МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТА ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

І. Г. Крикун

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів ступеня освіти «Бакалавр»
спеціальності 111 «Математика»
освітніх програм «Математика» та
«Комп’ютерна математика та інтелектуальний аналіз даних»

Електронне видання

Вінниця 2023

УДК 519.21 (075.8)
К 85

Затверджено на засіданні ради ФІПТ
ДонНУ імені Василя Стуса
(протокол № 4 від 23.11.2022 р.)

Автор:
І. Г. Крикун, кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензенти:
О. В. Нєсмєлова, заступник директора з наукової роботи Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент;
Є. О. Севостьянов, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник.

Крикун І. Г.
К 85 **Теорія ймовірностей**: навчальний посібник. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2023. – 132 с.

Даний навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти спеціальності 111 «Математика» ступеня освіти «Бакалавр» та містить основні теоретичні поняття, відомості та результати, приклади розв’язання типових задач, питання та задачі для самоперевірки з дисципліни «Теорія ймовірностей».

Також цей навчальний посібник може бути використаний здобувачами вищої освіти інших спеціальностей та викладачами, які застосовують теорію ймовірностей у власних курсах та дослідженнях.

УДК 519.21 (075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У кожній науці стільки науки,
скільки в ній математики.
Іммануїл Кант

В наш час теорія ймовірностей та, заснована на ній математична статистика є саме тими науками, з використанням яких ми часто зіштовхуємося в дорослому і професійному житті. Вибори та агітаційні кампанії, різноманітні соціологічні опитування та економічні показники в новинах, релігійна пропаганда, з якими хоч-не-хоч, а повсякчас зустрічаєшся, потребують для сучасної людини не лише **знання** про що саме говорять ті чи інші цифри, факти, показники, та **розуміння** того, як ці цифри було отримано, а навіть **усвідомлення** того, що цими цифрами та фактами можуть маніпулювати, приховувати ними справжній стан справ. Тому ці теорії становлять обов'язкову частину математичного циклу дисциплін усіх вищих навчальних закладів.

Теорія ймовірностей як наука є однією з наймолодших математичних дисциплін. Період її бурхливого розвитку почався в 30-ті роки XX століття і триває і нині. Приємно відмітити, що значний в світовому масштабі внесок в розвиток теорії ймовірностей і її підрозділів зробили саме українські вчені. Й. І. Гіхман та А. В. Скороход разом з японцем К. Іто є засновниками найдинамічнішої частини математики – теорії випадкових процесів. В теорії ймовірностей помітним також є внесок таких вчених як А. А. Дороговцев, В. С. Королюк, С. Я. Махно, Ю. С. Мішура, М. І. Портенко, А. Ф. Турбін, М. І. Ядренко та їхні численні учні, одним із яких є автор даного посібника.

Курс «Теорія ймовірностей» повинен сприяти формуванню у студентів діалектико-матеріалістичного світогляду, розвитку їх розумових здібностей, прищеплювати вміння точно і логічно мислити, аргументувати свої твердження, розвивати абстрактне мислення, творчу та просторову уяву, сприяти підвищенню наукової і математичної культури.

Даний навчального посібника крім теорії, містить розв'язані типові приклади, питання та задачі для самостійної роботи, таблиці математичної статистики, які допоможуть краще пізнати принади справжньої науки. Для зручності орієнтування в тексті посібника в ньому є ще й предметний покажчиків термінів, що використовуються.

Позначення та символи, що використовуються

– нові поняття виділяються словом **Означення** та набираються р о з р і д ж е н и м ш р и ф т о м;

– важливі формули нумеруються з правого боку – (5.3);

– важливі результати виділяються словами **Теорема** або **Наслідок**;

– найважливіші результати та формули додатково виділяються $\boxed{\text{рамкою}}$;

– значком ● помічені різні підказки та зауваження, які будуть корисними для кращого розуміння тексту;

– текст типу "Означення 1.8" означає, що це Означення 8 з Теми 1.

Про рекомендовану літературу

Перелік рекомендованої літератури розміщений в кінці даного навчального посібника. Для зручності читача список літератури розбито на три частини: підручники з теорії, практикуми та довідники. Всі ці книги доступні в електронному варіанті в мережі Інтернет.

* * *

Автор буде радий отримати відгуки та пропозиції щодо даного навчального посібника на електронну пошту i.krykun@donnu.edu.ua

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Вступ. Основні означення. Події

Усі процеси, що ми спостерігаємо в реальному житті, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Такі фактори дуже часто є випадковими, невідомими – погода, час очікування, майбутня урожайність, тривалість життя – але, при цьому, і такими, що мають певні закономірності. Такі закономірності і вивчає теорія ймовірностей.

Означення 1. Результат спостереження, досліду, експерименту називають п о д і є ю. Позначають події великими латинськими буквами A, B, C, а описують їх словами в лапках “…” або фігурних дужках {…}:

A = “монета після підкидання випаде гербом”.

● Для того, щоб результат експерименту був подією, має бути можливою повторюваність експерименту при незмінних умовах.

Події називають:

1) д о с т о в і р н и м и – коли подія обов’язково відбувається;

2) н е м о ж л и в и м и – коли подія обов’язково не відбувається;

3) в и п а д к о в и м и – коли подія може відбутися, а може і не відбутися.

● В подальшому будемо працювати саме з випадковими подіями, тому слово “випадкова”, як правило, будемо пропускати.

Означення 2. Подія, що відбувається внаслідок проведення одного і лише одного експерименту називається е л е м е н т а р н о ю (п р о с т о ю) п о д і є ю (коротко ЕП). Позначають малими літерами[1] ω_1, ω_2, ω_3.

● Елементарні події – це так події, які не можна (неможливо) розкласти на простіші.

Означення 3. Множина **всіх** елементарних подій, що можуть відбутися в експерименті, називається п р о с т о р о м е л е м е н т а р н и х п о д і й (в подальшому тексті ПЕП). Позначається великою літерою[2] Ω.

[1] ω – буква грецького алфавіту, яка вимовляється *омега* [*маленьке*].

Означення 4. Якщо подію можна розкласти на елементарні події, то вона називається складеною (складною) подією. Якщо подія A складається з елементарних ω_1, …, ω_n, то елементарні події ω_1, …, ω_n називають подіями, що сприяють події A.

Приклад 1. Монету підкидають 1 раз. Які елементарні події виникають в цьому експерименті?

Розв'язання. Це дві елементарні події: ω_1={монета випала гербом} та ω_2={монета випала цифрою}. Як правило, використовують скорочені (але зрозумілі) позначення: ω_1={Г}, ω_2={Ц}.

Означення 5. Якщо простір елементарних подій містить скінченне число елементів, то його називають дискретним. Інакше – неперервним.

1.2. Операції (дії) над подіями. Діаграми Ейлера-Венна

Для кращого розуміння дій над подіями використовують їх геометричну інтерпретацію – діаграми Ейлера-Венна. Це прямокутник і кола (овали), які повністю лежать в прямокутнику і перетинаються (знаходяться в загальному випадку). Прямокутник сприймають як весь простір елементарних подій Ω, а круги (овали) сприймаються як події. Штриховкою позначають відповідну частину геометричних фігур, що утворилися.

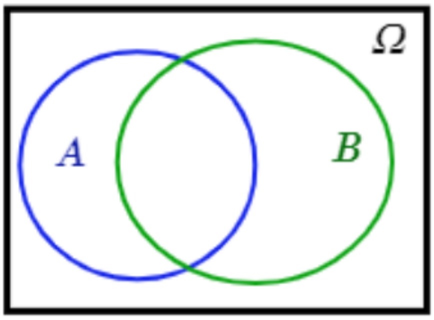


Рис. 1.1. Діаграма Ейлера-Венна

● Для подібного геометричного тлумачення використовують і інші назви: круги Ейлера або діаграми Венна.

[2] Ω – буква грецького алфавіту, вимовляється *омега* [*велике*].

● Поняття “подія” є окремим випадком такого поняття, як “множина”. З множинами оперують як теорія множин, так і теорія логіки. Тому в теорії ймовірностей широко використовують позначення з обох згаданих теорій.

Отже, над множинами/подіями розглядають такі операції:

1. **Об’єднання** (додавання). Об’єднанням (сумою) подій A і B називається подія C, яка відбувається тоді, коли настає **хоча б одна** з подій A чи B, тобто відбувається або подія A, або подія B, або обидві події одночасно.

Позначають: $C = A \bigcup B$ або $C = A + B$.

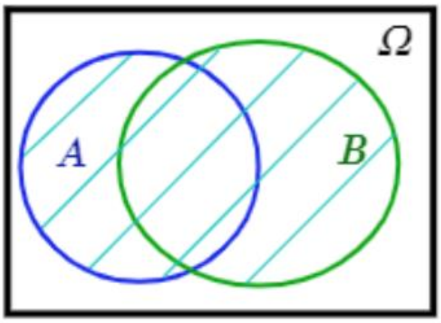


Рис. 1.2. Об’єднання подій A і B

2. **Перетин** (множення). Перетин (добуток) подій A і B – це така подія C, яка відбувається тоді, коли одночасно настають **обидві** події A і B.

Позначають $C = A \bigcap B$ або $C = AB$.

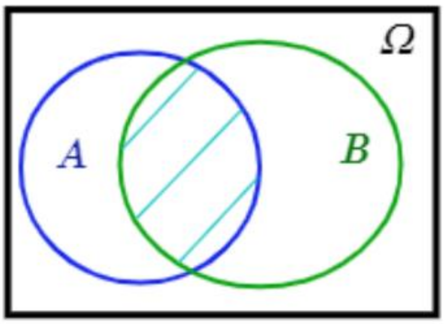


Рис. 1.3. Перетин подій A і B

Приклад 2. Підкидають по черзі 2 монети. Подія A полягає в тому, що на першій монеті випав герб, подія B полягає в тому, що герб випав на другій монеті. Описати події $A \bigcup B$ і $A \bigcap B$.

Розв’язання. $A \bigcup B$ – подія, яка полягає в тому, що герб випав на першій монеті, на другій, або на обох монетах, тобто “герб випав хоча б на 1 монеті”.

Подія $A \bigcap B$ полягає в тому, що “герб випав на обох монетах одночасно”.

3. **Різниця** (мінус). Різницею подій A і B називається подія C, яка відбувається тоді, коли подія A настане, а подія B – не настане.

Позначають $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.

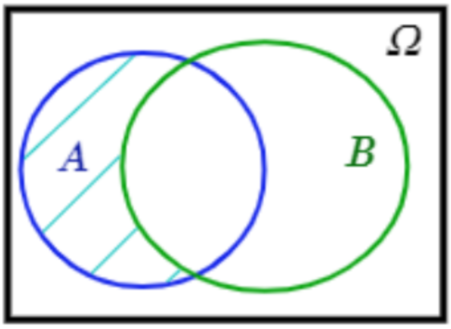


Рис. 1.4. Різниця подій A і B

4. **Доповнення** (заперечення). Доповненням (запереченням) події A називається така подія C, яка відбувається тоді, коли подія A не настає.

Позначають $C = \overline{A}$.

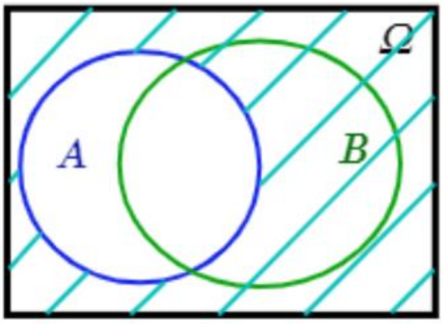


Рис. 1.5. Доповнення (заперечення) події A

● Подію $\overline{A}$ ще називають подією, протилежною до A або не A.

Означення 6. Подію–доповнення до ПЕП Ω називають порожньою множиною. Позначають спеціальним символом: $\varnothing$.

Означення 7. Події A і B, які в одному випробуванні не можуть настати одночасно, називаються несумісними. Це позначають так:

$$A \bigcap B = \varnothing .$$

Інакше події називаються сумісними.

Властивості операцій над подіями.

1. $A\bigcup A = A,\ A\bigcap A = A;\quad A\bigcup\Omega = \Omega,\ A\bigcap\Omega = A;\quad A\bigcup\varnothing = A,\ A\bigcap\varnothing = \varnothing.$

2. Комутативність операцій об’єднання і перетину:

$$A\bigcup B = B\bigcup A,\ \ A\bigcap B = B\bigcap A\ .$$

3. $\overline{A} = \Omega \setminus A,\qquad \overline{\Omega} = \varnothing;\qquad A\setminus B = A\bigcap\overline{B}\ .$

4. Асоціативність операцій об’єднання і перетину :

$$A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup B\bigcup C,$$

$$A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap B\bigcap C.$$

5. Дистрибутивність об’єднання подій відносно перетину і навпаки :

$$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C),$$

$$A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$$

6. Правила де Моргана:

$$\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}\ ,\qquad \overline{A\bigcap B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}\ .$$

Зауваження 1. Для доведення цих властивостей, як і для розв’язання задач на операції з подіями, потрібно на діаграмах Ейлера-Венна розглянути всі можливі ситуації взаємного розташування множин A і B (відповідних овалів): коли вони перетинаються, не перетинаються, співпадають, одна множина міститься в іншій, одна подія є порожньою множиною або ПЕП.

Це потрібно зробити для обох частин рівності і якщо штриховки співпадатимуть в усіх випадках, то рівність є доведеною.

1.3. Класичне означення ймовірності

Мірою можливості настання події у випробуванні/досліді/експерименті є число, яке називається **ймовірністю** цієї події.

Зокрема часто зустрічається ситуація, коли внаслідок проведення експерименту може відбутися одна із багатьох **рівноможливих** подій. В такій ситуації ймовірність будь-якої події знаходиться за наступною формулою, яка називається к л а с и ч н и м о з н а ч е н н я м й м о в і р н о с т і .

Означення 8. Ймовірністю події A називається відношення кількості m елементарних подій, які сприяють події A, до загальної кількості n всіх елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

З означення випливають наступні **властивості ймовірності**:

1) ймовірність достовірної події дорівнює одиниці;

2) ймовірність неможливої події дорівнює нулю;

3) ймовірність будь-якої випадкової події є числом між нулем і одиницею:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

● Ймовірність – це безрозмірна величина (тобто без одиниць виміру), число між 0 і 1.

Приклад 3. Кубик підкинули 1 раз. Яка ймовірність, що число очок, що випало, буде кратним 3?

● В подібних задачах, виходячи із вимог здорового глузду, практичного досвіду та за відсутності іншої умови, кубик вважаємо симетричним і події, що полягають у випадінні конкретного числа очок, вважаємо рівноможливими.

Розв'язання. На кубику може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Отже, загальне число всіх рівноможливих елементарних подій $n = 6$. Подія A = "число очок, що випало, буде кратним 3" відбудеться, якщо на кубику випаде 3 або 6 очок, тобто кількість елементарних подій, які сприяють події A, $m = 2$. Звідси за формулою (1.1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Означення 9. Відносною частотою або статистичною ймовірністю події A називається відношення числа випробувань m, в яких подія настала, до загального числа n фактично виконаних випробувань:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

* **Зауваження 2.** В теорії множин використовують спеціальні позначення. Якщо елемент *a* належить множині *A*, це позначають значком $\in$, який вимовляється “належить”: $a \in A$.

