$ В який момент часу t швидкість руху точки дорівнює нулю?

Розв'язок. Швидкість прямолінійного руху точки дорівнює похідній шляху S за часом t:

$$V(t) = S' = 3t^2 - 6t + 3; \quad V(t) = 0$$

$$3t^2 - 6t + 3 = 0; \quad t^2 - 2t + 1 = 0;$$

$$(t-1)^2 = 0, \quad \text{звідси} \quad t = 1$$

Приклад 11. Закон руху точки по прямій задано формулою $S = 5t^3 - 3t^2 + 4.$ Знайти швидкість руху точки в кінці першої секунди.

Розв'язок. Швидкість руху точки в даний момент часу дорівнює похідній шляху S за часом t:

$$V(t) = S' = 15t^2 - 6t$$

$$V(1) = 15 - 6 = 9$$

Значить, швидкість руху точки в кінці першої секунди дорівнює 9 м/с.

ДРУГА ПОХІДНА

Похідною другого порядку (або ***другою похідною***) функції називається похідна від першої похідної $y' = f'(x)$:

$$y'' = (y')' \quad \text{або} \quad f''(x) = (f'(x))'.$$

Приклад 12. Знайти другу похідну функції $f(x) = tgx$

Розв'язок. Спочатку знайдемо першу похідну:

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{x'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Диференціюючи ще раз, знайдемо другу похідну:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{\left(\cos^2 x\right)'}{\left(\cos^2 x\right)^2} = -\frac{2\cos x\left(\cos x\right)'}{\cos^4 x} =$$

$$= -\frac{2\left(-\sin x\right)'}{\cos^3 x} = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

Приклад 13. Знайти другу похідну функції $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ і обчислити її значення при $x = 2$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо першу похідну:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)\left(x^2+1\right)' - \left(x^2+1\right)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{(x-1)2x - \left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Диференціюючи ще раз, знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x-1)^2\left(x^2-2x-1\right)' - \left(x^2-2x-1\right)\left((x-1)^2\right)'}{\left((x-1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2(2x-2) - \left(x^2-2x-1\right)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)\left[2(x-1)^2 - 2\left(x^2-2x-1\right)\right]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\left(x^2-2x+1-x^2+2x+1\right)}{(x-1)^3} = \frac{2\cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Обчислимо значення другої похідної при $x = 2$. Маємо

$$y''(2) = \frac{4}{(2-1)^3} = \frac{4}{1} = 4$$

Фізичний зміст другої похідної

Якщо тіло рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, то друга похідна шляху S за часом t дорівнює прискоренню руху тіла в даний момент часу t:

$$a(t) = V' = S''$$

Таким чином, перша похідна характеризує швидкість деякого процесу, а друга похідна — прискорення того ж процесу.

Приклад 14. Точка рухається по прямій за законом $S = t^3 - 5t^2 + 8t + 2$ (S — в метрах, t — в секундах). Знайти прискорення руху точки в кінці другої секунди.

Розв'язок. Спочатку знайдемо похідну шляху S за часом t:

$$S' = 3t^2 - 10t + 8$$

Прискорення прямолінійного руху точки дорівнює другій похідній шляху S за часом t:

$$a(t) = S'' = 6t - 10$$

$$a(2) = 6 \cdot 2 - 10 = 2$$

Прискорення руху точки в кінці другої секунди дорівнює $2 м/с^2$.

Приклад 15. Точка рухається по прямій за законом $S = t - \sin t$. Знайти швидкість і прискорення руху при $t = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язок. Швидкість руху тіла в даний момент часу дорівнює похідній шляху S за часом t, а прискорення — другій похідній шляху S за часом t: $V(t) = S'(t) = (t - \sin t)' = 1 - \cos t$,

$$\text{тоді} \quad V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 \text{ (м/с)},$$

$$a(t) = S'' = (1 - \cos t)' = -(-\sin t) = \sin t;$$

$$\text{значить} \quad a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Застосування похідної для дослідження функцій

Диференційована функція $y = f(x)$ зростає на проміжку *(а; в)*, якщо її похідна додатна в кожній точці цього проміжку.

Диференційована функція $y = f(x)$ спадає на проміжку *(а; в),* якщо її похідна від'ємна в кожній точці цього проміжку. Функція $y = f(x)$ має максимум в точці $x = x_1$ (рис. 4), якщо для всіх значень x, досить близько до x_1, виконується нерівність $f(x) < f(x_1)$ $x = x_1$ — точка максимуму; $y_{max} = f(x_1)$ — максимум функції.

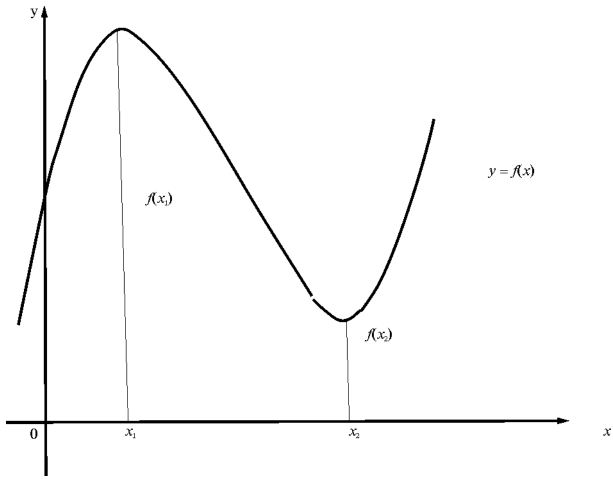

Рис. 4

Функція $y = f(x)$ має мінімум в точці $x = x_2$ (рис. 4), якщо для всіх значень x, досить близько x_2, виконується нерівність $f(x) > f(x_2)$; $x = x_2$ — точка мінімуму функції; $y_{\min} = f(x_2)$ — мінімум функції.

Точки максимуму і мінімуму називаються **точками екстремуму**, а значення функції в цих точках — **екстремальними**. Точки, в яких похідна функції перетворюється в нуль, називаються **критичними точками І роду**.

Перша достатня умова існування екстремуму функції.

Якщо при переході через критичну точку І роду $x = x_0$ похідна функції $y = f(x)$ міняє знак, то $x = x_0$ — точка екстремуму.

При цьому, якщо похідна міняє знак з плюса на мінус, то $x = x_0$ — точка максимуму, а $y_{max} = f(x_0)$. Якщо похідна міняє знак з мінуса на плюс, то $x = x_0$ — точка мінімуму, а $y_{min} = f(x_0)$.

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції $y = f(x)$ перетворюється в нуль, а друга похідна відмінна від нуля, то $x = x_0$ — точка екстремуму.

При цьому, якщо друга похідна в цій точці додатна ($f''(x_0) > 0$), то $x = x_0$ — точка мінімуму; якщо друга похідна в цій точці від'ємна ($f''(x_0) < 0$), то $x = x_0$ — точка максимуму.

Приклад 16. Число 36 представити у вигляді добутку двох таких додатних множників, щоб сума їх квадратів була найменшою.

Розв'язок. Нехай один з множників дорівнює x, тоді другий множник дорівнює $\frac{36}{x}$. Сума квадратів цих множників має вигляд:

$$S = x^2 + \frac{1296}{x^2}, \quad \text{де} \quad x > 0$$

Спочатку знайдемо похідну цієї функції:

$$S' = 2x - \frac{1296\left(x^2\right)'}{x^4} = 2x - \frac{1296 \cdot 2x}{x^4} = 2x - \frac{2592}{x^3} = \frac{2x^4 - 2592}{x^3}$$

Тепер знайдемо критичні точки І роду:

$$S' = 0; \quad \frac{2x^4 - 2592}{x^3} = 0; \quad 2x^4 - 2592 = 0; \quad x^4 = 1296;$$

$$x_1 = 6; x_2 = -6.$$

Ясно, що $x = -6$ не задовольняє умови, так як $x < 0$.

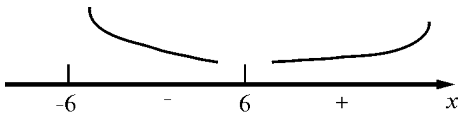

Рис. 5

Відмітимо межі області визначення і критичні точки I роду на числовій прямій (рис. 5).

Дослідимо знак похідної в околі точки $x = 6$; $S'(5) < 0$, $S'(7) > 0$. Так як при переході через критичну точку I роду $x = 6$ похідна функції S міняє знак з мінуса на плюс, то $x = 6$ — точка мінімуму. Значить, число 36 потрібно розкласти на два однакових множника: 6 і 6.

Приклад 17. У прямокутному листі картону довжиною 48 см і шириною 30 см вирізають в кутах однакові квадрати (рис. 6) і з залишкової частини склеюють відкриту прямокутну коробку. Яка повинна бути сторона квадратів, які вирізають, щоб об’єм коробки був найбільшим?

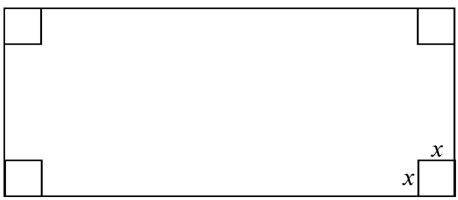

Рис. 6

Розв'язок. Нехай сторона квадратів, які вирізають дорівнює x см, тоді довжина коробки дорівнює $(48 - 2x)$ см, ширина $(30 - 2x)$ см, а висота x см.

Об’єм коробки дорівнює об’єму прямокутного паралелепіпеда, тобто добутку трьох його вимірів:

$$V = (48 - 2x)(30 - 2x)x = \left(1440 - 60x - 96x + 4x^2\right)x =$$

$$= 1440x - 156x^2 + 4x^3.$$

Дослідимо функцію V на екстремум. Для цього спочатку знайдемо похідну:

$$V' = 12x^2 - 312x + 1440,$$

а тоді знайдемо критичні точки I роду:

$$V' = 0; \quad 12x^2 - 312x + 1440 = 0;$$

$$x^2 - 26x + 120 = 0;$$

$$x = 13 \pm \sqrt{169 - 120} = 13 \pm \sqrt{49} = 13 \pm 7;$$

$$x_1 = 13 - 7 = 6; \quad x_2 = 13 + 7 = 20.$$

$x = 20$ — не задовольняє умови.

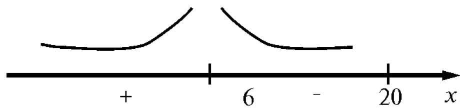

Рис. 7

Відмітимо ці точки на числовій прямій (рис. 7). Дослідимо знак похідної в околі точки $x = 6$; $V'(5) > 0$, $V'(7) < 0$. Тобто $x = 6$ — точка максимуму. Значить, об'єм коробки буде найбільший, якщо сторона квадратів, які вирізають, дорівнює *6см.*

Направлення опуклості і точки перегину кривої

Говорять, що на проміжку *(а; в)* крива повернута опуклістю вверх ($\cap$), якщо вона лежить нижче від дотичної, проведеної в любій її точці (рис. 8).

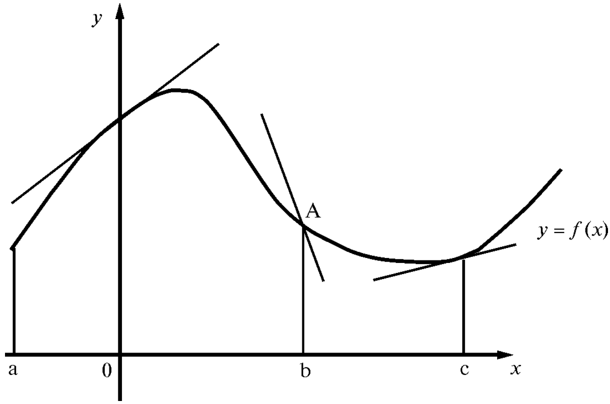

Рис. 8

Говорять, що крива на проміжку *(а; в)* опукла вниз (∪), якщо вона лежить вище від дотичної в любій її точці (рис. 8). Точка *А,* в якій змінюється направлення опуклості кривої, називається **точкою перегину** кривої (рис. 8).

Графік диференціюючої функції $y = f(x)$ являється ***опуклим вгору*** на проміжку *(а; в)*, якщо друга похідна функції від'ємна в кожній точці цього проміжку.

Графік диференціюючої функції $y = f(x)$ являється ***опуклим вниз*** на проміжку *(а; в)*, якщо друга похідна функції додатна в кожній точці цього проміжку.

Точки, в яких друга похідна функції перетворюється а нуль, називаються **критичними точками II роду**.

Якщо при переході через критичну точку II роду $x = x_0$, друга похідна функції міняє знак, то $x = x_0$ — абсциса точки перегину. Ордината точки перегину дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто $y_{m.n} = f(x_0); A(x_0; f(x_0))$ — точка перегину графіка функції $y = f(x)$.

Дослідження функції і побудова її графіків

Дослідження функції можна проводити за такою схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
3. Знайти проміжки монотонності і екстремуму функції.
4. Знайти направлення опуклості і точки перегину графіка функції.
5. Для уточнення графіка функції рекомендується знайти декілька додаткових точок із рівняння функції.

Приклад 18. Дослідити функцію і побудувати її графік $y = x^3 - 3x$.