Якщо ж множина *A* повністю міститься в множині *B* (тобто множина *A* ніби “строго менше” множини *B*), використовують спеціальний значок $\subset$, який вимовляється “міститься”: $A \subset B$, на відміну від ситуації, коли множина *A* міститься або співпадає з множиною *B* (множина *A* ніби “не більше” множини *B*), це позначають так: $A \subseteq B$.

* *Приклад до зауваження.*

Нехай маємо елемент $x = 1$ та дві множини: $A = (0;2)$, $B = [0;3]$. Тоді використовують такі позначення: $x \in A$, $x \in B$, $A \subset B$, $A \subseteq B$.

Питання та задачі до теми

1. Що таке подія? Які події бувають?
2. Яку подію називають елементарною? Складною? Що таке простір елементарних подій?
3. Що таке події, які сприяють іншій події?
4. Які дії над подіями існують? Зобразіть їх на діаграмах Ейлера-Венна.
5. Яку множину називають порожньою множиною?
6. Наведіть основні властивості операцій над подіями.
7. Наведіть класичне означення ймовірності.
8. Які основні властивості ймовірності випливають з класичного означення ймовірності ?
9. Наведіть означення статистичної ймовірності.

Задача 1. Монету підкидають 3 рази. Описати простір елементарних подій цього експерименту.

Задача 2. Маємо дві множини: $\Omega_1 = \{1; 2; 3\}$, $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4\}$. Утворюють впорядковані пари чисел так, що перше число – з множини Ω_1, а друге – з Ω_2. Описати простір елементарних подій цього експерименту.

Задача 3. Два стрільці стріляють по мішені. Нехай подія A полягає в тому, що перший стрілець влучив, подія B – другий стрілець влучив. Описати словами події $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Задача 4. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна подію $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Задача 5. Нехай A, B, C – довільні події. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна та записати символами операцій над подіями подію “відбулось не більше однієї події з A, B, C”.

Задача 6. Підкидають 2 кубики. Результат експерименту – кількість очок, що випали на кубиках. Описати простір елементарних подій даного експерименту та події A = {обидва рази не більше 3 очок}, B = {хоча б раз менше 2 очок}, $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$. Знайти ймовірності всіх цих подій.

Задача 7. У ящику міститься 15 деталей, з яких 6 – бракованих. Взяли навмання 1 деталь. Яка ймовірність того, що деталь стандартна?

Задача 8. Маємо 3 лампочки, кожна з яких може перегоріти. Описати простір елементарних подій цього експерименту та події A = {перегоріло не більше однієї лампочки}, B = {перегоріло не менше двох лампочок}. Обчислити ймовірності $P(A)$, $P(B)$.

Тема 2. Комбінаторика

2.1. Комбінаторна ймовірність

Часто в задачах простір елементарних подій містить дуже велику кількість рівноможливих елементарних подій. В такій ситуації всі елементарні події виписувати не варто, натомість ймовірність деякої події A знаходять за формулою, аналогічній класичному означенню ймовірності (Означення 1.8):

Означення 1. (Комбінаторна ймовірність)

$$P(A) = \frac{\text{кількість сприятливих (події } A\text{) комбінацій}}{\text{загальна кількість комбінацій}}. \tag{2.1}$$

Тому треба вміти знаходити кількість різних комбінацій.

Комбінаторика вивчає кількості підмножин (вибірок), які можна скласти із елементів довільної природи заданої скінченної множини. Формули комбінаторики використовують при обчисленні ймовірностей.

2.2. Класифікація множин та операцій

Множини (підмножини, вибірки) бувають:

– впорядковані – коли важливий порядок, за яким елементи входять в множину (призери змагань);

– невпорядковані – коли порядок, за яким елементи входять в множину, є неважливим (виграшні кульки в лотереї; збірна команда).

Операції (з побудови вибірок, підмножин) бувають:

– з повторенням (повторні) – елементи в вибірці можуть повторюватись (призери різних змагань);

– без повторення (безповторні) – елементи в вибірці не можуть повторюватись (призери одного змагання; збірна команда).

Розв'язання будь-якої задачі на комбінаторику слід почати із формалізації умови: перевести задачу в математичну форму і з'ясовувати вид підмножини і спосіб її утворення.

Отже, при побудові підмножин деякої множини можлива одна з чотирьох ситуацій. Наведемо формули для всіх цих ситуацій.

2.3. Комбінаторні формули

Означення 2. Добуток всіх натуральних чисел до числа n включно називають факторіалом числа n і позначають[3]

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n. \tag{2.2}$$

Крім того, вважають за означенням $0! = 1$.

В наступних означеннях розглядаємо експеримент, в якому є задана множина з n елементів і з неї деяким способом утворюють вибірку (вибрану підмножину) в k елементів. Наприклад, утворюють виграшну комбінацію кульок в лотереї або вибирають переможців якихось змагань.

Означення 3. Перестановка з n елементів – впорядкована безповторна вибірка з n елементів. Кількість всіх можливих перестановок позначають P_n і знаходять за формулою

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n. \tag{2.3}$$

Приклад 1. Маємо 5 кубиків з буквами : А Л М О С .

а) З цих кубиків утворюють слова з 5 букв. Яка ймовірність того, що утвориться слово “МАСЛО” ?

б) З цих кубиків утворюють слова з 3 букв. Яка ймовірність того, що утвориться слово “СОМ” ?

Розв’язання. Користуємося формулою комбінаторної ймовірності (2.1).

а) Знайдемо загальну кількість комбінацій в експерименті. Маємо 5 місць для букв. На першому місці може стояти будь-яка буква з 5 наявних; на другому місці – будь-яка буква, крім тієї, яка стоїть на першому місці, тобто будь-яка з 4, що залишилися. І так далі: $\underbrace{\textit{перша}}_{5\,\text{шт}}\ \underbrace{\textit{друга}}_{4\,\text{шт}}\ \underbrace{\textit{третя}}_{3\,\text{шт}}\ \underbrace{\textit{четверта}}_{2\,\text{шт}}\ \underbrace{\textit{п'ята}}_{1\,\text{шт}}$.

[3] Вимовляють : $n!$ – “*ен-факторіал*”.

Вибір другої букви від вибору першої не залежить. Тому загальна кількість комбінацій дорівнює: $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5!=120$ шт.

Тепер знайдемо кількість сприятливих (утворенню слова “МАСЛО”) комбінацій. На першому місці може стояти тільки буква “М” – 1 шт., на другому місці – тільки буква “А”. І так далі: $\underbrace{М}_{1\,шт}\ \underbrace{А}_{1\,шт}\ \underbrace{С}_{1\,шт}\ \underbrace{Л}_{1\,шт}\ \underbrace{О}_{1\,шт}$. Тому кількість сприятливих комбінацій дорівнює: $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$ шт.

За формулою (2.1) P(“МАСЛО”) = 1/120 .

б) Знайдемо загальну кількість комбінацій в експерименті. Маємо 3 місць для букв. На першому місці може стояти будь-яка буква з 5 наявних; на другому місці – будь-яка з 4, що залишилися. І так далі: $\underbrace{перша}_{5\,шт}\,\underbrace{друга}_{4\,шт}\,\underbrace{третя}_{3\,шт}$.

Вибір другої букви від вибору першої не залежить. Тому загальна кількість комбінацій дорівнює: $5\cdot4\cdot3=60$ шт.

Кількість сприятливих (утворенню слова “СОМ”) комбінацій аналогічно попередньому дорівнює 1 шт.

За формулою (2.1) P(“СОМ ”) = 1/60 .

● Наступна формула виводиться аналогічно пункту б) Прикладу 1.

Означення 4. Нехай треба вибрати k **різних** елементів з наявних n різних елементів ($0\le k\le n$), і їх **порядок** у вибірці **важливий**. Таку вибірку називають розміщенням з n елементів по k елементів. Кількість всіх можливих таких розміщень позначають A_n^k і знаходять за формулою[4]

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.4}$$

● Розміщення з n елементів по k елементів A_n^k – **безповторна впорядкована** вибірка з n елементів по k елементів.

---

[4] Вимовляють: A_n^k – “*а із ен по ка*”.

Означення 5. Нехай треба вибрати k **різних** елементів з наявних n різних елементів ($0 \le k \le n$), і їх **порядок** у вибірці **неважливий**. Таку вибірку називають сполукою з n елементів по k елементів. Кількість всіх можливих таких сполук позначають C_n^k і знаходять за формулою[5]

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.5}$$

● Сполука з n елементів по k елементів – **безповторна невпорядкована** вибірка з n елементів по k елементів.

Приклад 2. Нехай маємо множину з трьох елементів a,b,c. Тоді вибірки
– $\{a,b,c\},\{a,c,b\},\{b,a,c\},\{b,c,a\},\{c,a,b\},\{c,b,a\}$ – це перестановки з 3 елементів;
– $\{a,b\},\{b,a\},\{b,c\},\{c,b\},\{a,c\},\{c,a\}$ – розміщення з 3 елементів по 2 елемента;
– $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$ – це сполуки з 3 елементів по 2 елемента.
Порівняйте їх кількість з кількостями, обчисленими за формулами (2.3)–(2.5).

Приклад 3. Маємо групу студентів з 15 осіб. Скількома способами можна вибрати збірну з : а) баскетболу (5 осіб)? б) міні-футболу (5 осіб)?

Розв'язання. а) Згідно правил, всі баскетболісти мають однакові функції. Тому під час вибору збірної не має значення, потрапить студент А першим чи п'ятим. Зрозуміло, що в збірній всі гравці – різні люди. Тому вибір збірної здійснюється безповторним і невпорядкованим способом, а значить кількість способів утворення збірної дорівнює кількості сполук, які можна утворити з 15 різних елементів (студентів), вибираючи з них 5 (студентів):

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 10!} = \frac{1\cdot 7\cdot 13\cdot 3\cdot 11}{1} = 3003 \text{ шт.}$$

б) Згідно правил, у міні-футболі є 1 воротар і 4 польові гравці. Тому під час вибору збірної спочатку треба вибрати студента-воротаря. Зрозуміло, що з 15 студентів вибрати одного можна 15 способами (15 вийде і за будь-якою

[5] Вимовляють: C_n^k – "*це із ен по ка*".

формулою – A_{15}^1 чи C_{15}^1 – оскільки для 1 елемента не має значення впорядковано він вибирається чи ні).

Далі треба вибрати 4 польових з 14 студентів, що залишилися. Це робиться безповторним і невпорядкованим способом аналогічно пункту а):

$$C_{14}^4=\frac{14!}{4!(14-4)!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 10!}=\frac{7\cdot 13\cdot 1\cdot 11}{1}=1001 \text{ шт.}$$

Далі, оскільки вибір польових гравців не залежить від вибору воротаря, загальне число способів дорівнює $15\cdot C_{14}^4=15\cdot 1001=15015$ шт.

Це були безповторні вибірки. Тепер поговоримо про вибірки з можливим повторенням елементів.

Означення 6. Нехай треба вибрати k елементів, **які можуть повторюватись**, з наявних n різних елементів, і їх **порядок** у вибірці **важливий**. Кількість всіх таких можливих вибірок дорівнює

$$n^k=\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k \text{ штук}} \tag{2.6}$$

Означення 7. Нехай треба вибрати k елементів, **які можуть повторюватись**, з наявних n різних елементів, і їх **порядок** у вибірці **неважливий**. Кількість всіх таких можливих вибірок дорівнює

$$C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{2.7}$$

Приклад 4. Маємо групу з 15 осіб. Вони відвідають (або ні) наступну лекцію. а) Скільки варіантів розставлення “н” в журналі групи? б) Скільки всього існує варіантів кількості “н” в журналі групи?

Розв’язання. а) Для кожного студента є дві можливі ситуації – або отримати “н”, або не отримати. Отримання або ні “н” одним студентом не впливає на інших, тому всього варіантів розставлення “н” в журналі групи

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{15 \text{ штук}}=2^{15}=32768 \text{ шт.}$$

Такий же результат маємо з формули (2.6), оскільки ставимо на 15 місць із важливим порядком (студенти – різні) один з двох значків (“н” або нічого).

б) Неважко здогадатися, що кількість “н” в журналі групи може дорівнювати 0, 1, 2, … , 15 шт. Тобто всього існує 16 варіантів кількості “нб” в журналі групи.

За формулою (2.7), вибираючи на 15 місць із неважливим порядком один з двох значків (“н” або нічого):

$$C_{2+15-1}^{15} = C_{16}^{15} = \frac{16!}{15!(16-15)!} = \frac{16 \cdot 15!}{15!1!} = 16\,\text{шт.}$$

Зауваження 1. Як видно, комбінаторні формули (крім (2.5) і (2.7)) часто легше отримали виходячи з логічних міркувань, ніж запам’ятати формулу.

Зауваження 2. Для безповторних вибірок “місця вибирають з місць” або “людей з людей” (а не “місця з людей” !), а для повторних вибірок спочатку задача зводиться до більш абстрактної (див. Приклад 5).

2.3.1. Таблиця комбінаторних формул

Після формалізації умови (з’ясування того, які множини нам потрібні і яким способом вони утворюються), для вибору k необхідних елементів з n наявних різних елементів потрібно скористатися однією з 4 формул:

ОПЕРАЦІЇ / МНОЖИНИ	БЕЗПОВТОРНІ	ПОВТОРНІ
ВПОРЯДКОВАНІ	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
НЕВПОРЯДКОВАНІ	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

2.4. Правила комбінаторики

При розв'язуванні задач комбінаторики часто використовують певні правила (вони називаються правила вибору).

Правило добутку. Якщо об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору інший об'єкт B може бути вибраний n способами, то вибір **пари** "A і B" може бути здійснений mn способами. Це правило справедливе, коли вибір A і B **незалежний**.

Аналогічно для k об'єктів. Якщо кожен з k об'єкт можна вибрати $n_1,...,n_k$ способами відповідно, то всі ці k об'єктів можна вибрати $n_1 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Правило суми. Якщо об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт B може бути вибраний n способами, то вибір **одного об'єкта** "або A, або B" може бути здійснений $m+n$ способами. Слід мати на увазі, що вибори A і B тут є **взаємно виключними**.

Аналогічно для k об'єктів. Якщо кожен з k об'єктів можна вибрати $n_1,...,n_k$ способами, то один з цих k об'єктів можна вибрати $n_1 + ... + n_k$ способами.

Приклад 5. 2 рази кидають кубик. Результат експерименту – дві цифри, кількість очок, що випало за два рази. Скільки елементарних подій в досліді?

Розв'язання. На першому місці може бути цифра від 1 до 6 і, незалежно від першої, на другому місці – теж цифра від можуть 1 до 6, тобто такі події: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, …, 66. Всього 6 * 6 = 36 шт.

Приклад 6. З пункту А в пункт Б веде 3 дороги, з пункту Б до пункту В – 4 дороги. Скількома способами можна добратись з пункту А в пункт В, проїхавши при цьому через пункт Б?

Розв'язання. Вибір дороги з пункту Б в пункт В не залежить від вибору дороги з пункту А в пункт Б. Вибрати треба пару доріг: з А в Б, а потім – з Б в В. Тому за правилом добутку, з пункту А в пункт В через пункт Б можна добратися 3 * 4 = 12 способами.

Приклад 7. З пункту А в пункт Б можна добратись або через пункт К (2 дороги), або через пункт Л (5 доріг). Скількома способами можна добратись з пункту А в пункт Б?

Розв'язання. В цій ситуації треба вибрати треба одну дорогу: з А в Б, або через К, або через Л. Вибір через який пункт – взаємно виключний. Тому за правилом суми, з пункту А в пункт Б можна добратися 2 + 5 = 7 способами.

Питання та задачі до теми

1. Наведіть означення комбінаторної ймовірності.
2. Які види множин і операцій з їх утворення бувають?
3. Що таке $n!$?
4. Наведіть означення перестановки та формулу знаходження P_n .
5. Наведіть означення розміщення та формулу знаходження A_n^k .
6. Наведіть означення сполуки та формулу знаходження C_n^k .
7. Які правила комбінаторики існують? Сформулюйте їх.

Задача 1. Скількома способами можна скласти список з 12 учнів ?

Задача 2. Маємо 10 цифр: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. З них утворюють чотирьохзначні числа без повтору цифр.

а) Яка ймовірність того, що в підсумку вийде число 2019?

б) Що зміниться, якщо цифри в числі можуть повторюватись?

Задача 3. Маємо групу студентів з 15 осіб. За заняття кожен з них отримує від 1 до 5 балів. Скільки можливих варіантів розстановки оцінок в журналі групи?

Задача 4. Скількома способами з 15 осіб можна вибрати делегацію:

а) з трьох людей; б) з п'яти людей, одна з яких – голова делегації.

Задача 5. В лотереї випадає 6 виграшних кульок із 49 наявних. Можна вибрати будь-які 6 номерів. Яка ймовірність вгадати:

а) всі 6 номерів? б) 5 номерів?

в) 4 номера?   *г) що зміниться, якщо можна вибрати 7 номерів?

Задача 6. Скільки діагоналей є у правильному N-кутнику?

а) $N = 5$;   б) $N = 6$;   в) $N = 10$;   * г) N – довільне.

Задача 7. 10 студентів треба посадити на 10 стільців, які стоять в лінію. Скільки варіантів розміщення студентів існує, якщо:

а) немає обмежень на розташування студентів?

б) студентка Марія не хоче сидіти поруч із студентом Олександром?

в) студентка Марія не хоче сидіти поруч із Олександром і Сергієм ?

* г) що зміниться в обчисленнях та підсумку кожного пункту, якщо стільці стоятимуть не в лінію, а навколо круглого столу?

* *Задача 8.* На потоці є 30 студентів, серед яких 10 хлопців. З усіх студентів вибирають групу в 8 студентів. Скільки існує варіантів складу цієї групи, щоб в неї хлопців потрапило а) точно 5? б) не менше 6?

* *Задача 9.* 25 студентів треба розмістити в 3 аудиторіях. Скільки існує варіантів розміщення студентів по аудиторіях, якщо

а) немає жодних обмежень на кількість студентів в аудиторіях?

б) в першій аудиторії має бути не менше 5 студентів?

в) в першій аудиторії має бути не більше 6 студентів?

Тема 3. Геометрична ймовірність. Аксіоми теорії ймовірностей. Незалежність подій

3.1. Геометрична ймовірність

Іноді при розв'язанні задач теорії ймовірностей будується така математична модель задачі, в якій використовуються геометричні об'єкти і їх міри – довжини, площі, об'єми. Це відбувається тоді, коли немає скінченного простору елементарних подій, а є нескінченно багато елементарних подій.

В такій ситуації ймовірність деякої події A знаходять за формулою, аналогічній класичному означенню ймовірності (див. Означення 1.8):

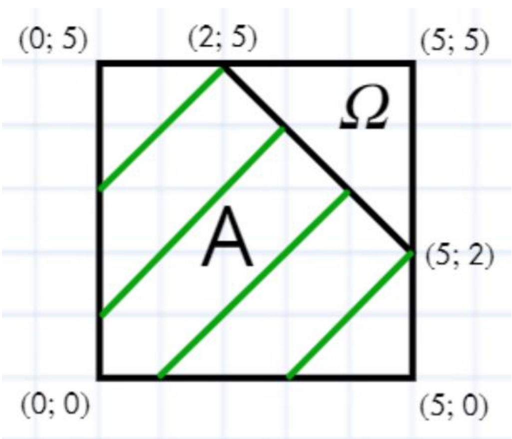
Означення 1. (Геометрична ймовірність)

$$P(A) = \frac{\text{геометрична міра }(A)}{\text{геометрична міра }(\Omega)}. \tag{3.1}$$

● Геометричною мірою може бути довжина, відстань, площа, об'єм, кількість. Вибір конкретної геометричної міри залежить від умови задачі.

Приклад 1. Два студента називають по одному числу між 0 і 5. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не перевищить 7.

Розв'язання. Позначимо через x число, яке назвав перший студент, а через y – число, яке назвав другий студент. Ці числа між собою незалежні. Тому весь простір елементарних подій Ω цього експерименту – це квадрат зі стороною в 5 в просторі Oxy. Тепер перепишемо в термінах координат x та y подію, ймовірність якої треба знайти: A = "сума цих чисел не перевищить 7", отже A – це множина точок (x; y), таких що $x + y \le 7$ або $A = \{(x; y) : y \le 7 - x\}$. Геометрично в такій інтерпретації події A відповідає частина Ω, яка лежить нижче прямої $y = 7 - x$:



Отже, геометрична міра Ω дорівнює площі всього квадрата зі стороною 5, тобто геометрична міра Ω = 25 кв.

одиниць, а геометрична міра події A дорівнює площі заштрихованої частини квадрату, тобто геометрична міра події $A = 25 - 3^2/2 = 21{,}5$ кв. одиниць.

Тому, за формулою (3.1), ймовірність того, що сума названих студентами чисел не перевищить 7 дорівнює

$$P(A) = \frac{\text{геометрична міра } (A)}{\text{геометрична міра } (\Omega)} = \frac{21{,}5}{25} = 0{,}82 .$$

● В умові не було сказано, що студенти називають цілі числа. Інакше задача мала б скінченний ПЕП і простіше розв'язання.

3.2. Аксіоматика теорії ймовірностей

Якщо простір елементарних подій Ω містить багато елементів (n штук), то всі його можливі підмножини – це 2^n штук – буває дуже складно розглядати, а часто і непотрібно. Можна обійтися меншим набором підмножин.

Отже, розглядаємо простір елементарних подій Ω.

Означення 2. Система подій F, побудована з елементів Ω, називається а л г е б р о ю п о д і й, якщо виконуються властивості:

1. $\Omega \in F$.

2. З того, що $A, B \in F$ випливає, що $A \bigcup B \in F$, $A \bigcap B \in F$, $A \setminus B \in F$.

З означення випливає, що порожня множина $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$ має обов'язково належати алгебрі F.

Для фіксованого Ω можна побудувати різні алгебри. Але **завжди** найменшою буде $F_{\min}=\{ \varnothing ; \Omega \}$; найбільшою буде $F_{\max}$, що складається з 2^n штук всіх можливих підмножин Ω .

Приклад 2. Нехай $\Omega = \{ 1; 2; 3; 4\}$. Побудувати алгебри $F_{\min}$ та $F_{\max}$.

Розв'язання. Як і завжди, $F_{\min}=\{ \varnothing ; \Omega \}$.

$F_{\max}$ складається з $2^4 = 16$ елементів: $F_{\max} =\{ \varnothing$; (1); (2); (3); (4); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4); (1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 3, 4); (2, 3, 4); $\Omega \}$.

Означення 3. Нехай на просторі елементарних подій Ω задано алгебру подій *F*. Числова функція *P*, що визначена на елементах алгебри *F*, називається й м о в і р н і с т ю, якщо виконуються такі а к с і о м и й м о в і р н о с т і:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $0 \le P(A) \le 1$ для будь-якої $A \in F$.
3. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{3.2}$$

Означення 4. Трійка об’єктів: простір елементарних подій Ω; побудована на просторі елементарних подій Ω алгебра подій *F*; визначена на елементах алгебри *F* ймовірність *P* – (Ω, *F*, *P*) – називається й м о в і р н і с н и м п р о с т о р о м.

Наслідки аксіом

1. Ймовірність протилежної події :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3.3}$$

1.1. Ймовірність порожньої множини :

$$P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0.$$

2. Монотонність ймовірності:

2.1. Якщо $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$.

2.2. Якщо $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

3.3. Умовні ймовірності. Незалежні події

Події *A* і *B* є залежними, якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої. Інакше події незалежні.

Приклад 3. Підкидаємо гральний кубик 1 раз. Результат експерименту – кількість очок, що випала. Розглянемо події: *A* = “випало мало очок (1 або 2 або 3)”; *B* = “випала парна кількість очок”. Якими є події *A* та *B* – залежними чи незалежними?

Розв'язання. Подія *B* = "випало 2 або 4 або 6 очок". Тому якщо подія *A* відбулася (тобто на кубику випало 1 або 2 або 3 очок), то подія *B* відбудеться з ймовірністю 1/3; якщо ж подія *A* не відбулася (тобто на кубику випало 4 або 5 або 6 очок), то подія *B* відбудеться з ймовірністю 2/3.

Отже, ймовірність появи події *B* залежить від того, чи відбулась подія *A*. Таким чином, події *A* і *B* є залежними.

Зауважимо, що аналогічно і навпаки – ймовірність появи події *A* залежить від того, чи відбулась подія *B* : якщо подія *B* відбулася (тобто на кубику випало 2 або 4 або 6 очок), то подія *A* відбудеться з ймовірністю 1/3; якщо ж подія *B* не відбулася (тобто на кубику випало 1 або 3 або 5 очок), то подія *A* відбудеться з ймовірністю 2/3.

Означення 5. Умовною ймовірністю події *A* за умови, що подія *B* відбулася називається така ймовірність події *A*, яка обчислюється за умови, що подія *B* відбулася :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \tag{3.4}$$

З формули (3.4) отримуємо, що (при $P(B) \neq 0$)

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{3.4.1}$$

Властивості умовних ймовірностей.

1. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то $P(A|B) = 0$.

2. Якщо $A \cap B = B$, то $P(A|B) = 1$.

3. В інших ситуаціях $0 \le P(A|B) \le 1$.

Приклад 4. Нехай простір елементарних подій Ω = { 1; 2; 3; 4; 5; 6 }. Навмання витягають одне число з множини Ω . Розглянемо події: *A* = "вийняте число кратне 2"; *B* = "вийняте число кратне 3".

а) Обчислити умовні ймовірності $P(A|B)$ та $P(B|A)$.

б) Чи є незалежними події *A* і *B*?

Розв'язання. В Ω входять 6 елементарних подій – { 1; 2; 3; 4; 5; 6 }. З умови та властивостей дій над подіями: подія $A\bigcap B$ = "вийняте число кратне 2 і кратне 3" = "вийняте число кратне 6". Події, що сприяють події *A*: { 2; 4; 6 }; події, що сприяють події *B*: { 3; 6 }; події, що сприяють події $A\bigcap B$: { 6 }.

а) Тому, за класичним означенням ймовірності (формула (1.1)):

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\quad P(A\bigcap B)=\frac{1}{6}.$$

А за формулою (3.4) умовні ймовірності подій:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2};\quad P(B\,|\,A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}.$$

б) Оскільки $P(A\bigcap B)=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$, то події *A* і *B* – незалежні.

3.4. Незалежність подій

Розглянемо докладно одне із найважливіших понять теорії ймовірностей – поняття незалежності випадкових подій. Саме це поняття, що часто зустрічається в практичних задачах, виділило свого часу теорію ймовірностей із теорії міри і теорії функцій в самостійну математичну дисципліну.

Означення 6. Якщо умовна ймовірність події *A* за умови, що подія *B* відбулася, дорівнює безумовній ймовірності події *A*:

$$P(A\,|\,B)=P(A), \tag{3.5}$$

то говорять, що *подія A не залежить від події B*.

Якщо подія *A* не залежить від події *B*, тоді з формули (3.4.1) випливає, що

$$P(A\bigcap B)=P(A)P(B). \tag{3.5.1}$$

Далі, з того, що подія *A* не залежить від події *B*, за формулою (3.4) отримуємо, що тоді[6] і $P(B\,|\,A)=P(B)$, звідки маємо наступні висновки:

Наслідок 1. (про взаємну незалежність подій)

Якщо подія *A* не залежить від події *B,* то і подія *B* не залежить від події *A*.

[6] Для подій *A* і *B*, ймовірності яких не дорівнюють нулю.

Означення 7. Події A і B називають н е з а л е ж н и м и, якщо ймовірність перетину цих подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. (про незалежність подій)

Для того, щоб події A і B були незалежними, необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна із умов:

$P(A \mid B) = P(A)$ (якщо $P(B) > 0$);

або $P(B \mid A) = P(B)$ (якщо $P(A) > 0$).

3.5. Теореми про додавання і множення ймовірностей

Теорема 3.2. (про додавання ймовірностей довільних подій)

Для довільних подій *A, B* ймовірність об'єднання цих подій дорівнює

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3.7}$$

Наслідок 2. (про додавання ймовірностей *n* несумісних подій)

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні (тобто жодні дві з них не можуть відбутися одночасно), то ймовірність об'єднання цих подій дорівнює

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n). \tag{3.7.1}$$

Теорема 3.3. (про множення ймовірностей двох довільних подій)

Для довільних подій *A, B* ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B). \tag{3.8}$$

Наслідок 3. (про множення ймовірностей *n* довільних подій).

Для довільних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid (A_1 \cup A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})). \tag{3.8.1}$$

Теорема 3.4.[7] **(про множення ймовірностей двох незалежних подій)**

Якщо події A і B незалежні, то ймовірність перетину цих подій дорівнює

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.9}$$

Наслідок 4. (про множення ймовірностей *n* незалежних подій).

Для незалежних в сукупності подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ має місце формула для обчислення ймовірності перетину цих подій:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{3.9.1}$$

Приклад 5. Троє студентів складають екзамен. Ймовірності скласти екзамен для кожного з них дорівнюють p_1=0,9, p_2=0,8, p_3=0,6 відповідно. Розглянемо події A = "всі складуть", B = "жоден не складе", C = "складуть точно 2 студента". Знайти ймовірності цих подій.

Розв'язання. Будемо позначати через ІС подію "перший студент складе екзамен" і аналогічно для інших студентів.

Тоді A = "всі складуть" = "ІС і ІІС і ІІІС" = "ІС ∩ ІІС ∩ ІІІС".

Складання першим студентом екзамену не впливає на інших студентів, тобто події ІС, ІІС, ІІІС є незалежними. Тому за теоремою про множення ймовірностей незалежних подій (точніше, за формулою (3.9.1)) маємо

$$P(A) = P(\text{IC} \cap \text{IIC} \cap \text{IIIC}) = P(\text{IC}) \cdot P(\text{IIC}) \cdot P(\text{IIIC}) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}432 .$$

Для події B аналогічно маємо

B = "ніхто не складе" = "ІН і ІІН і ІІІН" = "ІН ∩ ІІН ∩ ІІІН".