Розв'язок. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x = R$

2) Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

$$OX: \begin{cases} y = 0; \\ x^3 - 3x = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0; \\ x\left(x^2 - 3\right) = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0; \\ x_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0; \\ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$OY: \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

3) Знаходимо екстремум функції. Для цього спочатку знайдемо похідну $y' = 3x^2 - 3$. Далі знайдемо критичні точки І роду:

$$y' = 0; \quad 3x^2 - 3 = 0;$$

$$x^2 = 1; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -1.$$

Відмітимо ці точки на числовій прямій (рис. 9). Дослідимо знак похідної в кожному проміжку: $y'(-2) > 0$; $y'(0) < 0$; $y'(2) > 0$.

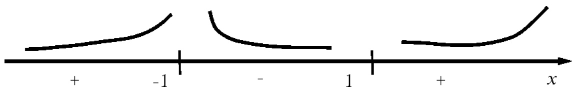

Рис. 9

Функція зростає при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає при $x \in (-1; 1)$.

Значить, $x = -1$ – точка максимуму;

$$y_{max} = y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2;$$

$x = 1$ — точка мінімуму; $y_{min} = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$.

4) Знаходимо направлення опуклості і точки перегину графіка функції. Для цього спочатку знайдемо другу похідну $y'' = 6x$, а тоді критичні точки ІІ роду: $y'' = 0$; $6x = 0; x = 0$. Відмітимо цю точку на числовій прямій (рис. 10). Дослідимо знак другої похідної в кожному проміжку: $y''(-1) < 0$; $y''(1) > 0$.

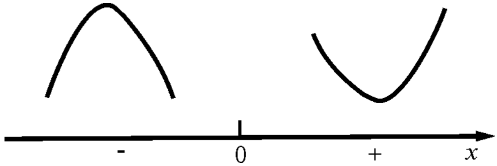

Рис. 10

Таким чином, графік являється опуклим вгору при $x\epsilon(-\infty;0)$ і опуклим вниз при $x\epsilon(0;+\infty)$; $x=0$ – абсциса точки перегину $y_{m.n}=y(0)=0$, O(0;0) — точка перегину графіка функції.

Відмітимо всі отримані точки в системі координат і з'єднаємо їх плавною кривою (рис. 11)

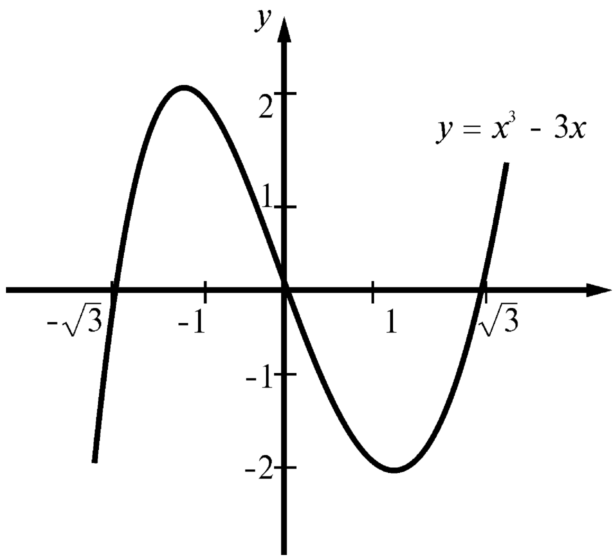

Рис. 11

Для уточнення графіка функції можна знайти додаткові точки, використовуючи рівняння функції $y(-2)=-2;\quad y(2)=2$.

Похідна та її застосування до розв'язування задач економічного змісту

Задача на продуктивність праці

Нехай функція U = U(t) виражає кількість виробничої продукції U за час t, і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_o.

За період часу від t_o до $t_o + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $U_o = U(t_o)$ до значення $U_o + \Delta U = U(t_o + \Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей термін $Z_{сер.} = \dfrac{\Delta U}{\Delta t}$.

Очевидно, що продуктивність праці в момент t_o можна визначити як граничне ставлення середньої продуктивності за період часу від t_o до $t_o + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто $Z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} z_{\text{сер.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_o)$.

Отже, похідна обсягу виробленої продукції за часом $U'(t_o)$ є **продуктивність праці в момент t_o. У цьому економічний зміст похідної.**

У практиці економічних досліджень широке застосування отримали виробничі функції, які використовують для встановлення залежності, випуску продукції від витрат ресурсів, витрат виробництва від обсягу продукції, виторгу від проданого товару і т.д. Тобто, коли функція моделює деякий економічний процес, то похідна характеризує його граничний ефект.

Розглянемо конкретні приклади використання похідної.

Задачі про маргінальні вартість, дохід, прибуток.

Маргінальними витратами називають гранично можливі витрати в умовах хоча би постійного відтворення виробництва відповідної продукції. Аналогічно визначають маргінальні доходи та прибуток.

Позначимо через $V(x)$, $D(x)$ та $P(x)$ витрати, дохід та прибуток виробництва **x** одиниць продукції. Кожна з цих величин є певною функцією кількості одиниць ***x*** виробленої та проданої продукції.

Якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, то ці функції одержать приріст:

$$\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x);$$

$$\Delta D(x) = D(x + \Delta x) - D(x);$$

Відношення приросту функції до Δx характеризує приріст відповідної функції на одиницю приросту продукції, а границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ стає ***маргінальною***.

Отже, маємо:
Маргінальна вартість:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} = V'(x).$$

Маргінальний дохід:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{D(x+\Delta x)-D(x)}{\Delta x} = D'(x)$$

Маргінальний прибуток:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x} = P'(x).$$

Приклад 1. Для функції витрат підприємства (у гривнях)

$$V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$$

знайти маргінальну вартість як функцію x та обчислити маргінальну вартість, коли вироблено $x_1 = 50$; $x_2= 100$; $x_3 = 150$ одиниць продукції.

Розв'язок. Для знаходження маргінальної вартості потрібно знайти похідну функції витрат, тобто

$$V'(x) = (0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000)' = 3\cdot 0{,}001x^2 - 2\cdot 0{,}3x + 40 =$$
$$= 0{,}003x^2 - 0{,}6x + 40.$$

Одержали функцію маргінальної вартості для довільної кількості x виготовлених одиниць продукції, коли приріст x зростає на достатньо малу величину.

При $x_1 = 50$, одержимо

$$V'(50) = 0{,}003\cdot(50)^2 - 0{,}6\cdot 50 + 40 = 7{,}5 - 30 + 40 = 17{,}5.$$

При $x_2 = 100$, маємо

$$V'(100) = 0{,}003\cdot(100)^2 - 0{,}6\cdot 100 + 40 = 30 - 60 + 40 = 10.$$

Коли $x_3 = 150$, тоді

$$V'(150) = 0{,}003\cdot(150)^2 - 0{,}6\cdot 150 + 40 = 67{,}5 - 90 + 40 = 17{,}5.$$

Отже, можна казати, що вартість виготовлення 51-ої та 151-ої одиниць продукції підприємства буде 17 гривень 50 копійок, а вартість 101-ої одиниці буде лише 10 гривень.

Приклад 2. Для функції витрат виробництва x одиниць продукції (у гривнях) вигляду

$$V(x) = 1000 + 10x + 0{,}1x^2$$

знайти маргінальну вартість та середню вартість виробництва одного виробу підприємства.

Розв'язок. Маргінальна вартість виробництва буде:

$$V'(x) = 10 + 0{,}2x$$

Середня вартість виготовлення одиниці продукції буде:

$$V'(x) = \frac{V(x)}{x} = \frac{1000}{x} + \frac{10x}{x} + \frac{0{,}1x^2}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0{,}1x$$

Неважко бачити, що ці величини зовсім різні.

Приклад 3. Визначити маргінальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів знаходиться за формулою:

$$X = 1000 - 100p,$$

де p — роздрібна вартість одного виробу.

Розв'язок. Спочатку визначимо роздрібну вартість p одиниці виробу як функцію кількості х, виготовлених виробів. Із заданої рівності

$$X = 1000 - 100\text{р} \Rightarrow 100p = 1000 - x \Rightarrow p = 10 - 0{,}01x.$$

Функція доходу буде:

$$D(x) = x \cdot p = x\,(10 - 0{,}01x) = 10x - 0{,}01x^2.$$

Для знаходження маргінального доходу при $x = 300$ потрібно знайти значення $D'(x)$ при $x = 300$. Шляхом диференціювання функції D(x) одержимо:

$$D'(x) = 10 - 0{,}02x.$$

Отже, маємо

$$D'(300) = 10 - 0{,}02 \cdot 300 = 10 - 6 = 4.$$

Приклад 4. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них — p, причому $p + 0{,}1x = 80$, а функція витрат $V(x) = 5000 + 2x$ (у гривнях). Знайти маргінальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

Розв'язок. У даному випадку функцією доходу буде

$$D(x) = x \cdot p = x(80 - 0{,}1x) = 80x - 0{,}1x^2.$$

Прибуток від виготовлення та продажу X виробів буде:

$$P(x) = D(x) - V(x) = 80x - 0{,}1x^2 - (5000 + 20x) =$$
$$= 60x - 0{,}1x^2 - 5000.$$

Знайдемо маргінальний прибуток для довільного X:

$$P'(x) = (60x - 0{,}1x^2 - 5000)'; \; P'(x) = 60 - 0{,}2x.$$

Тому для $x = 150$ та $x = 400$ одержимо:

$$P'(150) = 60 - 0{,}2 \cdot 150 = 30;$$
$$P'(400) = 60 - 0{,}2 \cdot 400 = -20.$$

Отже, підприємство буде мати збитки розміром 20 гривень за кожний вибір, який буде виготовлено та продано при зростанні кількості виробів.

Приклад 5. (прибуток та реклама).

Мале підприємство може виготовити та продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень. Якщо підприємство витрачає x гривень на рекламу виробів, тоді кількість проданих виробів дорівнює $1000(1 - e^{-0{,}001x}) - x$. Знайти швидкість зміни прибутку, відносно зміни витрат за рекламу при $x = 1000$ та $x = 3000$.

Розв'язок. Оскільки кожен виріб дає 10 гривень прибутку, тому задана кількість проданих виробів дає прибуток:

$$\mathrm{P} = 10000(1 - e^{-0{,}001x}) - x$$

з урахуванням витрат на рекламу. Швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу знайдено шляхом диференціювання P:

$$P' = -10000(e^{-0{,}001x})' - 1 = -10000(-0{,}001)e^{-0{,}001x} - 1 = 10e^{-0{,}001x} - 1.$$

При $x = 1000$ та $x = 3000$ маємо:

$$p'(1000) = 10 \cdot e^{-1} - 1 = 10 \cdot 0{,}3679 - 1 = 2{,}679.$$
$$p'(3000) = 10 \cdot e^{-3} - 1 = 10 \cdot 0{,}0498 - 1 = -0{,}502.$$

Отже, при витратах на рекламу 3000 гривень прибутки спадають.

ЗАПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте визначення похідної функції.
2. В чому полягає геометричний зміст похідної?
3. В чому полягає фізичний зміст першої похідної?
4. Дайте визначення другої похідної функції.
5. В чому полягає фізичний зміст другої похідної?
6. Напишіть всі формули диференціювання.
7. Як знайти проміжки зростання і спадання функції?
8. Як знайти точки екстремуму і екстремуми функції?
9. Як знайти проміжки опуклості кривої?
10. Як знайти точки перегину кривої?
11. Знайдіть похідні функції:

    а) $y = lntg\left(x/2\right);$

    б) у = $cos\sqrt{x}$;

    в) $y = \left(x+1\right)^2 \sqrt{x-1};$

12. Складіть рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 4x$ в точці з абсцисою $x = 1$.

13. Прямолінійний рух точки задано рівнянням $S = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t$ (S — в метрах, t — в секундах). Знайдіть швидкість і прискорення руху точки в кінці другої секунди.

14. Який із прямокутників з периметром, що дорівнює 48 см, має найбільшу площу?

15. Число 66 представте у вигляді суми двох додатних доданків так, щоб добуток цих чисел був найбільший.

16. Обсяг продукції, що виробляється працівниками підприємства, описується рівнянням $X(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 5t + 7$, де t — робочий час (у гривнях) ($0 \le t \le 8$). Обчисліть продуктивність праці фірми через 3 год. від початку роботи.

Відповіді: 11) а) cosec x; б) $-\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{5x^2 + 2x - 3}{2\sqrt{x-1}}$.
12) $2x + y + 1 = 0$. 13) 3 м/с; 2 м/с^2. 14) Квадрат зі стороною 12 см. 15) 33 і 33. 16) 2 од. за годину.

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

За даною темою спочатку вивчіть § 5 (1—3), 6 (1; 2) гл. 2 [2] або § 1—6 гл. 7 [9]. Далі познайомтесь з методичними вказівками з цієї теми і уважно розберіть розв'язки прикладів з даного посібника. Дайте відповідь на запитання і виконайте вправи для самоперевірки. Розв'яжіть наступні задачі: [2] гл. 2 № 2. 4 (1—14; 26; 33—54) або [9] гл. 7 № 1—9; 33—36; 37—51.

З контрольної роботи виконайте третє завдання свого варіанту.

Поняття невизначеного інтеграла

Диференціювання — це дія, за допомогою якої за даною функцією знаходять її похідну або диференціал. Наприклад, якщо $F(x) = x^{10}$, то $F'(x) = 10x^9$; $dF(x) = 10x^9 dx$.

Інтегрування — це дія, обернена диференціюванню. За допомогою інтегрування за даною похідною чи диференціалом функції знаходиться сама функція. Наприклад, якщо $F'(x) = 7x^6$, то $F(x) =$ $= x^7$, тому, що $\left(x^7\right)' = 7x^6$. Диференційована функція $F(x)$, $x \in$ $(a; в)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на проміжку $(a; в)$, якщо $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a; в)$.

Для функції $f(x)$ $= \dfrac{1}{cos^2 x}$ первісною є функція $F(x) = \operatorname{tg} x$, тому що $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Сукупність всіх первісних функцій $f(x)$ на проміжку *(a; в)* називають **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на цьому інтервалі і пишуть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C .$$

Тут $f(x)dx$ — підінтегральний вираз; $f(x)$ — підінтегральна функція; x — змінна інтегрування; C — довільна стала. Наприклад, $\int 5x^4dx = x^5 + C,$ тому, що $(x^5 + C)' = 5x^4$.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції плюс довільна стала, тобто:

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

3. Постійний множник можна винести за знак невизначеного інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної функції:

$$\int \left(f(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx\ .$$

Основні формули інтегрування (табличні інтеграли)

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.

3. $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Якщо інтеграл важко привести до табличного за допомогою елементарних перетворень, то в цьому випадку користуються методом підстановки.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}$

Розв'язок. Зробимо підстановку: $2-3x^2 = t$, тоді $-6xdx = dt$; $xdx = -\frac{1}{6}dt$.

Далі отримаємо:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int \frac{-(1/6)\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{-1}{6}\int t^{\frac{-1}{2}} dt = \frac{-1}{6}\,\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C = \frac{-1}{6}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{-1}{3}\sqrt{t} + C = \frac{-1}{3}\sqrt{2-3x^2} + C$$

Приклад 2. Знайти $\int (2+\cos x)^2 \sin x dx$.

Розв'язок. Зробимо заміну: $2+\cos x = t$; тоді $-\sin x dx = dt$, звідси $\sin x dx = -dt$. Далі отримаємо:

$$\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = \int t^2\,(-dt) = -\int t^2 dt = \frac{-t^{2+1}}{2+1} + C = \frac{-t^3}{3} + C =$$

$$= -\frac{(2+\cos x)^3}{3} + C = \frac{-1}{3}(2+\cos x)^3 + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \sin 10x dx$.

Розв'язок. Зробимо заміну: $10x = t$; тоді $10dx = dt$, звідси $dx = \frac{dt}{10}$.

Далі, отримаємо:

$$\int \sin 10x dx = \int \sin t \frac{dt}{10} = \frac{1}{10}\int \sin t dt = \frac{1}{10}(-\cos t) + C =$$

$$= \frac{-1}{10}\cos t + C = -\frac{1}{10}\cos 10x + C.$$

В практиці інтегрування часто зустрічаються інтеграли, для знаходження яких можна використовувати наступні формули $(k \neq 0, n \neq 0 - \text{сталі})$:

1. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$.
2. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$.
3. $\int \sin kx dx = \frac{-1}{k} \cos kx + C$.
4. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = \frac{-1}{k} \operatorname{ctg} kx + C$.
7. $\int \frac{dx}{k^2 + n^2x^2} = \frac{1}{nk} \operatorname{arctg} \frac{n}{k} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{k} x + C$.

При знаходженні $\int \sin 10x dx$ можна використовувати формулу $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$, де $k = 10$. Тоді

$$\int \sin 10x dx = \frac{-1}{10} \cos 10x + C.$$

ЗАПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається інтегруванням?
2. Яка функція називається первісною для функції $f(x)$?
3. Дайте визначення невизначеного інтеграла.
4. Перелічіть основні властивості невизначеного інтеграла.
5. Якою дією можна перевірити інтегрування?
6. Напишіть основні формули інтегрування (табличні інтеграли).
7. Знайти інтеграли:

   a) $\int \frac{2dx}{x^5}$; c) $\int \sin^3 x \cos x dx$;

   b) $\int \frac{x^2 dx}{\left(3x^3 - 4\right)^2}$; d) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$.

Відповіді: 7. a) $\frac{-1}{2x^4} + C$; b) $\frac{1}{9\left(4 - 3x^3\right)} + C$; c) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$;

d) $\frac{1}{3}\ln^3 x + C$.

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

З даної теми спочатку вивчіть § 7—10 (1; 2), 11 (1; 2) гл. 3, § 12,14 (1—3) гл. 4 [2] або § 1—14 гл. 8 [9]. Далі ознайомтесь з методичними вказівками з цієї теми і уважно розберіть приклади з даного посібника. Дайте відповіді на запитання і виконайте вправи для самоперевірки. Розв'яжіть наступні задачі: [2] гл. 3 § 10 № 3.5—3.8; 3.12, гл. 4 § 12 № 4.1, §14 №4.3—4.29 або [9], гл. 8 №1—5, 8—13, 17—21, 23—27, 42—49, 50—55, 60—63.

З контрольної роботи виконайте третє і четверте завдання свого варіанту.

Поняття визначеного інтеграла

Безпосереднє обчислення визначеного інтеграла виконується за формулою Ньютона—Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$, де a — нижня границя, b — верхня границя, $F(x)$ — яка-небудь первісна функції $f(x)$.

З цієї формули видно порядок обчислення визначеного інтеграла:

1) знаходять одну з первісних $F(x)$ даної функції;

2) знаходять значення $F(x)$ при $x = a$ і $x = b$;

3) обчислюють різницю $F(b) - F(a)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл: $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язок: використаємо означення степеня з дробовим і від'ємним показником і обчислимо визначений інтеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{\frac{-2}{3}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 = 3\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

Основні властивості визначеного інтеграла

1. При перестановці меж інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Відрізок інтегрування можна розбивати на частини:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Інтеграл від суми функції дорівнює сумі інтегралів від всіх доданків:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{cos^2 x} - sinx\right)dx.$

Розв'язок: інтеграл від різниці функцій замінимо різницею інтегралів від кожної функції:

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \operatorname{tg} x\Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x\Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 1 - (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

Обчислення визначеного інтеграла методом підстановки

Обчислення визначеного інтеграла методом підстановки виконується за схемою:

1. Частину підінтегральної функції замінити новою змінною;
2. Знайти нові межі визначеного інтеграла;
3. Знайти диференціал від обох частин заміни;
4. Весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну (після чого повинні отримати табличний інтеграл);
5. Обчислити отриманий визначений інтеграл.

Приклад 3. Обчислити інтеграл: $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$.

Розв'язок: введемо підстановку $8-x=t$, тоді $-dx=dt$, $dx=-dt$. Визначимо межі інтегрування для змінної t. При $x=0$ отримуємо $t_н=8-0=8$, при $x=7$ отримуємо $t_в=8-7=1$.

Виразивши підінтегральний вираз через t і dt і перейшовши до нових меж, отримуємо:

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \int_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int_8^1 t^{\frac{-1}{3}}dt = \int_1^8 t^{\frac{-1}{3}}dt = \left.\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_1^8 = \left.\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\right|_1^8 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64}-1\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(4-1) = \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2} = 4,5$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2}$.

Розв'язок: зробимо підстановку $x^3+2=t$, тоді $3x^2dx=dt$, $x^2dx=\frac{dt}{3}$. Визначимо межі інтегрування для змінної t. При $x=1$, отримуємо $t_н=1^3+2=3$, при $x=2$, отримуємо $t_В=2^3+2=10$.

Виразивши підінтегральний вираз через t і dt і перейшовши до нових границь, отримуємо:

$$\int_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2} = \int_3^{10} \frac{\frac{dt}{3}}{t^2} = \frac{1}{3}\int_3^{10} t^{-2}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-1}}{-1}\bigg|_3^{10} = \frac{-1}{3}\frac{1}{t}\bigg|_3^{10} = \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{-7}{30}\right) = \frac{7}{90}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin xdx.$

Розв'язок: зробимо заміну: $\cos x = t$, тоді $-\sin xdx = dt$ і $\sin xdx = -dt$. Знайдемо межі інтегрування для змінної t: $t_н = \cos 0 = 1$, $t_в = \cos(\pi/2) = 0$.

Виразивши підінтегральний вираз через t і dt і перейшовши до нових границь, отримаємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin xdx = \int_1^0 \sqrt{t}\,(-dt) = -\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\left(1-\cos x\right)^3}.$

Розв'язок:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\left(1-\cos x\right)^3} = \left| \begin{array}{l} 1-\cos x = t; \sin xdx = dt; \\ t_н = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1-0 = 1; \\ t_в = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^2 \frac{dt}{t^3} = \int_1^2 t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2t^2}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$

Розв'язок. Спочатку перетворимо підінтегральний вираз:

$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x = \sin x - \cos^2 x \sin x.$

Далі обчислимо інтеграл від різниці функцій, якщо замінимо його різницю визначених інтегралів від кожної функції:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx.$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -(0-1) = 1;$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = \left|\begin{array}{l} \cos x = t; -\sin x dx = dt; \\ \sin x dx = -dt; \\ t_н = \cos 0 = 1; \\ t_в = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right| = \int\limits_1^0 t^2(-dt) = -\int\limits_1^0 t^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

Застосування визначеного інтеграла.

Поняття визначеного інтеграла широко застосовується для обчислення різних геометричних, фізичних і економічних величин.

Площа плоскої фігури.

Площа криволінійної трапеції aABb (рис. 12), яка обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$, де $x \in [a;b]$, відрізком $[a;b]$ осі OX, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, обчислюється за форму-

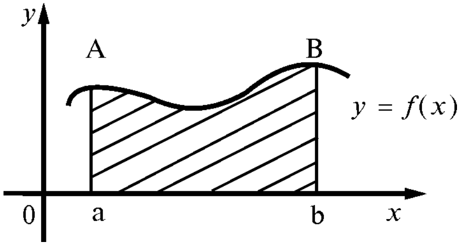

Рис. 12

лою $S = |I|$, де

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Приклад 8. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y = x^2$, прямими $x = -1, x = 2$ і віссю абсцис (рис. 13)

Розв'язок. Застосовуючи формулу (1), обчислюємо:

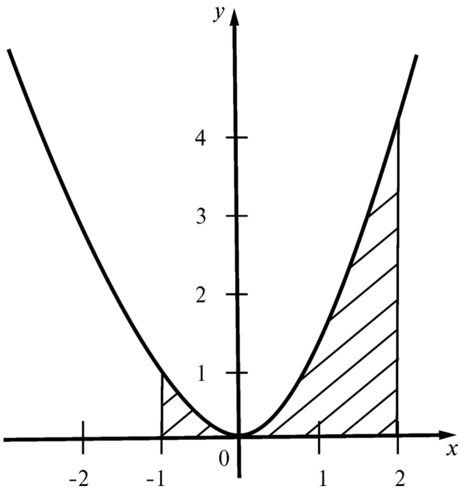

Рис.13

$$I = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\big(8-(-1)\big) = \frac{1}{3}9 = 3,$$

тобто $S = 3$ кв. од.

Площа фігури $ABCD$ (рис. 14), яка обмежена графіками неперервних функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $x \in [a;b]$, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою $S = |I|$, де

$$I = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx \qquad (2)$$

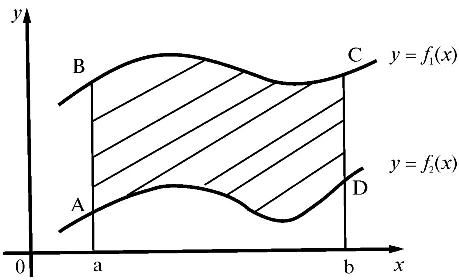

Рис. 14

Приклад 9. Обчислити площу фігури, яка обмежена віссю OX і лінією $y = x^2 - 2x$ (рис. 15).

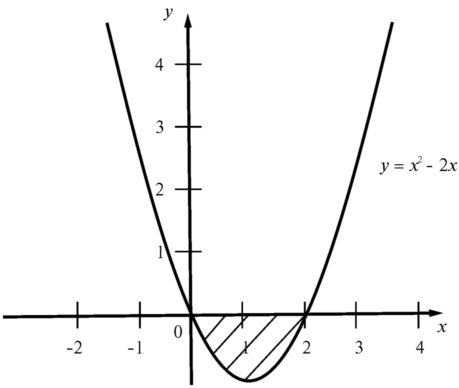

Рис. 15

Розв'язок. Знайдемо межі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y = x^2 - 2x$ і $y = 0$ (вісь OX). Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 - 2x = 0; \\ x = 0; \end{matrix} \quad \begin{matrix} x(x-2) = 0; \\ x = 2. \end{matrix}$$

Тепер знайдемо площу:

$$I = \int_0^2 (x^2 - 2x - 0)\,dx = \int_0^2 x^2 dx - 2\int_0^2 x dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(8-0) - (4-0) = \frac{8}{3} - 4 = -1\frac{1}{3}; \qquad S = 1\frac{1}{3} \text{ кв. од.}$$

Приклад 10. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$ і $y^2 = x$ (рис. 16).