Будемо використовувати формулу ймовірності протилежної події (3.3):

$$P(\text{IH}) = 1 - P(\text{IC}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;\ P(\text{IIH}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;\ P(\text{IIIH}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Тепер за теоремою про множення ймовірностей незалежних подій маємо

$$P(B) = P(\text{IH} \cap \text{IIH} \cap \text{IIIH}) = P(\text{IH}) \cdot P(\text{IIH}) \cdot P(\text{IIIH}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}008 .$$

Для події C маємо:

[7] Результат цієї теореми справді співпадає з означенням незалежних подій, але його часто використовують в тих ситуаціях, коли події є незалежними за умовою.

C = "складуть точно 2 студента" =

= "точно 2 студента складуть і точно 1 студент не складе екзамен" =

= "(IC і IIC і IIIH) або (IC і IIH і IIIC) або (IH і IIC і IIIC)" =

= "(IC ∩ IIC ∩ IIIH) ∪ (IC ∩ IIH ∩ IIIC) ∪ (IH ∩ IIC ∩ IIIC)" .

Події в круглих дужках є несумісними між собою, тому за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій (формула (3.7.1))

$P(C)$ = P((IC ∩ IIC ∩ IIIH) ∪ (IC ∩ IIH ∩ IIIC) ∪ (IH ∩ IIC ∩ IIIC)) =

= P(IC ∩ IIC ∩ IIIH) + P(IC ∩ IIH ∩ IIIC) + P(IH ∩ IIC ∩ IIIC)) =

= P(IC) ·P(IIC)·P(IIIH) + P(IC)·P(IIH)·P(IIIC) + P(IH)·P(IIC)·P(IIIC) =

= 0,9·0,8·0,4 + 0,9·0,1·0,6 + 0,1·0,8·0,6 = 0,39 .

Питання та задачі до теми

1. Коли використовується формула геометричної ймовірності?
2. Яка система подій називається алгеброю подій?
3. Сформулюйте аксіоми ймовірності.
4. Що таке ймовірнісний простір? З чого він складається?
5. Як знайти ймовірність протилежної події?
6. Які події називаються залежними?
7. Як знайти умовну ймовірність події A за умови, що подія B відбулася?
8. Сформулюйте результати теореми про додавання ймовірностей подій.
9. Сформулюйте результати теореми про множення ймовірностей подій

Задача 1. (Задача про зустріч). Двоє людей домовились про зустріч в певному місці на інтервалі часу $[0;T]$, причому перший, хто прийде, чекає $a < T$ хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що ці особи, які прийшли в інтервалі часу $[0;T]$, зустрінуться.

Задача 2. Мішень – це концентричні кола, радіус яких збільшується від 1 см (10 очок) до 10 см (1 очко). Ймовірність влучення в будь-яку частину мішені однакова. Яка ймовірність того, що стрілець, який влучив в мішень, вибив а) точно 8 очок? б) від 7 до 9 очок? в) парне число очок?

Задача 3. Нехай $\Omega = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \}$.

а) Чи буде алгеброю система підмножин $F_1=\{ \varnothing ; \Omega ; (1, 2); (3, 4, 5)\}$?

б) Доповнити до алгебри систему підмножин $F_2=\{\varnothing; \Omega ; (1, 2); (3, 4); (5)\}$.

Задача 4. За дослідженнями над студентами І курсу відомо, що з першого разу екзамен з математики складає 65% з них, екзамен з історії складає 80%, з них, а хоча б один із цих предметів – 95% з них. Знайти ймовірність того, що навмання взятий студент І курсу складе обидва екзамени з першого разу.

Задача 5. Ймовірність стрільця влучити в "десятку" становить 0,04, в "дев'ятку" – 0,11, у "вісімку" – 0,17. Зроблено один постріл. Яка ймовірність того, що вибито менше 8 очок?

Задача 6. Відомо, що $P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)=0{,}55$, $P\left(A\cap \overline{B}\right)=0{,}25$, $P\left(\overline{A}\cap B\right)=0{,}1$. Знайти $P\left(A\cap B\right)$.

Тема 4. Формули повної ймовірності та Баєса. Схема Бернуллі. Граничні теореми в схемі Бернуллі та їх наслідки

4.1. Формула повної ймовірності. Формула Баєса

Означення 1. Нехай маємо набір з *n* подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$ таких, що:

1. Об'єднання всіх $H_1, H_2, \ldots, H_n$ дає весь простір елементарних подій Ω:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega .$$

2. Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несумісні:

$$H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j .$$

Тоді говорять, що події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій або розбиття простору елементарних подій Ω. Самі події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називають гіпотезами.

Теорема 4.1. Формула повної ймовірності

Ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на умовну імовірність події A за умови, що відбулась відповідна гіпотеза:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) . \qquad (4.1)$$

Теорема 4.2. Формула Баєса[8]

Якщо в результаті експерименту стало відомо, що подія A настала, то ймовірність того, що це мало місце при настанні гіпотези H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обчислюється за формулами Баєса:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)} . \qquad (4.2)$$

[8] Варіанти написання цього прізвища : Байєса, Байеса, Бейеса.

Зауваження 1. Формулу повної ймовірності використовують тоді, коли в умові мова йде про подію, яка **ще не відбулася** (ймовірності таких подій називають апріорними, від лат. «*a priori*» = «до експерименту»), а формулу Баєса використовують тоді, коли в умові сказано, що деяка подія **вже відбулася** (ймовірності таких подій називають апостеріорними, від лат. «*a posteriori*» = «те, що випливає з досвіду»).

Приклад 1. На заводі використовують деталі з трьох цехів: 45 % деталей – з цеху № 1, 35 % деталей – з цеху № 2 і 20 % деталей – з цеху № 3. Серед деталей є брак: з цеху № 1 це 6 %, з цеху № 2 – 2 %, з цеху № 3 – 8 %.

а) Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде стандартною;

б) Навмання взята деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона з другого цеху.

Розв'язання. Введемо події: A = " навмання взята деталь – стандартна ";

H_1 = "навмання взята деталь – з цеху № 1 ";

H_2 = "навмання взята деталь – з цеху № 2 ";

H_3 = "навмання взята деталь – з цеху № 3 ".

З умови маємо, що ці події утворюють повну групу подій, а їх ймовірності дорівнюють: $P(H_1)=0{,}45$, $P(H_1)=0{,}35$, $P(H_1)=0{,}2$.

Далі, з умови можемо знайти умовні ймовірності події A:

$P(A|H_1) = 1–0{,}06 = 0{,}94$, $P(A|H_2) = 1–0{,}02 = 0{,}98$, $P(A|H_1) = 1–0{,}08 = 0{,}92$.

а) За формулою повної ймовірності (4.1) маємо:

$$P(A) = 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}95;$$

б) За формулою Баєса (4.2)

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}98}{0{,}95} \approx 0{,}361.$$

4.2. Схема Бернуллі

Означення 2. Проводимо серію з n незалежних експериментів. Якщо внаслідок кожного з них може статися **лише одна з двох подій** (їх, як правило, називають "успіх" / "неуспіх") зі **сталими ймовірностями** p і q ($p + q = 1$, отже $q = 1 - p$), то говорять про експерименти за схемою Бернуллі.

● Подію "успіх", як правило, вибирають самостійно, виходячи з умови.

Теорема 4.3. Формула Бернуллі

Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія "успіх" з'явиться точно k разів, знаходять так:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (4.3)$$

Приклад 2. Ймовірність того, що протягом тижня електрична лампа не перегорить, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом тижня з 5 ламп не перегорить: а) 4 штуки; б) не менше 4 штук.

Розв'язання. Лампи одна на іншу не впливають, отже маємо 5 незалежних експериментів – наслідок роботи протягом тижня першої, другої, …, п'ятої лампи з двома можливими подіями, які, згідно умови, будемо позначати: "успіх" = "лампа протягом тижня не перегорить"; "неуспіх" = "лампа протягом тижня перегорить". Отже, маємо схему Бернуллі з $n = 5$ і ймовірностями "успіху" $p = 0{,}9$ та "неуспіху" $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

а) Тут кількість "успіхів" $k = 4$, тому за (4.3) шукана ймовірність дорівнює

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^{5-4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 5 \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805 \approx 0{,}328$$

б) Тут кількість "успіхів" $k \geq 4$, тобто $k = 4$ або $k = 5$, причому ці події несумісні, тому за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій шукана ймовірність дорівнює сумі $P_5(4) + P_5(5)$. Ймовірність $P_5(4) \approx 0{,}328$ було знайдено вище, а ймовірність

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^{5-5} = 1 \cdot 0{,}6561 \cdot 1 = 0{,}59049 \approx 0{,}59.$$

Тому $$P_5(4) + P_5(5) \approx 0{,}328 + 0{,}59 = 0{,}918.$$

4.2.1. Граничні теореми в схемі Бернуллі

При великих значеннях n і k обчислення за формулою Бернуллі стають дуже складними. Тому використовують асимптотичні (тобто наближені, точність яких зростає із зростанням n і k) формули.

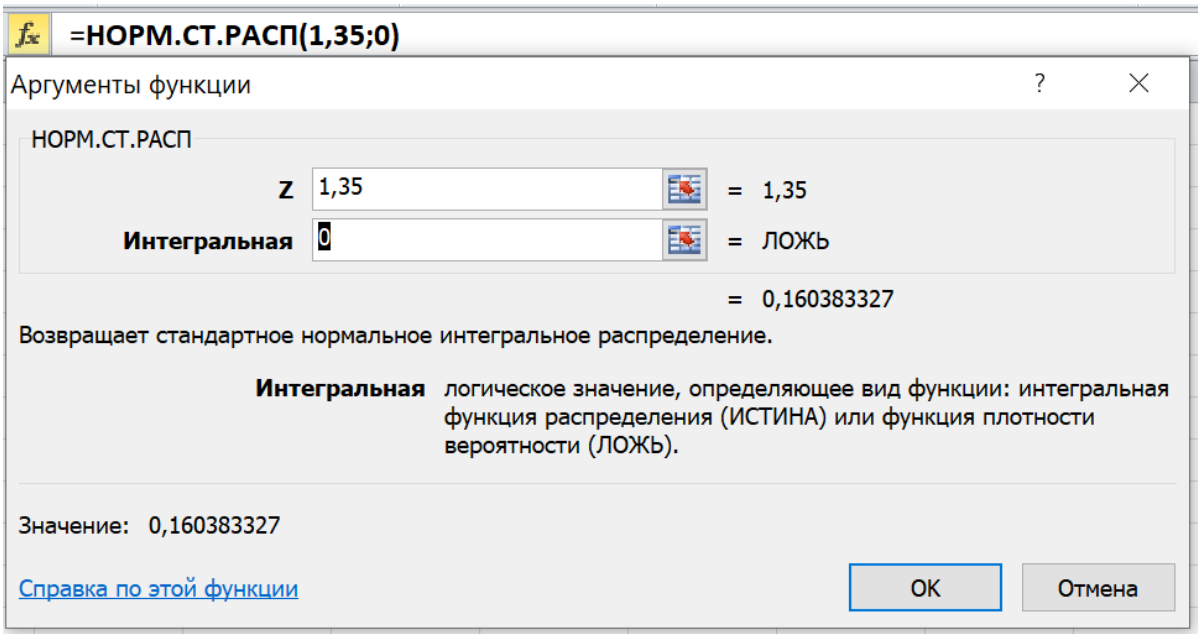
Теорема 4.4. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів та ймовірністю "успіху" p. Тоді при **великих**[9] n ймовірність того, що "успіх" з'явиться точно k разів, обчислюють за асимптотичною формулою:

$$P_n(k) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{4.4}$$

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, табульована[10].

Зауваження 2. Значення функції Гауса можна знайти за допомогою прикладних програм. Наприклад, в програмі Microsoft Excel використовується функція $\varphi(x)$=НОРМ.СТ.РАСП(x; 0):



[9] Бажано, щоб: $n > 30$ і $npq > 20$.
[10] Тобто її значення знаходять зі спеціальної таблиці. Див. Таблицю 1 в Додатку 1 даного посібника.

● Але при наближенні p (або q) до 0 точність формули (4.4) погіршується. Для таких ситуацій є спеціальна асимптотична формула Пуассона :

Теорема 4.5. Формула Пуассона для малоймовірних подій

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів, причому

– кількість експериментів n є **великим**[11] числом,

– ймовірність "успіху" дорівнює **малому**[12] числу p ,

– але величина $\boxed{\lambda = np}$ є константою.

Тоді ймовірність того, що "успіх" з'явиться точно k разів, дорівнює :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{4.5}$$

Зауваження 3. Якщо близьким до 0 є ймовірність «неуспіху» q, то для використання теореми Пуассона варто перепозначити події «успіх» та «неуспіх», щоб ймовірність «успіху» p була малим числом.

● Якщо цікавить кількість "успіхів" в схемі Бернуллі з певного діапазону, то крім точної формули Бернуллі (4.3) доцільно використовувати наступну:

Теорема 4.6. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Нехай маємо схему Бернуллі з n експериментів, ймовірність події "успіх" дорівнює р. Тоді при **великих**[13] n ймовірність того, що подія "успіх" з'явиться від k_1 разів до k_2 разів обчислюють за асимптотичною формулою:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{4.6}$$

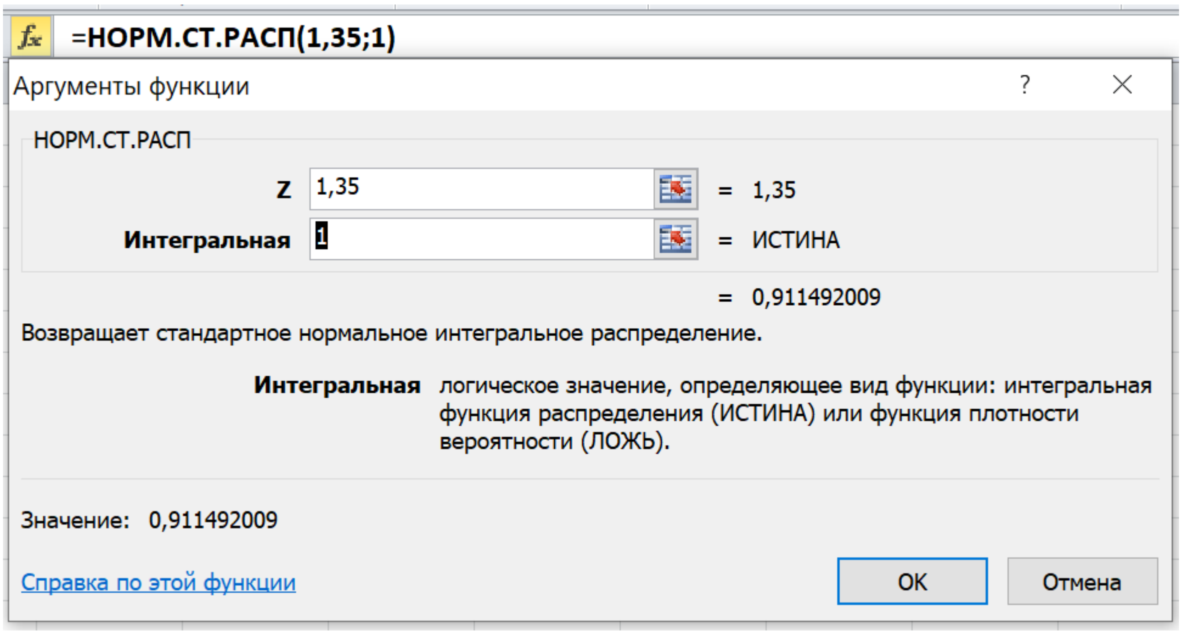
де $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – функція Лапласа[14], табульована.