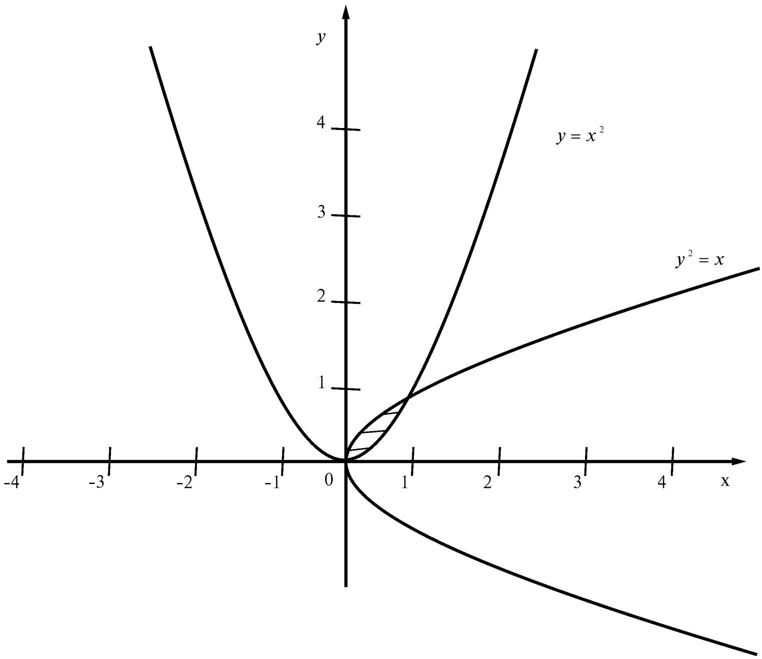

Рис. 16

Розв'язок. Знайдемо межі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y^2 = x$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}; \qquad x^4 = x; \qquad x\left(x^3 - 1\right) = 0;$$

$$x = 0; \qquad x = 1.$$

Шукану площу обчислимо за формулою (2) при $f_1\left(x\right) = x^2$, $f_2\left(x\right) = \sqrt{x}$.

$$I = \int_0^1 \left(x^2 - \sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 =$$

$$\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}; \quad S = \frac{1}{3} \text{ кв.од.}$$

Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX криволінійної трапеції aABb, обмеженої неперервною кривого $y = f\left(x\right)$, де $x \epsilon \left[a; b\right]$ відрізком $\left[a; b\right]$ осі OX, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (рис. 17), обчислюється за формулою:

$$V = \pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx \tag{3}$$

Приклад 11. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, яка обмежена параболою $y^2 = 2x$, прямою $x = 3$ і віссю OX (рис. 18).

Розв'язок: Застосовуючи формулу (3), знаходимо шуканий об'єм:

$$V = \pi\int_0^3 2x dx = 2\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \pi x^2\Big|_0^3 = \pi\left(9 - 0\right) = 9\pi \text{ (куб. од.)}$$

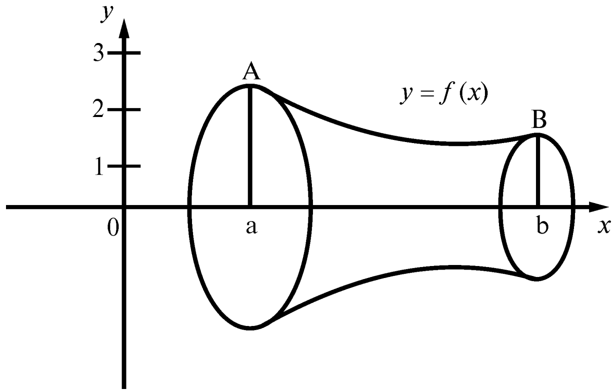

Рис. 17

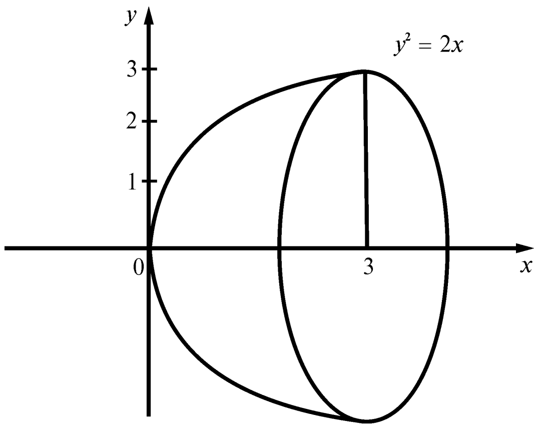

Рис. 18

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* криволінійної трапеції aABb, обмеженої неперервною кривою $x = f(y)$, де $y \in [a;b]$, відрізком $[a;b]$ осі *Oy*, відрізками прямих $y = a$ і $y = b$ (рис. 19), обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)\,dy \tag{4}$$

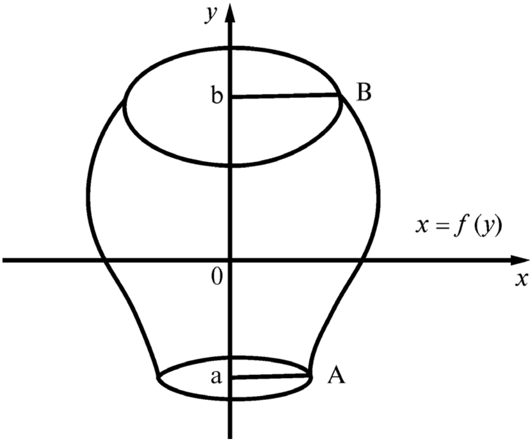

Рис. 19

Приклад 12. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = 4$ (рис. 20).

Розв'язок. Застосовуючи формулу (4), знаходимо шуканий об’єм:

$$V = \pi \int_0^4 y dy = \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^4 = \frac{\pi}{2}(16-0) = 8\pi \quad \text{(куб. од.)}$$

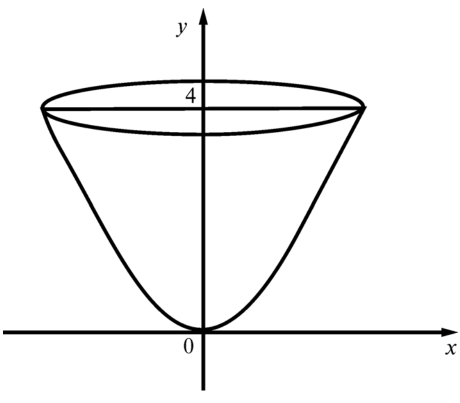

Рис. 20

Шлях, пройдений точкою

Якщо точка рухається прямолінійно і її швидкість $V = f(t)$ є відома функція часу *t*, то шлях, пройдений точкою за проміжок часу $[t_1, t_2]$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \tag{5}$$

Приклад 13. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $V = 0{,}1t^3$ м/с.

Знайти шлях, пройдений тілом за перші 10 с.

Розв'язок. Застосовуючи формулу (5), знаходимо шуканий шлях:

$$S = \int_0^{10} 0{,}1t^3\,dt = \frac{1}{10}\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10} = \frac{1}{40}10^4 = 250\,(\text{м}).$$

Робота сили

Якщо змінна сила $F = F(x)$ діє в напрямку осі *OX*, то робота сили на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \tag{6}$$

Приклад 14. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 0,06 м, якщо сила в *1Н* розтягує її на 0,01 м?

Розв'язок. Згідно закону Гука сила *F,* яка розтягує або стискає пружину на *х м*, дорівнює *F* = *kx,* де *k* — коефіцієнт пропорційності.

З умови випливає:1 = *k* · 0,01, тобто *k* = 100 і, відповідно, *F* = = 100*x.* Шукану роботу знаходимо за формулою (6):

$$A = \int_0^{0{,}06} 100x\,dx = 100\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}06} = 50 \cdot 0.0036 = 1{,}8 \ \ (\text{Дж})$$

Приклад 15. Сила в 196,2 *Н* розтягує пружину на 18 *см*. Яку роботу вона виконує?

Розв'язок. За законом Гука $F = kx$, звідки $k = \frac{F}{x} = \frac{196,2}{0,18} = 1090.$

Значить, $F = 1090x$. Знаходимо шукану роботу:

$$A = \int_0^{0,18} 1090x dx = \frac{1090}{2} x^2 \Big|_0^{0,18} \approx 545 \cdot 0,0324 \approx 17,7 \text{ (Дж)}.$$

Економічний зміст визначеного інтеграла

Витрати, дохід та прибуток. Нехай $V(x)$ — функція загальних витрат на виробництво X одиниць продукції. $V'(x)$ — функція маргінальних витрат. Тоді визначений інтеграл

$$\int_a^b V'(x) dx = V(x) \Big|_a^b = V(b) - V(a) \qquad (1)$$

дорівнює зміні загальних витрат при зростанні кількості виробленої продукції від a до b одиниць.

Звідси випливає **важливий наслідок**._Зміна виробничих витрат при зростанні виробленої продукції від a до b одиниць дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції маргінальних витрат $y = V'(x)$, відрізком [a; b] та прямими $x = a$ і $x = b$.

Аналогічно, якщо $D'(x)$ та $P'(x)$ — функції маргінального доходу та прибутку, відповідно, то зміни доходу та прибутку при зростанні реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюється за формулами

$$\int_a^b D'(x) dx = D(b) - D(a); \qquad (2)$$

$$\int_a^b P'(x) dx = P(b) - P(a) \qquad (3)$$

Приклад 1. Нехай граничний дохід за реалізацію продукції сталий і для конкретності D(x) = 10 грн., де x — кількість проданих одиниць продукції. Визначте дохід від продажу 1500 одиниць продукції.

Розв’язок: Маємо,

$$D = 10 \cdot 1500 = 15000 \text{ грн.}$$

З іншого боку, виходячи з означення граничного прибутку і первісної функції,

$$D = \int_0^{1500} 10dx = 10x\Big|_0^{1500} = 10\cdot 1500 = 15000 \text{ грн.}$$

Обчислення загального доходу через визначений інтеграл є більш загальним, оскільки граничний ефект, як правило, залежить від *X*.

Приклад 2. Функція маргінальних витрат фірми має вигляд:

$$V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x.$$

Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

Розв'язок: За формулою (1) зростання загальних витрат буде

$$\int_{1000}^{1500} V'(x)\,dx = \int_{1000}^{1500} (23{,}5 - 0{,}01x)\,dx = \left(23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1000}^{1500} =$$

$$= 23{,}5\cdot 1500 - 0{,}01\cdot\frac{(1500)^2}{2} - (23{,}5\cdot 1000 - 0{,}01\cdot\frac{(1000)^2}{2}) =$$

$$= 35250 - 11250 - (23500 - 5000) = 5500.$$

Отже, витрати зростуть на 5500 гривень.

Максимізація прибутку за часом. Нехай $V(t)$, $D(t)$ та $P(t)$ — загальні витрати, дохід та прибуток, що змінюються за часом, тобто залежить від часу *t*. Тоді $P(t) = D(t) - V(t)$ або

$$P'(t) = D'(t) - V'(t).$$

Максимум загального прибутку буде тоді, коли $P'(t) = 0$ або $D'(t) = V'(t)$.

Іншими словами, існує такий час t_1, коли $D'(t) = V'(t)$, тобто швидкості зміни дохода та витрат рівні. Загальний прибуток за час t_1 можна знайти за формулою:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} P(t)\,dt = \int_0^{t_1} \left[D'(t) - V'(t)\right]dt \qquad (4)$$

Приклад 3. Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності визначалися формулами $V'(t) = 5 + 2t^{2/3}$

та $D'(t) = 17 - t^{2/3}$, де V і D вимірюються мільйонами гривень, а t вимірювали роками. Визначити, як довго підприємство було прибутковим та знайти загальний прибуток, який було одержано за цей час.

Розв'язок: Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$:

$17 - t^{2/3} = 5 + 2t^{2/3} \Rightarrow 3t^{2/3} = 12 \Rightarrow t^{2/3} = 4;\ t = 4^{3/2} \Rightarrow t_1 = 8.$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час було одержано прибутку

$$\text{P} = \int_0^8 \left[D'(t) - V'(t)\right]dt = \int_0^8 \left[17 - t^{2/3} - 5 - 2t^{2/3}\right]dt = \int_0^8 (12 - 3t^{2/3})dt =$$

$$= \left(12t - \frac{9}{5}t\sqrt[3]{t^2}\right)\Bigg|_0^8 =$$

$$= 12 \cdot 8 - \frac{9}{5} \cdot 8 \cdot 4 = 96 - 57{,}6 = 38{,}4 \text{ (млн. грн.).}$$

? ЗАПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте визначення визначеного інтеграла.
2. Перелічіть основні властивості визначеного інтеграла.
3. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
4. Напишіть формули для знаходження площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла.
5. За якими формулами знаходять об'єм тіла обертання?
6. Напишіть формули для обчислення шляху, пройденого тілом.
7. Напишіть формули для обчислення роботи змінної сили.
8. Наведіть приклади застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач економічного змісту.
9. Обчисліть визначені інтеграли:

$$a)\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx; \qquad б)\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}; \qquad в)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2}.$$

10. Обчисліть площу фігури, яка обмежена лініями:

$a)\ y = x^2 - 1; \quad y = 0; \quad x = 0;$

$б)\ y = x^2 \quad і \quad y = x.$

11. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *ОХ* фігури, яка обмежена лініями: $y = \frac{1}{x}$; $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$.

12. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *ОУ* фігури, яка обмежена лініями: $x = \sqrt{y-1}, y = 2; y = 5; x = 0.$

13. Тіло рухається по прямій зі швидкістю V = ($2t^2$ + t) м/с. Обчисліть шлях, пройдений тілом за перші 6*с.*

14. Сила в 98,1 *Н* розтягує пружину на 12 см. Яку роботу вона виконує?

15. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни наближено визначається формулою $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$, де t — робочий час у годинах. Визначити об'єм продукції, виготовленої бригадою за п'яту робочу годину.

Відповіді: 9. а) 63/8; б) 3; в)3/8. 10. а) 2/3 кв.од.; б) 1/6 кв.од. 11. *П/6* куб.од. 12. 7,5 куб.од. 13. 162 м. 14. 5,886 Дж. 15. ≈ 171 од.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

З даної теми спочатку вивчіть § 24—30 гл. 8 [2], або § 1, 2 гл. 10 [9]. Далі ознайомитесь з методичними вказівками з цієї теми і уважно розберіть розв'язки прикладів з даного посібника. Дайте відповіді на запитання і виконайте вправи для самоперевірки. Розв'яжіть наступні задачі: [2] гл. 8 § 24 № 8.1 — № 8.8 або [9] гл. 10 № 1 — № 26.

Поняття про диференціальне рівняння

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну (або диференціал аргументу і диференціал функції).

Якщо диференціальне рівняння має похідну або диференціал не вище першого порядку, то воно називається **диференціальним рівнянням першого порядку**. Загальний вид такого рівняння $F = (x;\ y;\ y') = 0$. **Загальним розв'язком** диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x,\ c)$ від x і довільної сталої C, яка перетворює це рівняння в тотожність. **Загальний розв'язок**, записаний у неявному виді $\varphi(x;\ y;\ c) = 0$ називається **загальним інтегралом**.

Частинним розв'язком рівняння $F(x;y;y')=0$ називається розв'язок, який отримують із загального розв'язку при фіксованому значенні $C: y=\varphi(y;C_0)$, де C_0 — фіксоване число.

Частинним інтегралом рівняння $F(x;y;y')=0$ називається інтеграл, який отримують із загального розв'язку при фіксованому значенні C: $y=\varphi(y;C_0)$.

Графік любого частинного розв'язку диференціального рівняння $F(x;y;y')=0$ називається **інтегральною кривою**. Загальному розв'язку (і загальному інтегралу) цього рівняння відповідає сімейство інтегральних кривих, які залежать від одного параметра C.

Приклад 1. Скласти рівняння кривої $y = f(x)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена в любій точці кривої, дорівнює $2x$.

Розв'язок. Так як на основі геометричного змісту похідної $y' = k_{дот.}$, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку: $y' = 2x$; $\frac{dy}{dx} = 2x$; $dy = 2xdx$.

Щоб знайти шукану функцію $y = f(x)$, потрібно проінтегрувати обидві частини рівняння: $\int dy = \int 2xdx$. Звідси отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = x^2 + C$. Геометрично цей розв'язок представляє собою сімейство парабол (рис. 21) з вершиною на осі OY, симетричних відносно цієї осі.

Щоб із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, потрібно задати початкові умови. Нехай $y = -1$ при $x = 1$; тоді загальний розв'язок прийме вигляд $-1 = 1 + C$, звідси $C = -2$.

Геометрично частинний розв'язок $y = x^2 - 2$ представляє собою параболу, яка проходить через точку $(1, -1)$ (рис. 21).

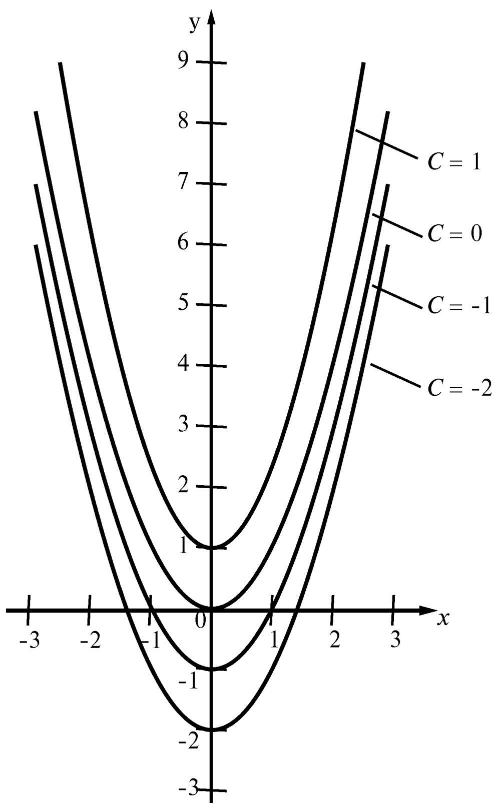

Рис. 21

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Загальний вид такого рівняння

$$X(x)\cdot Y(y)dx + X_1(x)\cdot Y_1(y)dy = 0,$$

де $X(x), X_1(x)$ функції від *x,* $Y(y), Y_1(y)$ — функції тільки від *y*.

Якщо розділити обидві частини рівняння на добуток $X_1(x)\cdot Y(y) \neq 0$, то отримаємо рівняння з розділеними змінними:

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0.$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = C.$$

Зауваження. Якщо добуток $X_1(x)\cdot Y(y)dx = 0$, при $x = a$ і $y = b$, то ці функції $x = a$ і $y = b$ являються розв’язком диференційного рівняння при умові, що при цих значеннях *x* і *y* рівняння не губить числового смислу. Геометрично ці розв'язки представляють собою прямі, паралельні осям координат.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $y' = \frac{xy}{x^2+1}$. Знайти частинний розв'язок, який задовольняє умови $y = 3$ при $x = 2\sqrt{2}$.

Розв'язок. Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1}$ звідси $(x^2+1)dy =$ $= xydx$. Розділимо обидві частини рівняння на добуток $y(x^2+1)$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2+1}$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{xdx}{x^2+1};\quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|C_1|$$

Після потенціювання отримаємо розв'язок $|y| = |C_1|\sqrt{x^2+1}$, звідси $y = \pm C_1\sqrt{x^2+1}$, або $y = C\sqrt{x^2+1}$, де $C = \pm C_1$.

Добуток $y\left(x^2+1\right) = 0$ при $y = 0$; так як при цьому значенні y диференціальне рівняння не губить числового змісту, то $y = 0$ — розв'язок рівняння. Але воно входить у розв'язок $y = C\sqrt{x^2+1}$ при $C = 0$. Значить, загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C\sqrt{x^2+1}$.

Якщо підставити у загальний розв'язок значення $y = 3$ і $x = 2\sqrt{2}$, отримаємо $3 = 3C$, звідси $C = 1$. Частинний розв'язок, що задовольняє даній умові, має вигляд $y = \sqrt{x^2+1}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $2x\sin y dx + (x^2 + 3)\cos y dy = 0$. Знайти частинний розв'язок, який задовольняє умови $y = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = 1$.

Розв'язок. Розділимо кожний член рівняння на добуток $(x^2 + 3)\sin y$:

$$\frac{2xdx}{x^2+3} + \frac{cosydy}{siny} = 0.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int\frac{2xdx}{x^2+3} + \int\frac{\cos ydy}{\sin y} = C_1; \quad \int\frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3} + \int\frac{d(\sin y)}{\sin y} = C_1$$

$$\ln\left(x^2+3\right) + \ln|\sin y| = C_1$$

Після потенціювання отримаємо:

$$(x^2+3)\,|\sin y| = e^{C_1}; \quad (x^2+3)\sin y = \pm e^{C_1},$$

або

$$(x^2+3)\sin y = C,$$

де $C = \pm e^{C_1}$. Звідси $\sin y = \dfrac{C}{x^2+3}$.

Підставивши в загальний інтеграл значення $y = \dfrac{\pi}{2}$ і $x = 1$, отримаємо $1 = \dfrac{C}{(1+3)}$, звідси $C = 4$. Частинний інтеграл, який задовольняє даній умові, має вигляд $\sin y = \dfrac{4}{x^2 + 3}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$e^y\left(1 + x^2\right)dy - 2x\left(1 + e^y\right)dx = 0.$$

Знайти частинний розв'язок, який задовольняє умови $y = 0$ при $x = 0$.

Розв'язок. Перенесемо другий член рівняння у праву частину і розділимо обидві частини на добуток $\left(1 + e^y\right)\left(1 + x^2\right)$:

$$\frac{e^y dy}{1 + e^y} = \frac{2xdx}{1 + x^2}.$$

Інтегруючи, отримуємо

$$\int \frac{e^y dy}{1 + e^y} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2}; \qquad \int \frac{d\left(1 + e^y\right)}{1 + e^y} = \int \frac{d\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2};$$

$$ln\left(1 + e^y\right) = ln\left(1 + x^2\right) + lnC.$$

Після потенціювання отримаємо загальний інтеграл рівняння:

$$1 + e^y = C\left(1 + x^2\right).$$

Підставивши у загальний інтеграл значення $y = 0$ і $x = 0$, отримаємо $1 + 1 = C$, звідки $C = 2$. Частинний інтеграл рівняння, який задовольняє даній умові, має вигляд $1 + e^y = 2\left(1 + x^2\right)$.

ЗАПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яке рівняння називається диференціальним?

2. Дайте визначення диференціального рівняння першого порядку.

3. Дайте визначення загального розв'язку і загального інтеграла диференціального рівняння першого порядку.

4. Дайте визначення частинного розв'язку і частинного інтеграла рівняння першого порядку.

5. Розв’яжіть диференціальне рівняння і знайдіть частинні розв'язки (частинні інтеграли), які задовольняють даним умовам:

а) $\left(xy^2 + x\right)dx - \left(y - x^2 y\right)dy = 0; \quad y = 1 \ \text{ при } \ x = 2$

б) $e^x\left(1 + e^y\right)dx + e^y\left(1 + e^x\right)dy = 0; \quad y = 0 \ \text{ при } \ x = 0$

6. Знайдіть частинні розв'язки (частинні інтеграли) диференціального рівняння, які задовольняють даним умовам:

а) $y' = \dfrac{y^3}{x^3};\ y = \sqrt{2} \ \text{ при } \ x = \sqrt{3};$

б) $y' \operatorname{tg} x = 1 + y; \quad y = \dfrac{-1}{2} \ \text{ при } \ x = \dfrac{\pi}{6}.$

Відповіді: 5. а) $\left(1 + y^2\right)\left(1 - x^2\right) = C; \left(1 + y^2\right)\left(1 - x^2\right) = -6$

б) $\left(1 + e^y\right)\left(1 - e^x\right) = C; \left(1 + e^y\right)\left(1 - e^x\right) = 4.$

6. а) $y^2 = \dfrac{6x^2}{\left(x^2 + 6\right)}$; б) $y = \sin x - 1.$

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

З даної теми спочатку вивчіть § 18 (1—3) гл. 6, §20—23 гл. 7 [2] або §1—9 гл. 11 [9]. Далі ознайомитесь з методичними вказівками з цієї теми і уважно розберіть розв'язки прикладів з даного посібника. Дайте відповіді на запитання і виконайте вправи для самоперевірки. Розв’яжіть наступні задачі: [2] гл. 7 § 20 № 8.1—8.8 або [9] гл. 11 № 1—16.

Випадкові дії. Ймовірність події. Теорія ймовірностей є підґрунтям для математичної і прикладної статистики, яка в свою чергу використовується при плануванні та організації виробництва, в аналізі технологічних процесів, у психології, медицині та вибірковому контролі.

У зв’язку з тим, що економічна інформація є не досить точною і часто носить випадковий характер, переважна більшість економічних задач моделюється за допомогою ймовірнісних чи статистичних методів. Способи побудови таких найпростіших моделей розглядаються в курсі теорії ймовірностей та математичної статистики.

Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяє передбачити, як ці події будуть розвиватися, оскільки досить велика кількість однорідних випадкових подій незалежно від їх конкретної природи підпорядковуються деяким закономірностям, а саме — ймовірнісним.

Теорія ймовірностей — це математична наука, яка вивчає закономірність у випадкових подіях. До основних понять теорії ймовірностей відносяться випробування і події.

Під **випробуванням (дослідом)** розуміють реалізацію даного комплексу умов, в результаті якого обов’язково відбудеться яка-небудь подія.

Наприклад, кидання монети — випробування; поява герба або цифри — подія.

Випадковою подією називається подія, яка зв'язана з даним випробуванням, яке при здійснені випробування може відбутися, а може і не відбутися. Слово «випадкова» для стислості часто опускають і говорять просто «подія». Наприклад, стріляти в ціль — це спроба (дослід), випадкові події в цій спробі — попадання в ціль або промах.

Подія називається **вірогідною**, якщо в результаті досліду вона обов'язково повинна відбутися, і **неможливою**, якщо вона, знаючи про це, не відбудеться. Наприклад, випадання не більше шести очків при киданні гральної кості — достовірна подія; випадання десяти очків при киданні гральної кості — неможлива подія.

Події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно).

Події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні. Наприклад, попадання і промах при одному вистрілі — це несумісні події.

Декілька подій в даному досліді утворюють **повну систему подій**, якщо в результаті досліду обов'язково повинна відбутися хоча б одна з них. Наприклад, при киданні гральної кості події, які складаються з випадання одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти і шести очків, утворюють повну систему подій.

Події називаються **рівноможливими**, якщо ні одна з них не являється об'єктивно більш можлива, ніж інша. Наприклад, при киданні монети випадання герба або числа — події однаково можливі.

Кожна подія володіє якоюсь ступінню можливостей. Числова міра ступеня об'єктивної можливості події — це ймовірність події. Ймовірність події A позначається $P(A)$.

Нехай із системи n несумісних рівноможливих початкових випробувань m наслідків сприяють події A. Тоді **ймовірністю** події A називається відношення числа наслідків m, які сприяють настанню даної події A, до числа n усіх наслідків, тобто

$$P(A) = m / n.$$

Ця формула носить назву **класичного означення ймовірності**. Якщо B — вірогідна подія, то $m = n$ і $P(B) = 1$; якщо C — неможлива подія, то $m = 0$ і $P(C) = 0$; якщо A — випадкова подія, то $m \le n$ $i\, P(A) \le 1$.

Таким чином, ймовірність події знаходиться в таких межах:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Приклад 1. Грайливу кість підкидають один раз. Знайти ймовірність події: A — поява парного числа очків; B — поява не менше п'яти очків; C — поява не більше п'яти очків.

Розв'язок. Дослід має шість рівноможливих виходів (поява одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти, шести очків), які утворюють повну систему.

Події A сприяють три виходи (випадання двох, чотирьох, шести очків), тому $P(A) = 3/6 = 1/2$; події B — два виходи (випадання п'яти і шести очків), $P(B) = 2/6=1/3$; події C — п'ять виходів (випадання одного, двох, трьох, чотирьох і п'яти очків), тому $P(C) = 5/6$.

При обчислені ймовірності часто приходиться використовувати формули комбінаторики.

Основні поняття комбінаторики

Комбінаторика — розділ математики про вибір і розміщення елементів деякої множини на основі яких-небудь умов. Саме комбінаторика була фундаментальною основою початків теорії ймовірностей.

Під час розв'язування комбінаторних задач доводиться розглядати скінченні множини, складені з елементів будь-якої природи, та їх підмножини. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, в яких істотним є або порядок елементів, або перше і друге одночасно. Такі скінченні множини дістали певну назву: розміщення, перестановки, сполучення.

Розміщення. Нехай дано множину, яка складається з n елементів. Усяка її упорядкована підмножина, яка складається з m елементів, називається розміщенням з n елементів по m елементів.

З означення випливає, що $0 \le m \le n$ і що розміщення з n елементів по m – це всі m — елементи підмножини, які відрізняються складом елементів.

Число розміщень з n елементів по m елементів позначаються A_n^m і знаходяться за формулою $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)$.

Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n$ прийнято позначати знаком $n!$ (читається n-факторіал); при цьому припускається, що $0! = 1$, $1! = 1$.

Тому, формулу числа розміщень з n елементів по m елементів можна записувати і в іншому вигляді:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Приклад 2. Скількома способами збори, які складаються із 30 чоловік, можуть вибрати з присутніх президію в складі голови, секретаря і члена президії?

Розв'язок. Склад президії зборів являється упорядкованою множиною із 30 елементів по три елемента. Значить, шукане число способів дорівнює числу розміщень з 30 елементів по три елемента в кожному:

$$A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360,$$

або

$$A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Перестановки. Розміщення з n елементів по n елементів називається перестановками з n елементів. Перестановки являються частинним випадком розміщень. Так як кожна перестановка має всі n елементів множини, то різні перестановки відрізняються одна від другої тільки числом елементів. Число всіх перестановок з n елементів даної множини позначаються P_n. Воно дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від 1 до n включно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Приклад 3. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з чотирьох цифр 1; 2; 3; 4 без повторень?

Розв'язок. За умовою задана множина з чотирьох елементів, які потребують розташувань у визначеному порядку. Значить, потрібно знайти кількість перестановок із чотирьох елементів:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

тобто з цифр 1; 2; 3; 4 можна скласти 24 чотирьохзначних числа (без повторень).

Сполучення. Нехай дано скінчену множину, яка складається з n елементів. Усяка її m– елементна підмножина $(m \le n)$ називається **сполученням** з n елементів по m.

Число сполучень з n елементів по m позначають C_n^m. Це число знаходять за формулою $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$, яку можна записати у вигляді

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

або

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}.$$

Крім того, при розв’язуванні задач користуються формулами, які виражають основні властивості сполучень:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \left(0 \le m \le n\right);$$

$$C_n^m + C_n^{n-m} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Приклад 4. Скількома способами можна розподілити 12 чоловік в бригади, якщо в кожній бригаді по 6 чоловік?

Розв'язок. Склад кожної бригади являється кінцевою множиною з 12 елементів по 6. Значить, шукане число способів дорівнює числу сполучень з 12 елементів по 6 в кожному:

$$C_{12}^6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924.$$

Приклади безпосереднього обчислення ймовірностей

Приклад 5. В урні є 6 білих і 5 чорних куль. З урни одночасно виймають дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що дві навмання вибрані кулі будуть білі(подія A).

Розв'язок. Тут число рівноможливих незалежних наслідків складає

$$n = C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55.$$

Події A сприяють $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ наслідків. Відповідно,

$$P(A) = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}.$$

Приклад 6. У партії з 20 деталей — чотири бракованих. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання деталей буде дві бракованих (подія В).

Розв'язок. Тут число рівноможливих незалежних наслідків дорівнює:

$$n = C_{20}^{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504.$$

Підрахуємо число наслідків m, які сприяють події В. Серед п'яти взятих виробів буде два бракованих і три стандартних. Два бракованих вироби із чотирьох можна вибрати $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ способами, а три стандартних деталі із 16 можна вибрати $C_{16}^3 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$ $= 560$ способами. Кожна комбінація бракованих деталей може сполучатися з кожною комбінацією стандартних деталей, тому $m =$ $= 560 \cdot 6 = 3360$. Відповідно,

$$P(B) = \frac{3360}{15504} = \frac{70}{323} = 0,2 .$$

Приклад 7. Дев'ять різних книг розташовані навмання на одній полиці. Знайти ймовірність того, що чотири визначені книги будуть поставлені поряд (подія С).

Розв'язок. Тут число рівноможливих незалежних наслідків є $n = P_9 = 9!$ Підрахуємо число наслідків m, які сприяють події С. Уявимо собі, що чотири визначені книги зв'язані разом. Тоді цю зв'язку можна розташувати на полиці $P_6 = 6!$ способами (зв'язка плюс інші п'ять книг). В середині зв'язки чотири книги можна переставляти $P_4 = 4!$ методами. При цьому кожна комбінація всередині зв'язки може сполучатися з кожним із P_6 способів утворення зв'язки, тобто $m = P_6 \cdot P_4$. Відповідно,

$$P(C) = \frac{P_6 \cdot P_4}{P_9} = \frac{1}{21} .$$

Економічний зміст теорії ймовірностей

Методи теорії ймовірностей часто застосовуються в різних сферах науки і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загальній теорії зв'язку та в багатьох інших науках. Теорія ймовірностей є підґрунтям для математичної і прикладної статистики, яка в свою чергу використовується при плануванні та організації виробництва, в аналізі технологічних процесів, у психології, медицині та вибірковому контролі.

У зв'язку з тим, що економічна інформація є не досить точною і часто носить випадковий характер, переважна більшість економічних задач моделюється за допомогою ймовірнісних чи статистичних методів. Способи побудови таких найпростіших моделей розглядаються в курсі теорії ймовірностей та математичної статистики.

Мета цього розділу — ознайомити студентів вищих навчальних закладів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики, допомогти їм набути первинні навички застосування теоретичного матеріалу в багатьох випадках, а саме, для аналізу ризику.

Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяє передбачити, як ці події будуть розвиватися, оскільки досить велика кількість однорідних випадкових подій незалежно від їх конкретної природи підпорядковуються деяким закономірностям, а саме — ймовірнісним.

Розв'язування наведених задач потребує глибокого опанування матеріалу: необхідно запропонувати ту чи іншу математичну модель, вибрати метод розв'язання задачі, обґрунтувати вибір, дати інтерпретацію отриманих результатів.

Теореми додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій

Ймовірність появи однієї з двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Дане твердження справджується і для **n** випадкових подій.

Якщо випадкові події A та B сумісні, то ймовірність їх об'єднання дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Дане твердження справджується і для **n** випадкових подій.

Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Приклад 8. В урні знаходиться 30 кульок: 10 червоних і 15 білих. Навмання виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що вона буде кольоровою.

Розв'язок. Поява кольорової кульки означає появу або червоної, або синьої кулі. Ймовірність появи червоної кулі (подія A):

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Ймовірність появи синьої кулі (подія B):

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Події A та B несумісні (поява кулі одного кольору виключає появу кулі іншого кольору), тому застосовуємо теорему додавання ймовірностей для несумісних подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Ймовірність попадання в ціль, якщо стріляти із першої і другої гармати, відповідно дорівнює $P_1 = 0,7$, $P_2 = 0,8$. Знайти ймовірність влучення при одному залпі хоча б однією гарматою.

Розв'язок. Ймовірність влучити в ціль кожною із гармат не залежить від результату пострілу з іншої гармати, тому подія А (влучення першої гармати) і В (влучення другої гармати) незалежні, тому застосовуємо теорему додавання ймовірностей для сумісних подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

де $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$.

Отже, шукана ймовірність $P(A + B) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94$.

Умовна ймовірність та повна група подій

Випадкові події A та B називаються ***залежними***, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи іншої події. В противному випадку такі події називають ***незалежними***.

Декілька подій утворюють повну групу, якщо в результаті випробування з'явиться хоча б одна з них.

Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B, яка обчислюється за умови, що подія A вже відбулася. Формула для обчислення умовної ймовірності має вигляд:

$$\mathrm{P_A(B)} = \frac{P(AB)}{P(A)};\ \mathrm{P(A)} \neq 0.$$

1. $P_A(B) = 0$, якщо $AB = 0$.
2. $P_A(B) = 1$, якщо $AB = B$.
3. У решті випадків $0 < P(B) < 1$.

Приклад 10. За статистичними даними ремонтної майстерні в середньому на 20 зупинок токарного станка припадає: 10 — для заміни різця; 3 — через несправність приводу; 2 — через несвоєчасну подачу заготовок. Інші зупинки відбуваються через інші причини. Знайти ймовірність того, що зупинка відбулася через інші причини.

Розв'язок. Ймовірність того, що зупинка токарного станка відбулася для заміни різця, дорівнює: $P(A) = \frac{10}{20} = 0{,}5$. Ймовірність того, що зламався привід, дорівнює: $P(B) = \frac{3}{20} = 0{,}15$. Ймовірність того, що зупинка відбулася через несвоєчасну подачу заготовок: $P(C) = \frac{2}{20} = 0{,}1$. Оскільки, $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ незалежні і утворюють повну групу подій з подією $P(D)$ — зупинка відбулася через інші причини, то

$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1.$

$P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C),$

$P(D) = 1 - 0{,}5 - 0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}25.$

Формула Байєса

Якщо випробування проведено і в результаті нього подія A з'явилася, то умовна ймовірність $P_A(B_K)$ може не дорівнювати $P(B_K)$.

Порівняння цих ймовірностей дозволяє переоцінити ймовірність гіпотези за умови, що подія A з'явилася. Для цього використовують формулу Байєса:

$$P_A(B_K) = \frac{P(B_K) \cdot PB_K(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_K) \cdot PB_K(A)}, \; k = 1, 2, ..., n.$$

Приклад 11. Два автомати виготовляють однакові деталі, які надходять на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша за продуктивність другого. Перший автомат випускає в середньому 60 % деталей без браку, а другий — 84 %. Навмання взята з конвеєра деталь виявилась без браку. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

Розв'язок. Позначимо через A подію — деталь без браку. Можна сформулювати дві гіпотези: B_1 — деталь виготовлена першим автоматом (оскільки перший автомат виготовляє вдвічі більше деталей, ніж другий): $P(B_1) = \frac{2}{3}$; B_2 — деталь виготовлена другим автоматом, причому $P(B_2) = \frac{1}{3}$. Умовна ймовірність того, що деталь буде без браку, якщо вона зроблена першим автоматом, дорівнює $P_{B_1}(A) = 0{,}6$. Умовна ймовірність того, що деталь буде без браку, якщо вона зроблена другим автоматом, дорівнює $P_{B_2}(A) = 0{,}84$. Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться без браку, за формулою повної ймовірності дорівнює:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Шукана ймовірність того, що взята деталь без браку виготовлена першим автоматом, за формулою Байєса дорівнює:

$$\mathrm{P_A(B_1)} = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

ЗАПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які події називаються неможливими, достовірними?
2. Які події називаються несумісними, рівноможливими?
3. Які події виконують повну систему подій?
4. Що розуміється під ймовірністю події?
5. Дайте класичне визначення ймовірності події.
6. *а*) В урні є 3 білих і 9 чорних куль. Із урни навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що витягнута куля буде чорна?