[11] Бажано: $n > 30$; $npq \le 9$.
[12] Бажано: $p \le 0{,}1$.
[13] Бажано: $n > 30$ [краще $n > 50$] і $npq > 20$.
[14] Її значення знаходять зі спеціальної таблиці. Див. Таблицю 2 в Додатку 1 даного посібника.

Зауваження 4. Часто розглядають т.зв. «розширену функцію Лапласа»

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Значення $\overline{\Phi}(x)$ можна знайти за допомогою прикладних програм. В Microsoft Excel для цього є функція НОРМ.СТ.РАСП(x; 1):



Звідси маємо спосіб знаходження в Microsoft Excel функції Лапласа:

$$\Phi(x) = \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x;1) - 0{,}5.$$

Вправа. Проаналізуйте Зауваження 2 і 4 та знайдіть відмінності.

Приклад 3. В продукції фабрики 75% деталей вищого сорту. Беруть партію в 400 деталей. Знайти ймовірність того, що в цій партії деталей вищого сорту буде: а) точно 305 шт.; б) від 280 до 330 шт.

Розв'язання. Деталі одна на іншу не впливають, значить маємо 400 незалежних експериментів – якість першої, …, чотирьохсотої деталі з двома можливими подіями: "успіх" = "деталь вищого сорту"; "неуспіх" = "деталь не вищого сорту". Отже, маємо схему Бернуллі з $n = 400$ і ймовірностями "успіху" $p = 0{,}75$ та "неуспіху" $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$. Оскільки кількість експериментів – велике число, будемо користуватися формулами (4.4) та (4.6).

а) Тут кількість "успіхів" $k = 305$, тому за (4.4) шукана ймовірність

$$P_{400}(305) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{75}},$$

де $\quad x = \frac{305 - 400 \cdot 0{,}75}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{5}{\sqrt{75}} \approx 0{,}58.$

Тоді, з використанням Таблиці 1, маємо

$$P_{400}(305) = \frac{\varphi(0{,}58)}{\sqrt{75}} = \frac{0{,}3372}{\sqrt{75}} \approx 0{,}039.$$

б) Тут кількість “успіхів” $280 \le k \le 330$, тому за (4.6) шукана ймовірність

$$P_{400}(280 \le k \le 330) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $\quad x_2 = \frac{330 - 400 \cdot 0{,}75}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{30}{\sqrt{75}} \approx 3{,}46,$

$$x_1 = \frac{280 - 400 \cdot 0{,}75}{\sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = -\frac{20}{\sqrt{75}} \approx -2{,}31,$$

тобто, за властивостями функції Лапласа,

$$P_{400}(280 \le k \le 330) = \Phi(3{,}46) - \Phi(-2{,}31) =$$
$$= \Phi(3{,}46) + \Phi(2{,}31) = 0{,}49973 + 0{,}4896 \approx 0{,}989$$

4.2.2. Наслідки граничних теорем в схемі Бернуллі

Наслідок 1. Оцінка ймовірності відхилення відносної частоти “успіху” від теоретичної ймовірності *p* на задану величину δ.

Нехай маємо n незалежних експериментів за схемою Бернуллі, ймовірність події “успіх” дорівнює p. Тоді для великих n

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right\} = 2\Phi\left(\delta \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Доведення. Випливає з інтегральної теореми Муавра-Лапласа:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right\} = P\left\{\left|\frac{k - np}{n}\right| < \delta\right\} =$$

(помножимо обидві частини нерівності під знаком ймовірності на вираз $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ та розкриємо модуль)

$$= P\left\{\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right| < \delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = P\left\{-\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < \delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} =$$

$$= \Phi\left(\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \Phi\left(\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \left(-\Phi\left(\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\right) = 2\Phi\left(\delta\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наслідок 2. Кількість експериментів *n,* необхідних для наближення із заданою точністю δ та надійністю β теоретичної ймовірності "успіху" *p* відносною частотою "успіху".

Постановка задачі. Нехай маємо послідовність експериментів за схемою Бернуллі, з ймовірністю події "успіх" рівною p. Скільки експериментів n треба провести, щоб відносна частота "успіху" $\frac{k}{n}$ з ймовірністю β відрізнялась від теоретичної ймовірності "успіху" p не більше, ніж на δ?

Це **ціле** число n знаходять як найменше число, для якого виконується:

$$\Phi\left(2\delta\cdot\sqrt{n}\right) \geq \frac{\beta}{2}.$$

Наслідок 3. Кількість експериментів *n* для спостереження хоча б одного "успіху" із заданою ймовірністю *P*.

Постановка задачі. Нехай маємо серію з n експериментів за схемою Бернуллі, з ймовірністю "успіху" p. Скільки експериментів треба провести, щоб із заданою ймовірністю P подія "успіх" відбулась хоча б один раз?

Це **ціле** число n знаходять з умови:

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \tag{4.7}$$

Наслідок 4. Найімовірніше число появи події (мода) в схемі Бернуллі

Означення 3. Найімовірніше число появи події (мода) в схемі Бернуллі з n експериментів – це така кількість "успіхів", ймовірність якої не менша ймовірності кожного з решти можливих кількостей "успіхів" в послідовності з n експериментів.

Найімовірніше число появи події (мода) знаходиться як таке **ціле** число k_0, що задовольняє нерівності

$$np - q \le k_0 \le np + p\,. \tag{4.8}$$

Питання та задачі до теми

1. За яких умов набір подій називають повною групою подій?
2. Сформулюйте формулу повної ймовірності та формулу Баєса. Як відрізнити ситуації, в яких застосовуються ці формули?
3. За яких умов серію експериментів називають експериментами за схемою Бернуллі?
4. Наведіть та поясніть формулу Бернуллі.
5. В чому відмінності локальної та інтегральної теорем Муавра-Лапласа?
6. В яких випадках використовують формулу Пуассона?
7. Що таке функція Гауса і функція Лапласа та як знайти їх значення?
8. Пригадайте кілька наслідків з граничних теорем в схемі Бернуллі та поясніть їх практичний сенс.

Задача 1. Двигун може працювати в нормальному і форсованому режимах. Двигун працює в нормальному режимі 80% часу, а в форсованому - 20%. Ймовірність поломки двигуна при нормальному режимі дорівнює 0,01, а при форсованому – 0,04. Найти ймовірність поломки двигуна за час роботи.

Задача 2. Ймовірність того, що в деякому виробництві виріб задовольняє стандарту, становить 0,96. Пропонується спрощена система перевірки, яка для виробів, що задовольняють стандарту, дає позитивний результат з ймовірністю 0,98, а для виробів, що не задовольняють стандарту, дає позитивний результат з ймовірністю 0,05. Яка ймовірність, що виріб, який двічі пройшов спрощену перевірку, задовольняє стандарту?

Задача 3. В першій скриньці є 8 білих и 7 чорних куль, а в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої скриньки випадковим чином дістають 2 кулі і перекладають їх в другу скриньку. Після цього з другої скриньки дістають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі кулі, що вийняті з другої скриньки – білі.

**Задача 4*. В першій урні знаходиться 4 білих куль і 6 чорних, а в другій урні – 6 білих куль і 9 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кулі і перекладають їх в третю урну. Потім з третьої урни навмання виймають одну кулю. а) Яка ймовірність того, що ця куля – біла? б) Відомо, що з третьої урни вийняли білу кулю. Яка ймовірність того, що вона належала першій урні?

Задача 5. Ймовірність запізнення поїзда становить 0,2. Яка ймовірність того, що за 200 днів поїзд запізниться а) 30 разів; б) від 10 до 50 разів?

Задача 6. Під час епідемії ймовірність захворіти грипом протягом 1 дня дорівнює 0,005. В установі працює 300 людей. Яка ймовірність, що протягом дня захворіє: а) точно 3 людини; б) від 1 до 5 людей; в) ніхто не захворіє?

Задача 7. В продукції фабрики 75% деталей вищого ґатунку. Беруть партію в 400 деталей. Знайти ймовірність того, що в цій партії відносна частота деталей вищого ґатунку складатиме від 70% до 80%.

**Задача 8.* Серед продукції фабрики певний, невідомий наперед відсоток (позначимо A %) становлять деталі вищого ґатунку. Скільки деталей треба взяти, щоб з ймовірністю не меншою за 0,9 відносна частота (у відсотках) деталей вищого ґатунку серед них відхилялась від p не більше, ніж на 5%?

**Задача 9.* За годину автомат виготовляє 20 деталей. Ймовірність браку для будь-якої деталі дорівнює 0,01. Через який час (в годинах) ймовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі становитиме не менше 0,952?

Задача 10. Три стрільця стріляють по одному разу по мішені. Ймовірності влучити для них відповідно 0,6 , 0,5 та 0,4. Відомо, що влучило точно 2 стрільця. Що більш ймовірно: влучив третій стрілець чи не влучив?

Тема 5. Випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних випадкових величин

5.1. Випадкові величини, їх типи

Означення 1. Функція, що визначена на просторі елементарних подій Ω (тобто ставить у відповідність будь-якому елементу Ω певне число), називається випадковою величиною.

Якщо ж множиною значень цієї функції є площина або простір (функція ставить у відповідність елементу Ω певну точку – кілька впорядкованих координат), то ця функція називається випадковим вектором.

Якщо множина значень випадкової величини є скінченною, то така випадкова величина називається дискретною. Якщо ж випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку, то випадкова величина називається неперервною.

Випадкові величини, як правило, позначають великими латинськими літерами – X, Y, Z – а їх можливі значення відповідними малими: x, y, z.

5.2. Дискретні випадкові величини

Означення 2. Співвідношення між можливими значеннями дискретної випадкової величини і їх ймовірностями називається законом розподілу. Його можна задати *таблично, аналітично* і *графічно.* Найчастіше використовують табличний спосіб завдання закону розподілу, який називають рядом розподілу і подають у вигляді таблиці

Значення X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Ймовірність P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тут в першому рядку записані в порядку зростання всі можливі значення випадкової величини X, а в другому рядку – відповідні ймовірності того, що випадкова величина X прийме значення x_i : $p_i = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$

● Важливо, щоб “зійшлась” контрольна сума (її називають ще умова нормування):

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.} \tag{5.1}$$

Щоб надати закону розподілу більш наочного вигляду, часто вдаються до його **графічного зображення**. По осі абсцис відкладаються всі можливі значення випадкової величини, а по осі ординат відповідні ймовірності цих значень. Отримані точки сполучаються відрізками прямих. Така фігура називається багатокутником розподілу. Багатокутник розподілу, так само як і закон розподілу, повністю характеризує випадкову величину. Він є графічною формою закону розподілу.

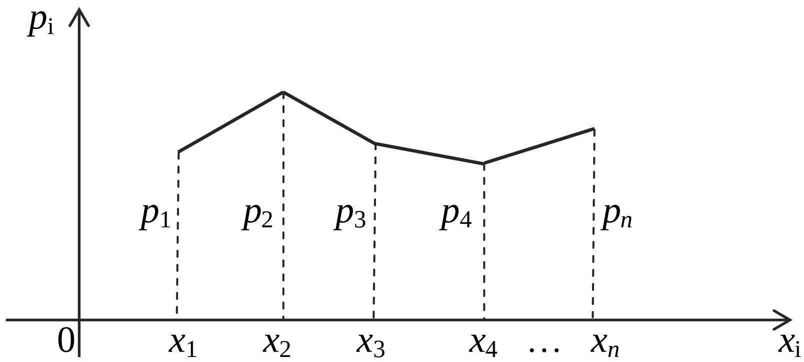


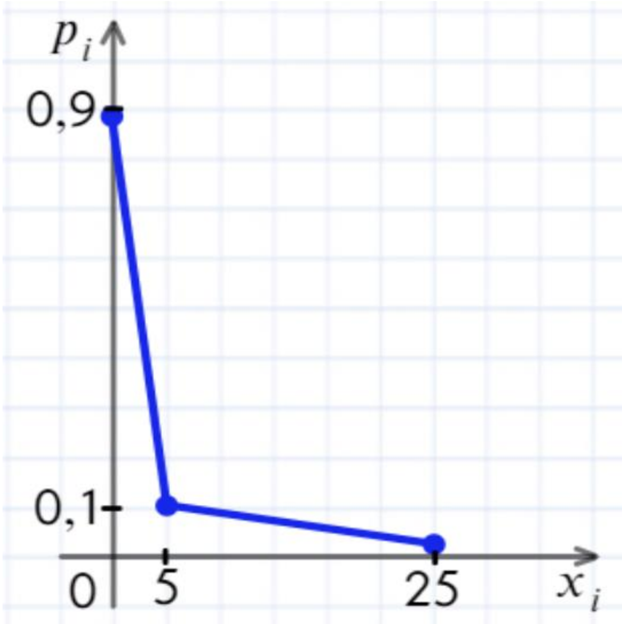
Рис. 5.1. Багатокутник розподілу

Приклад 1. Лотерея містить 100 білетів. Умовами лотереї передбачено 1 виграш в 25 грн. і 10 виграшів в 5 грн. Введемо таку випадкову величину X = “виграш одного навмання взятого білету”. Побудувати ряд розподілу ВВ X. Перевірити контрольну суму. Побудувати багатокутник розподілу.

Розв’язання. За умовою, випадкова величина X може набувати трьох значень – 0, 5 або 25. Тому, з використанням класичного означення ймовірності маємо такий ряд розподілу

Значення X	0	5	25
Ймовірність P	0,89	0,1	0,01

За цим рядом розподілу побудуємо багатокутник розподілу:



5.3. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Розглянемо основні закони розподілу дискретних випадкових величин. Найпростіші з них отримують зі схеми Бернуллі. Отже, будемо розглядати схему Бернуллі з n незалежних експериментів. Ймовірність “успіху” p, ймовірність “неуспіху” $q = 1 - p$.

Означення 3. Якщо дискретна випадкова величина набуває лише цілих невід’ємних (або натуральних) значень, то її називають ц і л о ч и с л о в о ю .

5.3.1. Біноміальний закон розподілу

Означення 4. Цілочислова випадкова величина X має б і н о м і а л ь н и й (б і н о м н и й) з а к о н р о з п о д і л у з параметрами n та p , якщо вона дорівнює **кількості успіхів в *n* експериментах за схемою Бернуллі з ймовірністю “успіху” *p***, тобто набуває n+1 (від 0 до n) можливих значень з ймовірностями, обчисленими за формулою Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, \qquad (5.2)$$

для $i = 0, 1, \ldots, n$.

● Позначають $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$.

Отже закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	0	1	…	k	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Числові характеристики біноміального розподілу (див. Тему 7):

$$MX = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i = np, \qquad DX = \sum_{i=0}^{n} (x_i - MX)^2 p_i = npq. \qquad (5.3)$$

● Біноміальний розподіл з параметрами n=1 та p називають р о з п о д і л о м Б е р н у л л і і позначають $X \sim \mathrm{Be}(p)$.

Приклад 2. Підкидають монету 3 рази. Випадкова величина X = “кількість гербів, що випало”. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Підкидання монети – незалежні, ймовірність “успіху” – випадіння герба – p = 1/2; ймовірність “неуспіху” q = 1 – p = 1/2; отже випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. Зрозуміло, що випадкова величина X може набувати лише значень 0, 1, 2 або 3. Тому, за формулою Бернуллі (5.2):

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Зауваження 1. Цей закон названо “біноміальним” тому, що праву частину рівності (5.2) можна розглядати як загальний член біному Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^0 q^n.$$

***Зауваження 2.** Розглянемо узагальнення схеми Бернуллі – “замість монети – кубик”: нехай маємо n незалежних експериментів, в кожному з яких може настати лише одна з k подій:

подія “$успіх_1$” з ймовірністю p_1,

подія “$успіх_2$” з ймовірністю p_2,

…,

подія “$успіх_k$” з ймовірністю p_k,

причому $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

Тоді про випадковий вектор $X=(x_1;x_2;...;x_k)$, координати якого дорівнюють кількості відповідних “успіхів”, говорять, що він має поліноміальний закон розподілу і ймовірності випадкового вектора X набути певного значення обчислюють так:

$$P\{X=(m_1;m_2;...;m_k)\}=P\{x_1=m_1;...;x_k=m_k\}=\frac{n!}{m_1!\cdot\ldots\cdot m_k!}\cdot p_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k},$$

тут $m_1+m_2+...+m_k=n.$

Зрозуміло, що біноміальний закон розподілу є окремим випадком поліноміального для кількості різних “успіхів” $k=2$.

5.3.2. Геометричний закон розподілу

Означення 5. Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу з параметром p, якщо вона дорівнює **кількості експериментів до настання першого “успіху” в схемі Бернуллі** з ймовірністю “успіху” p, тобто набуває будь-яких натуральних значень з ймовірностями, обчисленими як наслідок формули Бернуллі:

$$p_i=P\{X=i\}=pq^{i-1}, \tag{5.4}$$

для $i=1,2,\ldots,n,\ldots$

- Пояснення формули (5.4). Розглянемо подію, ймовірність якої шукаємо $\{X=i\}=\{\textit{перший "успіх" відбудеться в } i-\textit{му експерименті}\}=\{\text{Н...НУ}\}$,

$$p_i=P\{X=i\}=P\{\text{Н...НУ}\}=P\{\text{Н...Н}\}P\{\text{У}\}=P_{i-1}(0)P_1(1)=pq^{i-1}.$$

- Позначають $X\sim\text{Ge}(p)$ або $X\sim\text{Geom}(p)$.

Отже закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	1	2	…	k	…
P	p	pq	…	pq^{k-1}	…

Числові характеристики геометричного розподілу (див. Тему 7):

$$MX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=\frac{1}{p},\qquad DX=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-MX)^2 p_i=\frac{q}{p^2}. \tag{5.5}$$

Приклад 3. З гармати стріляють в мішень до першого влучення. Для кожного пострілу ймовірність влучення p = 0,6. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = "кількість зроблених пострілів". Знайти ймовірність того, що знадобиться: а) точно 3 постріли; б) не більше 3 пострілів.

Розв'язання. Результат кожного пострілу – це незалежні експерименти; в кожному експерименті подія "успіх" = "влучення в мішень"; ймовірності "успіху" p = 0,6, "неуспіху" $q = 1 - p = 0,4$.

Отже маємо схему Бернуллі і випадкова величина X = "кількість зроблених пострілів" має геометричний закон розподілу. За формулою (5.4):

X	1	2	…	k	…
P	0,6	0,24	…	$0{,}6\cdot 0{,}4^{k-1}$	…

а) $p_3 = P\{X = 3\} = pq^{3-1} = 0{,}6\cdot 0{,}4^2 = 0{,}096$;

б) $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}6\cdot 0{,}4^0 + 0{,}6\cdot 0{,}4^1 + 0{,}6\cdot 0{,}4^2 = 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 = 0{,}936$.

Узагальненням геометричного розподілу є наступний розподіл:

***Означення 6.** Випадкова величина X має в і д ' є м н и й б і н о м і а л ь н и й з а к о н р о з п о д і л у з параметрами k і p, якщо вона дорівнює **кількості експериментів до настання *k*-ого "успіху"** в схемі Бернуллі з ймовірністю "успіху" p, тобто набуває цілих значень з ймовірностями, обчисленими як наслідок формули Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = C_{i-1}^{k-1} p^k q^{i-k}, \tag{5.6}$$

для $i = k, k+1, \ldots, n, \ldots$

● Позначають $X \sim \mathrm{NB}(k, p)$.

● Від'ємний біноміальний розподіл називають ще р о з п о д і л о м П а с к а л я.

Числові характеристики від'ємного біноміального розподілу:

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{kq}{p}, \qquad DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i = \frac{kq}{p^2}. \tag{5.7}$$

● Означення геометричного розподілу іноді формулюють так:

***Означення 5.1.** Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу з параметром p, якщо вона дорівнює **кількості <u>"неуспіхів"</u> до настання першого "успіху" в схемі Бернуллі** з ймовірністю "успіху" p, тобто набуває цілих невід'ємних значень з ймовірностями, обчисленими як наслідок формули Бернуллі:

$$p_i = P\{X = i\} = pq^i, \tag{5.4.1}$$

для $i = 0, 1, \ldots, n, \ldots$.

<u>5.3.3. Пуассонівський закон розподілу</u>

Нехай ймовірність події "успіх" дорівнює **малому** числу p, а кількість експериментів n є **великим** числом: $p \to 0, n \to \infty$, але так, що величина $\lambda = np$ **є константою**[15].

Означення 7. Говорять, що цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу (розподіл Пуассона) з параметром λ, якщо вона дорівнює **кількості малоймовірних "успіхів" в *n* експериментах за схемою Бернуллі**, тобто ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона:

$$p_i = P\{X = i\} = P_n(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \tag{5.8}$$

де, повторимо, число $\lambda = n \cdot p$, а $i = 0, \ldots, n, \ldots$

● Позначають $X \sim \Pi(\lambda)$ або $X \sim \Pi(n, p)$.

Тобто закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	0	1	…	k	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	…

● Пуассонівський закон розподілу є узагальненням біноміального закону розподілу для великого числа експериментів і малоймовірних "успіхів".

[15] Бажано: $p \le 0,1$; $n > 30$; $npq \le 9$

***Зауваження 3.** Випадкову величину *X*, розподілену за пуассонівським законом розподілу, розглядають як таку, яка може набувати будь-яких як завгодно великих значень. Це робиться, з одного боку, тому, що ймовірності великих значень випадкової величини *X* є дуже малими (кажуть *знехтуваними*) а, з іншого боку, для того, щоб виконувалась умова нормування (5.1) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Числові характеристики такої випадкової величини (див. Тему 7):

$$MX = \lambda, \; DX = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{5.9}$$

5.3.4. Гіпергеометричний закон розподілу

Розглянемо таку задачу: маємо партію в *N* деталей, серед яких *M* мають певну ознаку (наприклад, є стандартними), а решта – не мають (відповідно, є бракованими). Вибираємо з цієї партії *n* деталей.

Означення 8. Цілочислова випадкова величина *X* має гіпергеометричний закон розподілу з параметрами *N, M* та *n,* якщо вона дорівнює **кількості стандартних деталей з *n* навмання вибраних**, а значить ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_n(m) = P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \tag{5.10}$$

де, із постановки задачі: $N > M$, $N > n$, $M \geq m$, $N - M \geq n - m$, $m \leq \min(n; M)$.

● Позначають $X \sim \mathrm{HG}(N, M, n)$.

Пояснення формули. Формула (5.10) обчислюється за правилами комбінаторики: в чисельнику – загальна кількість комбінацій, якими можна вибрати *m* стандартних деталей із всіх наявних *M* стандартних та вибрати *n–m* бракованих деталей із всіх наявних *N–M* бракованих; в знаменнику – загальна кількість комбінацій, якими можна вибрати n деталей із загального числа N деталей. Тому закон розподілу такої випадкової величини має вигляд :

X	0	1	…	m	…	n
P	$\dfrac{C_{N-M}^{n}}{C_N^n}$	$\dfrac{M\cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^n}{C_N^n}$

Числові характеристики (див. Тему 7):

$$MX=\frac{1}{C_N^n}\sum_{m=0}^{n} mC_M^m C_{N-M}^{n-m}\,,\qquad DX=\frac{1}{C_N^n}\sum_{m=0}^{n} m^2 C_M^m C_{N-M}^{n-m}-(MX)^2. \qquad (5.11)$$

Приклад 4. В ящику міститься 10 деталей, серед яких 7 стандартних, а решта – браковані. Навмання беруть 3 деталі. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “кількість стандартних деталей з трьох взятих” .

Розв’язання. Отже, випадкова величина X ~ HG(10, 7, 3). Можливих значень випадкової величини X є 4 шт.: 0, 1, 2, 3. Тому за формулою (5.10) маємо такий ряд розподілу:

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{C_{10-7}^{3}}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{7\cdot C_{10-7}^{3-1}}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{120}$	$\dfrac{C_7^2\cdot C_{10-7}^{3-2}}{C_{10}^3}=\dfrac{63}{120}$	$\dfrac{C_7^3\cdot C_{10-7}^{3-3}}{C_{10}^3}=\dfrac{35}{120}$

Зауваження 4. Ознака, за якою розподіляють деталі, може бути не лише якісною (стандартні–браковані), але й іншою: колір (зелені – не зелені), харчові ознаки (дієтичне – звичайне або шоколадні – не шоколадні) тощо.

* **Зауваження 5.** Для випадкової величини X ~ HG(N, M, n) виконується умова нормування (5.1):

$$\sum_{m=0}^{n} p_i=\frac{1}{C_N^n}\sum_{m=0}^{n} C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}=1.$$

Цей результат можна отримати, розкривши факторіали під знаком суми.

Зауваження 6. Для випадкової величини X ~ HG(N, M, n), не працює схема Бернуллі: n деталей витягаються без повернення, і для кожної наступної деталі змінюється ймовірність “успіху”. Проте для великого N і малої вибірки (такої, що $n < N/10$, $n < M/10$, $n < (N–M)/10$) зміна цих ймовірностей досить незначна, тож ймовірності, обчислені за гіпергеометричним законом, дуже близькі до відповідних ймовірностей, обчислених для біноміального закону з параметрами n і $p = \dfrac{M}{N}$.

Зауваження 7. В гіпергеометричний закон розподілу входять три параметра: N, M та n. В практичних же задачах часто вводять параметр “*ро*” $\rho = \dfrac{M}{N}$ і розглядають задачу лише з двома параметрами: ρ та n.

Проте для обчислень за наведеними вище формулами необхідно знати числа N та M. Для цього вводять довільне велике число N, а потім обчислюють значення $M = \rho N$, причому введене N має бути настільки великим, щоб виконувались нерівності:

$$N > n,\ M \ge n,\ N - M \ge n.$$

5.3.5. Рівномірний (дискретний) закон розподілу

Означення 9. Дискретна випадкова величина X має рівномірний (дискретний) закон розподілу з параметром k, якщо вона набуває k штук можливих значень з однаковими ймовірностями:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \ldots, k. \qquad (5.12)$$

Тобто закон розподілу такої випадкової величини має вигляд

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
P	$1/k$	$1/k$	$\ldots$	$1/k$

Числові характеристики (див. Тему 7):

$$MX = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad DX = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2. \qquad (5.13)$$

Приклад 5. Кубик підкидають 1 раз. Випадкова величина X = “кількість очок, що випало”. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X.

Розв’язання. Отже, випадкова величина X має рівномірний закон розподілу. Можливих значень випадкової величини X є 6 шт.: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тому за (5.10) маємо такий ряд розподілу:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

5.4. Найпростіший потік подій

Розподіл Пуассона, що було визначено в Означенні 6, широко використовується в задачах контролю якості, в теорії масового обслуговування та інших практичних застосуваннях.

Означення 10. Послідовність подій, що відбуваються у випадкові моменти часу, називається потоком подій.

Приклади потоків подій:

– надходження викликів на АТС;

– прибуття літаків в аеропорт;

– збої в роботі обладнання;

– надходження клієнтів в магазин тощо.

Потоки подій можуть мати такі **властивості**:

Стаціонарність: ймовірність настання k подій на будь-якому інтервалі часу t залежить лише від числа k і від тривалості інтервалу t і не залежить від початку його відліку.

Відсутність післядії : ймовірність настання k подій на будь-якому інтервалі часу не залежить від того, з’являлись чи не з’являлись події в моменти часу, які передували початку інтервалу.

Ординарність : настання двох чи більше подій за малий інтервал часу практично неможливе.

Означення 11. Потік подій називається п у а с с о н і в с ь к и м (н а й п р о с т і ш и м) якщо він є стаціонарним, без післядії та ординарним.

Означення 12. І н т е н с и в н і с т ю п о т о к у λ називається середнє число подій, які настають за одиницю часу.

Теорема 5.1. (формула Пуассона).

Нехай маємо пуассонівський потік подій з інтенсивністю λ. Тоді ймовірність того, що за час t відбудеться точно k подій, що утворюють даний потік, дорівнює

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{5.14}$$

Наслідок. Середня тривалість інтервалу часу між надходженням двох послідовних подій деякого пуассонівського потоку подій з інтенсивністю λ дорівнює $1/\lambda$.

Питання та задачі до теми

1. Що називають випадковою величиною?
2. Які види випадкових величин бувають?
3. Яку випадкову величину називають цілочисловою?
4. Що таке закон розподілу дискретної випадкової величини? Які способи завдання закону розподілу бувають?
5. Що називають рядом розподілу і як його будують?
6. Що таке умова нормування? З яких причин вона виникає?
7. Як будують багатокутник розподілу?
8. В чому полягають відмінності між біноміальним, геометричним та пуассонівським законом розподілу?
9. В яких практичних задачах виникають випадкові величини, розподілені за гіпергеометричним законом розподілу?
10. Що таке потік подій і які властивості він може мати?

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	1	2	5	9
P	0,2	0,5	p	0,2

Знайти невідому ймовірність p. Побудувати багатокутник розподілу.

Задача 2. Два стрільці роблять по одному пострілу. Ймовірність влучити для першого стрільця становить 0,6, для другого – 0,8. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X = “число влучень в мішень”.

Задача 3. Гральний кубик підкидається доти, доки не випаде 6 очок. Знайти закон розподілу випадкової величини X = “кількість підкидань”.