б) В урні є 4 червоних і 7 синіх куль. Із урни одночасно виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі червоні?

в) Представництво з футболу забезпечують 18 команд, серед яких 5 лідирують. Шляхом жеребкування команди розподілені на дві групи по 9 команд в кожній. Яка ймовірність попадання всіх лідируючих команд в одну групу?

Відповідь: 6. а) 3/4; б) 6/55; в) 1/3.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. На осі абсцис знайдіть точку, відстань якої від точки A(–3; 4; 8) дорівнює 12 од.

2. Дано вершини A(1; –2; 2), B(1; 4; 0), C(–4; 1; 1) і D(–5; –5; 3) чотирикутникаABCD. Доведіть, що діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

3. Обчислити кут C трикутника з вершинами A(5; 2; –4), B(9; –8; –3), C(16; –6; –11).

4. Доведіть що трикутник з вершинами A(3; –1; 6), B(–1; 7; –2), C(1; –3; 3) — прямокутний.

5. Дано вектори $\vec{m} = \{4; -2; -8\}$ і $\vec{n} = \{2; -1; -6\}$. Знайти довжину вектора $\vec{p} = 5\vec{m} - 7\vec{n}$.

6. На осі аплікат знайдіть точку, рівновіддалену від точок A(4; –1; 2) і B(0; 2; –1).

7. Дано дві вершини A(2; –3; –5) і B(–1; 3; 2) паралелограма ABCD і точка перетину його діагоналей M(4; –1; 7). Знайдіть координати двох інших вершин паралелограма.

8. Доведіть, що трикутник з вершинами A(3; –1; 2), B(0; –4; 2), C(–3; 2; 1) — рівнобедрений.

9. Знайдіть координати кінців відрізка, який точками C(2; 0; 2) і K(5; –2; 0) розділений на три рівні частини.

10. Знайти кут A трикутника з вершинами A(–3; 5; 6), B(1; –5; 7), C(8; –3; –1).

11. Знайти периметр трикутника з вершинами *A*(8; 0; 7), *B*(10; –2; 8), *C*(10; –2; 8).

12. Знайти початок вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець співпадає з точкою *B*(1; –1; 2).

13. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок *K*(1; –3; 7) і *P*(5; 7; –5).

14. Обчислити довжину діагоналей паралелограма ABCD, якщо відомі координати його вершин: *A*(1; –3; 0), *B*(–2; 4; 1), *C*(–3; 1; 1).

15. Обчислити кут B трикутника з вершинами $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$.

16. На осі абсцис знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 3)$.

17. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(1; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$, $D(2; 2; 2)$ є паралелограмом.

18. Доведіть, що чотирикутник ABCD є ромбом, якщо $A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$.

19. Дано один кінець відрізка $A(2; 3; -1)$ і його середина $C(1; 1; 1)$. Знайти другий кінець відрізка.

20. Дано чотири точки: $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$, $D(2; -3; 1)$. Знайти косинус кута φ між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

21. Дано три точки: $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$. Знайти кут C трикутника ABC.

22. Точки $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$ і $C(5; 0; 2)$ — три послідовні вершини паралелограма ABCD. Знайти його четверту вершину D і гострий кут між діагоналями.

23. Відомо, що точки $A(1; 3; 5)$ і $B(-1; 2; 1)$ — вершини паралелограма ABCD, а $E(1; 0; 1)$ — точка перетину його діагоналей. Знайти координати вершин C і D.

24. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $2\vec{b}$, якщо дано координати векторів $\vec{a} = (3;1;2), \vec{b} = \left(1;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

25. Знайти площу трикутника, координати вершин якого $A(6; 2; 0)$, $B(2; 0; 0)$ і $C(8; 0; 0)$.

26. а) Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{1 - \sin 3x}$ і обчислити $f'(0)$;

б) Складіть рівняння дотичної до кривої $y = 4 - x^2$ в точці з абсцисою $x = 1$.

27. а) Тіло рухається прямолінійно за законом $S = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t - 2$. Знайти мінімальну швидкість руху тіла.

б) Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{5x^2 + 6x + 1}{x + 1}$ і обчислити $f'(5)$.

28. а) Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ і обчислити $f'(4)$.

б) Дослідіть функцію $y = x^3 - 6x$ і побудуйте її графік.

29. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$ і обчисліть $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

б) З куска дроту довжиною 40 см зігнуто прямокутник найбільшої площі. Які розміри цього прямокутника?

30. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=x^3-3x$ і обчисліть $f'(1)$.

б) Складіть рівняння дотичної до кривої $y=x^3+2x$ в точці з абсцисою $x=1$.

31 а) Знайдіть похідну функції $f(x)=ln\dfrac{5-x^2}{5+x^2}$ і обчисліть $f'(2)$.

б) Тіло рухається прямолінійно за законом $S=-10t^3+15t^2+2t$. Знайдіть максимальну швидкість руху тіла.

32. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$ і обчисліть $f'(1)$.

б) Складіть рівняння дотичної до кривої $y=x^3+2x^2$ в точці з абсцисою $x=1$.

33. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\cos^2 x-2\ln\cos x$ і обчисліть $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

б) Складіть рівняння дотичної до кривої $y=2x^3-4x^2+6x-3$ в точці з абсцисою $x=1$.

34. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\ln\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^3}$ і обчисліть $f'(2)$.

б) Прямолінійний рух точки задано рівнянням $S=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$. В який момент часу швидкість точки дорівнює нулю?

35. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ і обчисліть $f'\left(\sqrt{3}\right)$.

б) Сума основи і висоти трикутника дорівнює 24 см. Які повинні бути розміри основи, щоб площа трикутника була найбільшою?

36. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$ і обчисліть $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

б) Складіть рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ в точці з абсцисою $x=0$.

37. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\ln\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ і обчисліть $f'(0)$.

б) Точка рухається прямолінійно за законом $S=t^3-9t^2+24t$. Знайдіть швидкість і прискорення руху. В які моменти часу точка міняє напрямок руху?

38. а) Знайти похідну функції $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ і обчислити $f'\left(\sqrt{3}\right)$.

б) З листка картону прямокутної форми розміром 30 × 50 см потрібно вирізати в кутках квадрати так, щоб із залишкової частини після згинання отримати коробку найбільшої бічної поверхні. Які при цьому розміри вирізаних квадратів?

39. а) Знайти похідну функції $f(x)=\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$ і обчислити $f'(1)$.

б) Дослідіть функцію $y=x^3+3x^2$ і побудуйте її графік.

40. а) Знайдіть похідну функції $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}$ і обчисліть $f'(1)$.

б) Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^3-3x^2+9x-1$ в точці з абсцисою $x = 1$.

41. а) Знайти похідну функції $f(x)=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$ і обчислити $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

б) Розкладіть число 100 на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменша.

42. а) Знайти похідну функції $f(x)=\ln\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x$ і обчислити $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Точка рухається прямолінійно за законом $S=-t^3+3t^2+9t+3$. Знайдіть максимальну швидкість руху точки.

43. а) Знайти похідну функції $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$ і обчислити $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Дослідіть функцію $y = x^3-12x$ і побудуйте її графік.

44. а) Знайти похідну функції $f(x)=\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$ і обчислити $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Потрібно виготовити ящик з кришкою, об'єм якого дорівнює 72 см^3, а сторони основ відносяться як 1 : 2. Які повинні бути розміри ящика, щоб його повна поверхня була найменша?

45. а) Знайти похідну функції $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$ і обчислити $f'(1)$.

б) Тіло рухається прямолінійно за законом $S=\frac{-1}{6}t^3+3t^2-5$. Знайти швидкість руху тіла в той момент, коли прискорення дорівнює нулю.

46. а) Знайти похідну функції $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ і обчислити $f'(1)$.

б) Одна сторона прямокутної ділянки землі приєднується до берега канала, а три інші відгороджені парканом. Які повинні бути розміри цієї ділянки, якщо її площа дорівнювала 800 м^2, а довжина паркану була найменшою?

47. а) Знайти похідну функції $f(x) = \ln\sqrt{1+\sqrt{x}}$ і обчислити $f'(4)$.

б) Знайти довжину сторін прямокутника, що має площу 144 см^2 та найменший периметр.

48. а) Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{\sin 6x}{1+\cos 6x}$ та обчислити її значення, якщо $x = \dfrac{-\pi}{12}$.

б) Дослідити функцію $y = 2x^3 + 3x^2$ та побудувати її графік.

49. а) Знайти похідну функції $f(x) = \ln\sin x$ і обчислити $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

б) Розкласти число 100 на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

50. а) Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ і обчислити $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

б) Довжина відкритого басейну об'ємом 288 м^3 вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

51. Знайти маргінальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів X та роздрібна вартість кожного виробу P зв'язані рівністю

X = 4000 — 2P.

52. Знайти маргінальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів X та роздрібна вартість кожного виробу P зв'язані рівністю X = 4000 – 10$\sqrt{P}$.

53. Функція витрат підприємства має вигляд $V(x) = 2000 + 10x + 0{,}1x^2 + 0{,}002x^3$(тисяч гривень). Знайти маргінальну вартість при $x = 50$, $x = 100$ та $x = 120$.

54. Функцію доходу фірми від ціни задано рівнянням $D(x) = -5p^2 + 100p$. Визначте, яким буде граничний дохід фірми, якщо ціна становитиме 2 грн.; 5 грн.; 10 грн.

55. Функція витрат підприємства описується рівнянням $V(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Визначте граничні витрати, якщо обсяг виробництва становитиме 50 од.; 100 од.; 150 од.

56. Мале підприємство встановило, що витрати на виготовлення x окремих виробів задовольняють такій закономірності $V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$. Знайти: приріст витрат, коли кількість виробів зросте з 50 до 100 та середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, коли їх кількість зросте з 50 до 60.

57. Загальний щотижневий дохід D в гривнях, одержаний підприємством після продажу виготовлення X одиниць виробів, має таку закономірність: $D(x) = 500x + 2x^2$. Визначити середнє значення доходу на одиницю приросту виготовленої продукції, якщо її кількість X зросте з 100 до 120.

58. Залежність між витратами виробництва Y і обсягом продукції X, що випускається, виражається формулою $Y = 50x - 0{,}05x^3$ (грош. од.). Визначити середні і граничні витрати, якщо обсяг продукції 10 од.

59. Залежність між витратами виробництва Y(грош. од.) і обсягом продукції, що випускається X(од.), виражається функцією $Y = 10x - 0{,}04x^3$. Визначити середні та граничні витрати при обсязі продукції 5 од.

60. Підприємство виробляє X одиниць продукції за ціною $P(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800$. Знайти оптимальний для підприємства обсяг продукції і відповідний йому максимальний прибуток.

61—85. Знайти інтеграли:

61. а) $\int \left(1 - 2x^3\right) x^2 dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

62. а) $\int \frac{x dx}{\left(5x^2 + 1\right)^2}$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

63. а) $\int \frac{dx}{(2 + 3x)^3}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{24}} \frac{2dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

64. а) $\int \sqrt[3]{5x + 1}\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{24}} \frac{2dx}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

65. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{2x^4 + 1}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{24}} \frac{2dx}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

66. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^2}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x + \cos 3x)^2\, dx$.

67. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx$.

68. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(x^2-3\right)^3}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin x dx$.

69. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_1^4 \left(4x^3 - 3x\sqrt{x}\right) dx$.

70. а) $\int e^{-x^5} x^4 dx$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9+16x^2}}$.

71. а) $\int 2^{3x^2} xdx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{\sqrt{3\cos x + 1}}$.

72. а) $\int e^{3x^3-1} x^2 dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$.

73. а) $\int \frac{3e^x}{\left(e^x-5\right)^2} dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+\cos x)^2 \sin xdx$

74. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{7\sin x + 1}}$.

75. а) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$; б) $\int_{-5}^{9} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+144}}$.

76. а) $\int \sin x \cos xdx$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

77. а) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{3+\sin x}}$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

78. а) $\int \sin x \cos^3 x dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+1)^2}}$.

79. а) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x\left(2x^2+1\right)}$; б) $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}\,\mathrm{d}x.$

80. а) $\int 5^{\frac{1-9x}{15}} dx$; б) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$.

81. а) $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{(3+\cos x)^3}$.

82. а) $\int \operatorname{ctg}^2 xdx$; б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

83. а) $\int \frac{\cos xdx}{2\sin x + 1}$; б) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{3xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

84. а) $\int 2^x 3^x 5^x dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x \cos^2 2xdx$.

85. а) $\int \frac{dx}{4-\frac{2x}{5}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos xdx$.

86.—95. Зробіть рисунок і обчисліть площу фігури, яка обмежена даними лініями:

86. $y = 6x - x^2 - 5$ і віссю OX.

87. $y = 2x - x^2$ і $y = -x$.

88. $y = x^2 + 4x$ і $x - y + 4 = 0$.

89. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = -1$ і віссю OX.

90. $y = \sqrt{x}$, $x = 4$ і віссю OX.

91. $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$.

92. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ і віссю OX.

93. $y = x$ і $4y - x^3 = 0$.

94. $y = 8 + 2x - x^2$ і $y = 2x - 4$.