Задача 4. Перевірити для ряду розподілу геометрично розподіленої випадкової величини умову нормування $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Задача 5.* З гармати стріляють до двох підряд влучень. Для кожного пострілу ймовірність влучення p = 0,6. Знайти ймовірність того, що знадобиться: а) точно 3 постріли; б) не більше 3 пострілів.

Задача 6. Завод відправив замовнику 5000 виробів. Ймовірність виробу розбитися в дорозі становить 0,0002. Побудувати ряд розподілу ВВ X = “кількість виробів, що розбились в дорозі” (обмежитись від 0 до 5).

Задача 7. Ймовірність того, що платіж поступить від клієнта вчасно становить 0,92. Знайдіть ймовірність, того, що з 50 платежів прострочених буде а) 3 шт. б) від 2 до 5 шт.; в) не більше 4 шт.

Задача 8. На АТС в середньому за хвилину надходить 2 виклики. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин на АТС надійде точно 10 викликів.

Тема 6. Функція розподілу та щільність розподілу випадкових величин. Функції випадкового аргументу

6.1. Функція розподілу випадкових величин

Зауваження 1. Пригадаємо, що випадкова величина – це функція, що визначена на просторі елементарних подій Ω, тобто $X = X(\omega)$.

Тому в подальшому коли мова буде йти про ймовірність, що пов'язана з деякою випадковою величиною X, мова буде йти про ймовірність відповідних елементарних подій ω :

$$P\{X \le a\} = P\{\omega : X(\omega) \le a\}.$$

Означення 1. Випадкова величина X називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною (тобто такою, елементи якої можна перенумерувати).

Приклади дискретних випадкових величин.

1. Кількість бракованих деталей в партії.
2. Кількість пострілів до першого влучення.

Означення 2. Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо множина її можливих значень є деяким інтервалом (скінченним або нескінченним) числової прямої.

Приклади неперервних випадкових величин.

1. Час безвідмовної роботи обладнання.
2. Відхилення розмірів деталі від стандарту.

Означення 3. *Функцією розподілу* випадкової величини X називається функція $F_X(x)$, що при кожному значенні x дорівнює **ймовірності** того, що випадкова величина X набуде значень, менших або рівних за x:

$$\boxed{F_X(x) = P\{X \le x\}} \qquad (6.1)$$

$F_X(x)$ ще називають *інтегральною функцією розподілу*.

● Якщо немає двозначності, індекс X у функції $F_X(x)$ не пишуть: $F(x)$.

● Функція розподілу – це універсальний спосіб визначення випадкової величини: як дискретної, так і неперервної.

Властивості функції розподілу

1. $0 \le F_X(x) \le 1$.
2. $F_X(x)$ – неспадна функція на $(-\infty;+\infty)$, тобто при $x_1 < x_2$ маємо
$$F_X(x_1) \le F_X(x_2).$$
3. $F_X(x)$ – неперервна справа функція, тобто
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x).$$
4. $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$,

   $F_X(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
5. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал $(a;\, b]$ (набуде значень з цього інтервалу), дорівнює (при $a < b$):
$$\boxed{P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a).} \qquad (6.2)$$
   5.1. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать лише інтервалу $(a;\, b)$, то $F_X(x) = 0$ при $x \le a$ і $F_X(x) = 1$ при $x \ge b$.

   5.2. Для неперервної випадкової величини X включення або не включення точки не впливає на результат :
$$P\{X < a\} = P\{X \le a\} = F_X(x).$$
   5.3. Для неперервної випадкової величини X і для довільного числа a
$$P\{X = a\} = P\{X \le a\} - P\{X < a\} = 0.$$
6. Ймовірність протилежної події
$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$
7. Для дискретної випадкової величини X такої, що $p_i = P\{X = a_i\}$
$$F_X(x) = \sum_{i\,:\, a_i \le x} p_i\,.$$

8. Залежно від закону розподілу графік $F_X(x)$ може бути ступінчастим (східчастим), неперервним або неперервним зі стрибком (стрибками) :

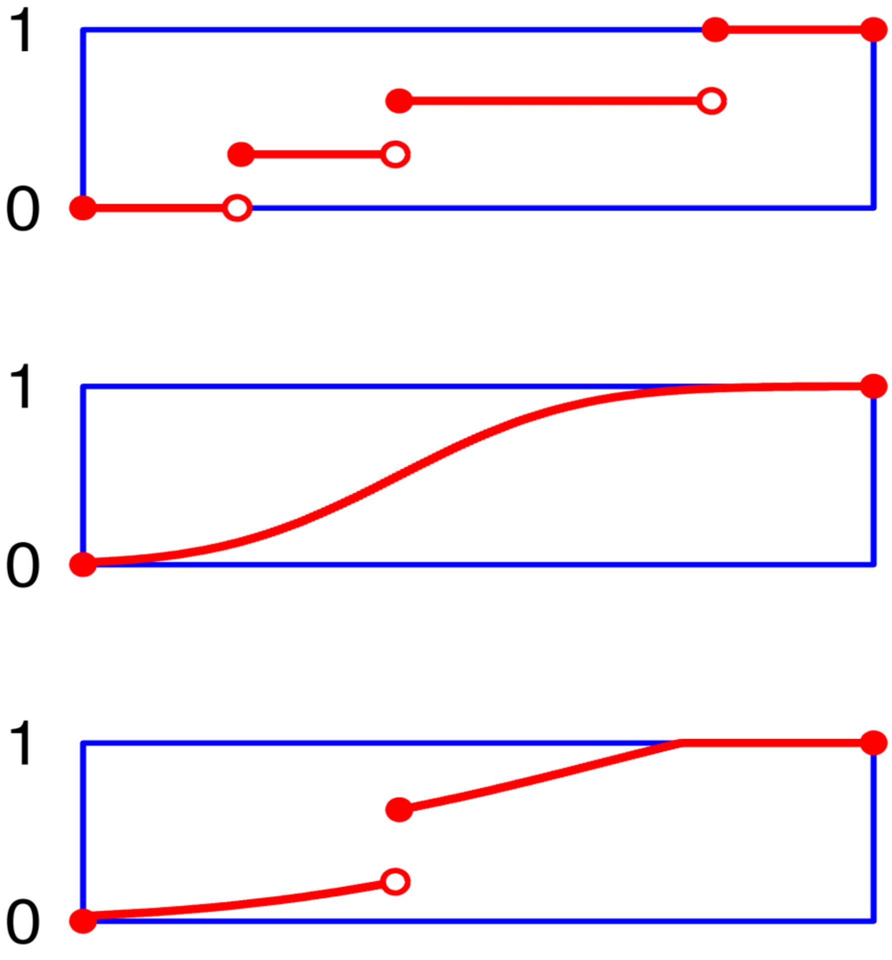


Рисунок 6.1. Схематичне зображення графіків функції розподілу: верхній – для дискретного розподілу ймовірностей; середній – для неперервного розподілу; нижній – для розподілу, що містить дискретну та неперервну частини.

Приклад 1. Монету підкидають 3 рази. Випадкова величина X – “кількість гербів, що випало”. Побудувати графік функції розподілу $F_X(x)$.

Розв’язання. Отже, випадкова величина X має біноміальний закон розподілу. Можливих значень X є 4 шт.: 0, 1, 2, 3. Ймовірності цих значень обчислимо за формулою Бернуллі. Отримаємо такий ряд розподілу:

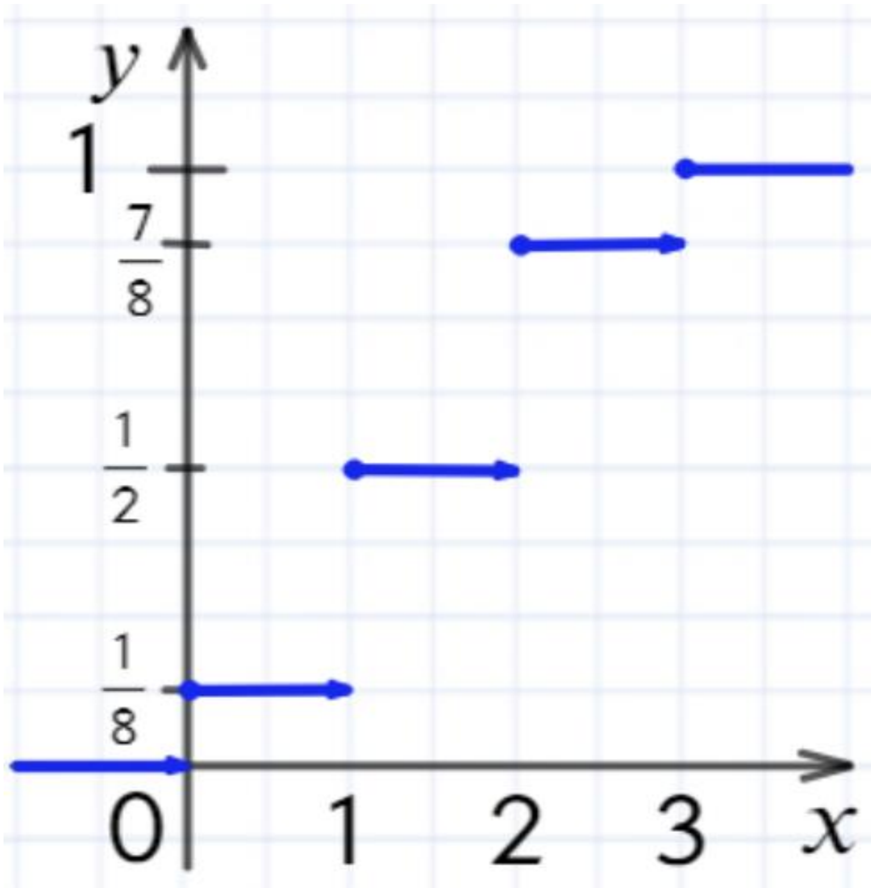
X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

За цим рядом розподілу будуємо функцію розподілу

$$F_X(x)=\begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad x<0 \\ \frac{1}{8}, & \text{при} \quad 0\le x<1 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\,, & \text{при} \quad 1\le x<2 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\,, & \text{при} \quad 2\le x<3 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}, & \text{при} \quad x\ge 3 \end{cases},$$

тобто
$$F_X(x)=\begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad x<0 \\ \frac{1}{8}, & \text{при} \quad 0\le x<1 \\ \frac{1}{2}, & \text{при} \quad 1\le x<2 \\ \frac{7}{8}, & \text{при} \quad 2\le x<3 \\ 1, & \text{при} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

Функція розподілу має с х і д ч а с т и й (або с т у п і н ч а т и й) г р а ф і к:



6.2. Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу неперервних випадкових величин

Використовуючи поняття функції розподілу, можемо уточнити означення.

Означення 2.1. Випадкова величина називається неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною функцією.

Неперервні випадкові величини поділяються на два класи: сингулярні випадкові величини та абсолютно неперервні випадкові величини.

Означення 4. Випадкова величина X називається абсолютно неперервною, якщо існує борелева інтегрована функція $f_X(x)$, така, що функція розподілу $F_X(x)$ для будь-якого x дорівнює

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy. \tag{6.3}$$

Функцію $f_X(x)$ називають щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X.

Означення 5. Якщо функція розподілу випадкової величини X є неперервною функцією, множина точок росту якої має лебегову міру нуль (тобто $F_X(x)$ – неперервна, але не має щільності), то розподіл X називають сингулярним[16].

Теорема 6.1. (Теорема Лебега).

Будь-яку функцію розподілу $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = \alpha_1 F_Д(x) + \alpha_2 F_{АН}(x) + \alpha_3 F_C(x),$$

де константи $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $F_Д(x)$ – дискретна функція розподілу, $F_{АН}(x)$ – абсолютно неперервна функція розподілу, $F_C(x)$ – сингулярна функція розподілу.

Поняття щільності часто формулюють в спрощеному (проте зручнішому для використання) вигляді.

---

[16] Прикладом такого розподілу може бути дельта–функція Дірака або розподіл Кантора (тобто розподіл, зосереджений на множині Кантора) .

Означення 4.1. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X – це похідна від її функції розподілу:

$$\boxed{f_X(x) = \left(F_X(x)\right)'.} \qquad (6.3.1)$$

$f_X(x)$ ще називають диференціальною функцією розподілу.

Графік щільності $f_X(x)$ називають кривою розподілу випадкової величини X.

● Якщо немає двозначності, індекс X у щільності не пишуть: $f(x)$.

Властивості щільності

1. $f_X(x) \ge 0$.

2. Умова нормування: $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.} \qquad (6.4)$$

● Зверніть увагу, що в умові нормування – невласний інтеграл.

2.1. Якщо випадкова величина X визначена лише на інтервалі (a; b),

то умова нормування: $$\boxed{\int_a^b f_X(x)dx = 1.} \qquad (6.4.1)$$

3. Функція розподілу випадкової величини X виражається через щільність

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy.$$

4. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал (a; b)

$$\boxed{P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx.} \qquad (6.5)$$

5. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать лише інтервалу (a; b), то $f_X(x) = 0$ при $x \le a$ і при $x \ge b$.

***Зауваження 3.** З означення маємо:

$$P(x_0 < X < x_0 + \Delta x) \approx dF_X(x_0) = f_X(x_0)\Delta x,$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в Δ–окіл точки x_0 (в *малий* інтервал $(x_0;\, x_0+\Delta x)$) **наближено** дорівнює добутку $f_X(x_0)$ – значення щільності випадкової величини X в точці x_0 – на довжину *малого* інтервалу Δx. Аналогічні формули для інтервалів $(x_0-\Delta x; x_0)$ та $(x_0-\Delta x; x_0+\Delta x)$.

Приклад 2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x)=\begin{cases} a\sqrt{x+2}\,, & \text{при} \quad -2<x\le 7 \\ 0\,, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

а) Знайти величину a та функцію розподілу $F_X(x)$;

б) Знайти $P(-1<X<2)$;

Розв'язання. а) Величину a знайдемо з умови нормування (6.4.1):

$$a\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}dx=1 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}dx} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{18}, \quad \text{оскільки}$$

$$\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}dx=\left|\begin{matrix} y=x+2 & x=-2\Rightarrow y=0 \\ dy=dx & x=7\Rightarrow y=9 \end{matrix}\right|=\int_{0}^{9}\sqrt{y}dy=$$

$$=\left.\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=9}=\left.\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right|_{y=0}^{y=9}=\frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}})=18.$$

За властивостями щільності знаходимо функцію розподілу $F_X(x)$:

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(y)dy=\frac{1}{18}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{y+2}dy=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-2 \\ \frac{1}{27}(x+2)^{\frac{3}{2}} & \text{при } -2\le x\le 7 \\ 1 & \text{при } x>7 \end{cases}$$

б) За знайденою функцією розподілу та формулою (6.2)

$$P(-1<X<2)=F_X(2)-F_X(-1)=\frac{1}{27}\left((2+2)^{\frac{3}{2}}-(-1+2)^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{27}(8-1)=\frac{7}{27}\approx 0{,}26$$

6.3. Функції випадкового аргументу

П о с т а н о в к а   з а д а ч і : Нехай маємо випадкову величину X з відомою функцією розподілу $F_X(x)$ (або щільністю $f_X(x)$) та деяку задану невипадкову функцію $g(x)$. Розглянемо випадкову величину Y, що визначена так: $Y = g(X)$. Як знайти розподіл випадкової величини Y – функцію розподілу $F_Y(x)$ або щільність розподілу $f_Y(x)$?