95. $y=\frac{1}{2}x^2$ і $x+y-4=0$.

96.—102. Обчисліть об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ фігури, яка обмежена заданими лініями:

96. $xy=4;\quad x=1;\quad x=4;\quad y=0$.

97. $y=2\sqrt{x};\quad x=0;\quad x=9;\quad y=0$.

98. $x-2y=0;\ x=0;\ x=10;\ y=0.$

99. $xy=1;\quad x=2;\quad x=3;\quad y=0$.

100. $y=x^3;\quad y=0;\quad x=0;\quad x=2.$

101. $y^2-3x=0;\quad x-3=0$.

102. $y=\frac{1}{3}x^2;\quad y=0;\quad x-3=0;\quad x=0$.

103.—108.Обчисліть об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OY фігури, яка обмежена даними лініями:

103. $y=x^3;\quad y=8;\quad x=0;\quad y=0$.

104. $y^2+x^2=4$.

105. $y^2=4-x;\quad x=0$.

106. $y=x^2+1;\quad y=2;\quad y=5$.

107. $y=3-\frac{1}{3}x^2;\quad y=2;\quad y=0$.

108. $x^2-2y=0;\quad y-2=0$.

109. Тіло рухається по прямій зі швидкістю $V=(3+4t^3)$ м/с. Обчисліть шлях, пройдений тілом за 3-ю секунду.

110. Тіло рухається по прямій зі швидкістю $V=\left(5t-t^2\right)$ м/с. Обчисліть шлях, пройдений тілом від початку руху до зупинки.

111. Під дією сили в 40Н пружина стала довшою на 0,1 м. Яку роботу необхідно виконати, щоб пружина від спокійного стану стала довшою на 0,3 м?

112. Сила в 1Н стискає пружину на 1 см. Обчисліть роботу при стисканні пружини на 10см.

113. Сила в 6Н розтягує пружину на 8 см. Яку роботу вона виконує?

114. При стисканні пружини на 4см необхідно виконати роботу в 9,81 Дж. Яку роботу потрібно виконати для стискання пружини на 10 см?

115. При розтягуванні пружини на 0,02 м потрібно прикласти силу в 40Н. Обчисліть роботу при стисканні пружини на 0,06 м.

116—125. Розв'яжіть задачі з економічним змістом, використовуючи визначений інтеграл:

116. Закони зміни швидкості витрат $V'(t)$ та доходу $D'(t)$ підприємства відомі: $D'(t) = 14 - \sqrt{t}$; $V'(t) = 2 + 3\sqrt{t}$, де t вимірюється роками, а витрати $V(t)$ та дохід $D(t)$ вимірюється млн. гривень. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

117. Відомі закони зміни швидкості витрат $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t}$ та дохода $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t}$ підприємства, де час t вимірюється роками, а витрати $V(t)$ та дохід $D(t)$ вимірюється млн. гривень. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

118. Знайти середнє значення витрат $V(x) = 3x^2 + 4x + 2$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції х змінюється від 0 до 3 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.

119. Знайти середнє значення витрат $V(x) = 6x^2 + 4x + 1$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції х змінюється від 0 до 5 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.

120. Вказати обсяг продукції, виробленої робітником за п'яту годину робочого дня, якщо продуктивність характеризується функцією $f(t) = \frac{3}{3t+2} + 5$.

121. Вказати обсяг продукції, виробленої робітником за третю годину робочого дня, якщо продуктивність характеризується функцією $f(t) = \frac{3}{4t+5} + 4$.

122. Продуктивність праці протягом робочого дня змінюється. Нехай функція продуктивності праці має вигляд $f(t) = 100 + 10t$ (дет./год.). Скільки деталей зробить робітник за дві години роботи? (тут ± відрізок часу від початку робочого дня).

123. Граничний дохід від реалізації продукції дорівнює 15 грн. Визначте дохід від продажу 1000 од. продукції.

124. Функція обсягу продукції описується рівнянням $f(t) = (1 + \mathrm{t})\, \mathrm{e}^{2\mathrm{t}}$. Знайдіть обсяг продукції, виробленої за 2 роки.

125. Функцію продуктивності праці задано рівнянням $f(t) = 3t^2 - 2t + 5$. Визначте обсяг виробленої продукції за перші 5 годин роботи підприємства.

126—150. Розв'яжіть диференціальні рівняння і знайдіть частинні розв'язки (частинні інтеграли), які задовольняють даним умовам:

126. $(x^2y - x^2)dy - xydx = 0$, $y = 1$ при $x = e$.

127. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0,\ y=0$ при $x=0$.

128. $x^2dy+(y-1)dx=0, y=e+1$ при $x=1$.

129. $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'-y=0,\quad y=1$ при $x=1$.

130. $\sqrt{1-x^2}ydy-\sqrt{1-y^2}xdx=0,\quad y=1$ при $x=1$.

131. $ydx+\operatorname{ctg}xdy=0,\quad y=-1$ при $x=\frac{\pi}{3}$.

132. $y'\cos^2 x\ln y=y,\quad y=1$ при $x=\pi$.

133. $2(xy+y)dx-xdy=0,\quad y=e^2$ при $x=1$.

134. $\cos x\cdot\sin y\cdot y'-\cos y\sin x=0,\quad y=\pi$ при $x=\pi$.

135. $(xy+x)dx-dy=0,\quad y=e-1$ при $x=2$.

136. $\sqrt{y}-\sqrt{x}y'=0,\quad y=0$ при $x=0$.

137. $\left(1+x^2\right)dy-(xy+x)dx=0,\quad y=1$ при $x=\sqrt{3}$.

138. $x^2dy-2xydx-3ydx=0,\quad y=e^2$ при $x=-1$.

139. $\sqrt{x^2-1}dy-xydx=0,\quad y=1$ при $x=1$.

140. $2y'=\frac{y^3}{x^2},\quad y=1$ при $x=-1$.

141. $\frac{y'}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}}-1,\ y=1$ при $x=0$.

142. $dy+y\operatorname{tg}xdx=0,\quad y=1$ при $x=0$.

143. $\sqrt{1-x^2}dy+xydx=0,\quad y=e$ при $x=0$.

144. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\left(1-x^2\right)dy=0,\quad y=1$ при $x=0$.

145. $y'=\frac{y}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}},\quad y=4$ при $x=4$.

146. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0,\quad y=1$ при $x=1$.

147. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}y'=0,\quad y=0$ при $x=0$.

148. $y'\operatorname{tg}x-y=1,\ y=\frac{-1}{2}$ при $x=\frac{\pi}{6}$.

149. $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad y=1$ при $x=0$.

150. $e^x\left(1+e^y\right)dx+e^y\left(1+e^x\right)dy=0,\quad y=0$ при $x=0$.

151. Вісім різних книг розставляють навмання на одній полиці. Знайти ймовірність того, що дві визначені книги будуть поставлені поряд.

152. В книжному магазині на полиці 10 різних книг, причому 5 книг коштують по 4 гривні кожна, 3 книги — по одній гривні і дві книги — по 3 гривні. Знайти ймовірність того, що взяті навмання дві книги коштують 5 гривень.

153. В урні 8 білих і 6 чорних кульок. З урни навмання виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кульки чорні.

154. В урні 8 білих і 6 чорних кульок. З урни навмання виймають дві кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

155. В урні 100 кульок, які мають номери 1; 2; 3; 4; ...; 100. З урни навмання виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що номер вийнятої кульки має цифру 5?

156. В партії з 8 деталей є 6 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання деталей рівно три будуть стандартними.

157. З урни, в якій є 5 білих і 3 чорні кулі, виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що куля буде чорною.

158. З урни, в якій є 12 білих та 8 чорних куль, виймають навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть чорні?

159. В урні є 7 білих і 5 чорних куль. Знайдіть ймовірність того, що навмання вийнята куля буде чорною.

160. На окремих картках написано букви "и", "л", "о", "с", "ч". Після змішування беруть по одній картці і кладуть послідовно поряд. Обчисліть ймовірність того, що з цих букв буде складено слово "число".

161. Екзаменаційна програма має 40 питань. На екзамені пропонують відповісти на два з них. Студент підготував відповіді на 30 питань. Яка ймовірність того, що на екзамені йому запропонують два питання, на які він підготував відповіді?

162. В лотереї з 50 білетів 8 виграшних. Яка ймовірність того, що серед перших п'яти навмання вибраних білетів два будуть виграшними?

163. В групі, що складається з 20 студентів, 15 чоловік займаються в математичному гуртку. Яка ймовірність того, що навмання вибраний студент буде членом математичного гуртка?

164. Під кінець дня в магазині залишилось 60 кавунів, з яких 50 стиглих. Покупець вибирає два кавуни. Яка ймовірність того, що обидва кавуни стиглі?

165. На один ряд, який має 7 місць, навмання сідають 7 учнів. Знайти ймовірність того, що три визначені учні будуть сидіти поряд.

166. В екзаменаційний білет входять 4 питання програми, яка вміщує 45 питань. Абітурієнт не знає 15 питань програми. Яка ймовірність того, що він витягне білет, де всі питання йому відомі?

167. На картках написані цілі числа від 1 до 15. Навмання виймаються дві картки. Яка ймовірність того, що сума цифр, написаних на цих картках, буде дорівнювати 10?

168. На книжній полиці навмання розставлені 4 книги з алгебри і 3 з геометрії. Яка ймовірність того, що книги з кожного предмета будуть поряд?

169. В ящику є 15 деталей, 5 з яких пофарбовані. Навмання виймається 5 деталей. Знайти ймовірність того, що 4 з них пофарбовані, а одна – ні.

170. Група туристів, яка складається з 12 юнаків і 8 дівчат, вибирає за жеребкуванням господарчу команду в складі 4 чоловік. Яка ймовірність того, що в числі вибраних буде два юнаки і дві дівчини?

171. Статистичні дані свідчать про те, що при вкладанні капіталу у виробництво певної продукції у розмірі 100 тисяч гривень прибуток отримали 25 разів зі 100 можливих. Знайдіть ймовірність отримання прибутку.

172. По трубопроводу між пунктами A і B перекачують нафту. Знайти ймовірність того, що через певний час роботи трубопроводу пошкодження станеться на ділянці довжиною 100 метрів, якщо відстань від A до B — 2 кілометри.

173. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам щодобово кількість певної продукції від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку: а) трьом замовникам; б) чотирьом замовникам; в) дванадцяти замовникам.

174. За статистичними показниками держави можна зробити висновок, що 68% чоловік, які досягли 60-ліття, досягають також і 70-ліття. Яка ймовірність того, що 60-річний чоловік не досягне свого 70-ліття?

175. Об'єднання складається з двох підприємств. Ймовірність появи бракованої продукції на першому підприємстві 0,1, на другому — 0,2. Знайти ймовірність того, що продукцію без браку випустить тільки одне підприємство.

176. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45 % усіх деталей, від другого — 35 % і від третього — 20 %. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий — 2 % і третій — 8 %. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

177. У 10 ящиках складено деталі двох сортів. У перших трьох по три деталі першого сорту і по сім деталей другого; в четвертому – дев'ять деталей першого і одна деталь другого сорту; в шести ящиках, що залишились, по одній деталі першого і по дев'ять деталей другого сорту. З довільного ящика навмання виймають деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь другого сорту.

178. В ящику знаходиться 12 деталей, виготовлених заводом № 1, 20 деталей — заводом № 2 і 18 — заводом № 3. Ймовірність того, що деталь, виготовлена заводом № 1, відмінної якості, дорівнює 0,9; для деталей, виготовлених на заводах № 2 і № 3, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться відмінної якості.

179. Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для першого підприємства дорівнює 0,1, для другого — 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге — 400. Знайти ймовірність того, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде не бракованою.

180. На склад підприємства надходять деталі із трьох цехів. Перший цех відправив 100 деталей, другий і третій — по 200. Перший і другий цехи дають по 2 % браку, третій — 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь бракована.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

О с н о в н а:

1. Алгебра и начало анализа. / Под ред. Г.Н. Яковлева. М., 1981, ч. I.
2. Алгебра и начало анализа. / Под ред. Г.Н. Яковлева. М., 1981, ч. II.
3. *Брадис В.М.* Четырехзначные математические таблицы (будь-яке видання).
4. Геометрия / Под ред. Н.Г. Яковлева. М., 1976, 1982, ч.I.
5. Геометрия / Под ред. Н.Г. Яковлева. М., 1976, 1982, ч.II.
6. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов: Уч. Пособие. М.: ИНФРА — М, 1998.

Д о д а т к о в а:

7. *Барковський В.В.* Вища математика для економістів: Навчальний посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. — 4-е вид., переробл. та доп. — К.: Центр навчальної літератури, 2005.
8. *Богомолов Н.В.* Практические занятия по математике. М.,1976, 1983.
9. *Валуцє И.И., Дилигул Г.Д.* Математика для техникумов. М., 1980.
10. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М., 2001.
11. *Пономарев К.К.* Курс высшей математики. М., ч. II, 1974.
12. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.* Математика в экономике. Ч. 1, 2. — М.: Финансы и статистика, 1998.
13. *Федин Н.Г.* Геометрия / Под ред. Мантурова О.В. М., 1978.