Означення 6. Ф у н к ц і є ю   в и п а д к о в о г о   а р г у м е н т у X називають таку випадкову величину Y, яка набуває значення $y = g(x)$ щоразу, коли $X = x$, де $g = g(\cdot)$ – є невипадковою функцією. Позначають $Y = g(X)$.

Якщо X є дискретною випадковою величиною, то і функція випадкового аргументу $Y = g(X)$ буде дискретною випадковою величиною; якщо X є неперервною випадковою величиною, то і $Y = g(X)$ буде неперервною.

а) Якщо **дискретну** випадкову величину X задано рядом розподілу

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

то випадкова величина $Y = g(X)$ теж буде задана рядом розподілу (пригадаємо, що для дискретної випадкової величини цього достатньо для отримання функції розподілу $F_Y(x)$). Для отримання цього ряду розподілу спочатку побудуємо таку допоміжну таблицю

$g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…	$g(x_n)$
P	p_1	p_2	…	p_n

а потім потрібно впорядкувати перший рядок за зростанням та врахувати можливість того, що співпадуть значення функції $g(x)$ для різних x (тобто коли

$g(x_i)=g(x_j)$) – тоді треба в таблиці для цього значення Y скласти всі відповідні ймовірності: $p_i + p_j$.

Приклад 3. Дискретну випадкову величину *X* задано рядом розподілу:

X	–3	–1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Знайти ряд розподілу та функцію розподілу $F_Y(x)$ для випадкової величини $Y=3X^2$.

Розв'язання. З умови будемо мати таку таблицю

$3X^2$	27	3	0	3	12	27
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Тому отримаємо такий ряд розподілу випадкової величини $Y=3X^2$:

Y	0	3	12	27
P	0,2	0,3	0,3	0,2

б) Для **неперервної** випадкової величини X можливі різні ситуації, залежно від властивостей функції *g(x)*.

Отже, нехай випадкову величину *X* задано функцією розподілу $F_X(x)$ (або щільністю $f_X(x)$). Розглянемо випадкову величину *Y* = *g*(*X*), де *g(x)* – деяка задана функція.

Теорема 6.2. (для монотонної функції $g(x)$)

Якщо $g(x)$ – монотонна функція, для якої існує обернена $g^{-1}(x)$, то функція розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ випадкової величини *Y* будуть такими:

$$F_Y(x)=P(Y<x)=P(g(X)<x)=P\left(X<g^{-1}(x)\right)=F_X\left(g^{-1}(x)\right), \tag{6.6}$$

$$f_Y(x)=\left(F_Y(x)\right)'=\left(F_X\left(g^{-1}(x)\right)\right)'=f_X\left(g^{-1}(x)\right)\cdot\left|\left(g^{-1}(x)\right)'\right|. \tag{6.7}$$

Зауваження 4. (для довільної функції $g(x)$)

Якщо $g(x)$ – довільна функція, для якої існує обернена $g^{-1}(x)$, то функцію розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ випадкової величини $Y = g(X)$ знаходять так:

$$F_Y(x) = P\big(Y \in (-\infty; x)\big) = P\big(g(X) \in (-\infty; x)\big) = P\Big(X \in g^{-1}(-\infty; x)\Big),$$

$$f_Y(x) = \left(F_Y(x)\right)'.$$

Тепер пояснимо ідею знаходження функцію розподілу $F_Y(x)$ та щільність розподілу $f_Y(x)$ функції випадкового аргументу $Y = g(X)$ для неперервної випадкової величини X на прикладах.

Зауваження 5. Зверніть увагу, що для неперервної випадкової величини завжди **спочатку** знаходять функцію розподілу $F_Y(x)$, а **потім** за знайденою функцією розподілу – щільність $f_Y(x)$.

Приклад 4. Розглянемо неперервну випадкову величину *X*, що задана своєю щільністю $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Розглянемо випадкову величину $Y = X^2$ та знайдемо її щільність $f_Y(x)$.

Розв'язання. Дослухаємось до Зауваження 5 і знайдемо спочатку функцію розподілу $F_Y(x)$. Отже, за означенням функції розподілу

$$F_Y(x) = \mathrm{P}\{Y \le x\} = \mathrm{P}\{X^2 \le x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \mathrm{P}\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\}, & x \ge 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X\{-\sqrt{x} + 0\}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Отже, тепер можемо знайти щільність $f_Y(x)$:

$$f_Y(x) = (F_Y(x))' = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \big(F_X(y)\big)'\Big|_{y=\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' - \big(F_X(y)\big)'\Big|_{y=-\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x}\right)', & x \ge 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f_X\left(\sqrt{x}\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f_X\left(-\sqrt{x}\right), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(f_X\left(\sqrt{x}\right) + f_X\left(-\sqrt{x}\right)\right), & x \geq 0 \end{cases}$$

Далі, нам з умови відоме $f_X(x)$, тож тепер можемо знайти значення $f_X\left(\sqrt{x}\right)$ і $f_X\left(-\sqrt{x}\right)$ та підставити їх. Отримаємо:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Питання та задачі до теми

1. Що називають функцією розподілу? Для яких випадкових величин її розглядають?
2. Як знайти функцію розподілу для дискретної випадкової величини?
3. Назвіть та поясніть властивості функції розподілу.
4. Дайте означення щільності розподілу. Для яких випадкових величин її розглядають?
5. В чому полягає сенс умови нормування?
6. Чи можна за щільністю знайти функцію розподілу? А навпаки? Як це зробити?
7. Як знайти ймовірність протилежної події за допомогою щільності?
8. Які знайти щільність функції випадкового аргументу?

Задача 1. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

X	–4	2	6	13
P	0,3	0,1	0,4	p

Знайти величину p. Знайти функцію розподілу $F_X(x)$. Побудувати її графік.

Задача 2. Два стрільця роблять по одному пострілу. Ймовірність влучити для першого стрільця становить 0,6, для другого – 0,8. Випадкова величина X = “число влучень в мішень”. Побудувати графік функції розподілу.

Задача 3. Побудувати графіки $F_X(x)$ та $f_X(x)$ з Прикладу 2.

Задача 4. Знайти функцію розподілу $F_Y(x)$ та побудувати її графік для випадкової величини *Y* з Прикладу 3.

Задача 5. Неперервну випадкову величину *X* задано функцією розподілу:

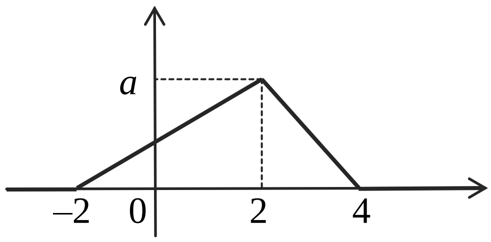
$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad x \le -3 \\ \dfrac{(x+3)^2}{49}\,, & \text{при} \quad -3 < x \le 4. \\ 1\,, & \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

а) Побудувати графік функції розподілу $F_X(x)$.

б) Знайти $P(-1 < X < 2)$.

в) Знайти рівняння щільності $f_X(x)$ та побудувати її графік.

Задача 6. Неперервну випадкову величину *X* задано щільністю розподілу. Знайти значення параметру a та $P(-1 < X < 3)$, виходячи з геометричних міркувань.



Задача 7. Неперервну випадкову величину *X* задано щільністю розподілу:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}\,, & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \\ 0\,, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

а) Знайти функцію розподілу $F_X(x)$.

б*) Знайти функцію розподілу $F_Y(x)$ та щільність $f_Y(x)$ для випадкової величини *Y*, заданої : б1) $Y = 5X$; б2) $Y = 2X^2$.

*Задача 8**. Для неперервної випадкової величини *X* відома щільність $f(x)$. Якою буде щільність випадкової величини а) $Y = 2X$; б) $Z = 2X - 3$?

Тема 7. Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу дає повну інформацію про випадкову величину, але на практиці зручніше користуватися лише певними числовими характеристиками випадкової величини.

7.1. Математичне сподівання

Означення 1. Математичне сподівання випадкової величини X позначається[17] MX і обчислюється за формулою:

а) для **дискретної** випадкової величини X, що задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{7.1}$$

б) для **неперервної** випадкової величини X, заданою щільністю $f_X(x)$,

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \tag{7.2}$$

б.1) якщо **всі можливі** значення випадкової величини X належать **лише** інтервалу $(a; b)$[18], то

$$MX = \int_{a}^{b} x f_X(x) dx. \tag{7.2.1}$$

- Математичне сподівання – синонім “середнє значення”.

Властивості математичного сподівання

1. $MC = C$, де C – $Const$.
2. $M(CX) = C \cdot MX$, де C – $Const$.

[17] Математичне сподівання ще може позначатися $M(X)$, $M[X]$ або, в іншомовній літературі, EX, $E(X)$.
[18] В такій ситуації цей інтервал $(a; b)$ називають н о с і є м випадкової величини.

3. $M(X \pm C) = MX \pm C$, де C – *Const.*

4. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$.

5. Якщо випадкові величини *X* та *Y* незалежні, то

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

6. Для невипадкової функції $g(x)$

$$Mg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \tag{7.3}$$

6.1. Якщо випадкова величина *Y* є невипадковою функцією від випадкової величини *X*: $Y = g(X)$ то її математичне сподівання знаходиться за формулою

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \tag{7.3.1}$$

Приклад 1. Знайти математичне сподівання *MX* дискретної випадкової величини *X*, що задана рядом розподілу:

X	–4	2	6	13
P	0,3	0,1	0,4	*p*

Розв'язання. Спочатку знайдемо невідомий параметр *p*. Знаходимо його з умови нормування для дискретних випадкових величин (5.1):

$$0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 + p = 1, \text{ отже } p = 1 - 0{,}3 - 0{,}1 - 0{,}4 = 0{,}2.$$

Далі для дискретної випадкової величини користуємось (7.1):

$$MX = -4\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}4 + 13\cdot 0{,}2 = 4$$

Приклад 2. Неперервну випадкову величину *X* задано щільністю розподілу:

$$f_X(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+2}, & \text{при } -2 < x \le 7 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання *MX*.

Розв'язання. В Прикладі 2 попередньої теми було знайдено значення $a=\dfrac{1}{18}$ і $\int\limits_{-2}^{7}\sqrt{x+2}dx=\int\limits_{0}^{9}\sqrt{y}dy=18$. Тоді, аналогічно, за (7.2.1)

$$MX=\int\limits_{a}^{b}xf_X(x)dx=\frac{1}{18}\int\limits_{-2}^{7}x\sqrt{x+2}dx=\left|\begin{matrix}y=x+2\\ dy=dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{18}\int\limits_{0}^{9}(y-2)\sqrt{y}dy=\frac{61{,}2}{18},$$

оскільки

$$\int\limits_{0}^{9}y\sqrt{y}dy=\int\limits_{0}^{9}y^{\frac{3}{2}}dy=\left.\frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=9}=\left.\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right|_{y=0}^{y=9}=\frac{2}{5}(9^{\frac{5}{2}}-0^{\frac{5}{2}})=\frac{2}{5}\cdot 243=\frac{486}{5}=97{,}2,$$

і

$$\int\limits_{0}^{9}(y-2)\sqrt{y}dy=\underbrace{\int\limits_{0}^{9}y\sqrt{y}dy}_{97{,}2}-2\underbrace{\int\limits_{0}^{9}\sqrt{y}dy}_{18}=97{,}2-2\cdot 18=61{,}2.$$

7.2. Дисперсія

Математичне сподівання дає мало інформації про випадкову величину – як середня температура по лікарні. Тому розглядають і інші характеристики.

Означення 2. Дисперсія[19] випадкової величини X позначається DX і дорівнює математичному сподіванню квадрату відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX:

$$DX=M\left(X-MX\right)^2. \tag{7.4}$$

а) для **дискретної** випадкової величини X, заданою рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$DX=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-MX\right)^2 p_i. \tag{7.5}$$

[19] Від грецького слова "*розсіювання*".

б) для **неперервної** випадкової величини *X*, заданою щільністю $f_X(x)$,

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f_X(x) dx. \qquad (7.6)$$

б.1) якщо ж **всі можливі** значення неперервної випадкової величини X належать **лише** інтервалу (*a*; *b*), то

$$DX = \int_{a}^{b} (x - MX)^2 f_X(x) dx. \qquad (7.6.1)$$

На практиці і для дискретних, і для неперервних випадкових величин **важливою** для обчислень дисперсії є така **формула**:

$$\boxed{DX = MX^2 - (MX)^2} \qquad (7.7)$$

● Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно її середнього значення.

● В англомовних джерелах дисперсію *DX* називають словом «variance[20]» (яке іноді перекладають як «варіація») і позначають: Var(*X*); Var *X* або var *X* .

Властивості дисперсії

1. $DX \geq 0$; $DX = 0$, тоді і лише тоді, коли $X = Const$.
2. $D(CX) = C^2 \cdot DX$, де $C - Const$.
3. $D(X \pm C) = DX$, де $C - Const$.
4. Формула Бієнайме[21] : якщо випадкові величини *X* та *Y* незалежні[22,23], то

$$D(X \pm Y) = DX + DY .$$

5. Якщо випадкові величини *X* та *Y* незалежні, то

$$D(X \cdot Y) = DX \cdot DY + DX \cdot (MY)^2 + DY \cdot (MX)^2. \qquad (7.8)$$

Ця формула може бути подана у вигляді, аналогічному до (7.7):

$$D(X \cdot Y) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2. \qquad (7.8.1)$$

---

[20] Має значення “*відхилення*”.
[21] Ірене-Жуль Бієнайме, французький статистик XIX століття.
[22] Насправді достатньо лише некорельованості випадкових величин (див. Тему 9.)
[23] Формула для знаходження дисперсії суми або різниці двох довільних випадкових величин наведена пізніше (див. формулу (9.20)).

Дисперсія має розмірність квадрату одиниць виміру випадкової величини X, що незручно. Тому часто використовують таку числову характеристику:

Означення 3. Середнім квадратичним[24] відхиленням (або стандартним відхиленням) випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії випадкової величини X:

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX}\,.^{25} \tag{7.9}$$

Приклад 3. Знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X з Прикладу 1.

Розв'язання. Знайдемо двома способами. За формулою (7.4) отримуємо:

$$DX = M\left(X - MX\right)^2 = (-4-4)^2\cdot 0{,}3 + (2-4)^2\cdot 0{,}1 + (6-4)^2\cdot 0{,}4 + (13-4)^2\cdot 0{,}2 =$$
$$= 64\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}4 + 81\cdot 0{,}2 = 37{,}4$$

За формулою (7.7) отримуємо:

$$MX^2 = (-4)^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}1 + 6^2\cdot 0{,}4 + 13^2\cdot 0{,}2 =$$
$$= 16\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}1 + 36\cdot 0{,}4 + 169\cdot 0{,}2 = 53{,}4;$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 53{,}4 - 4^2 = 53{,}4 - 16 = 37{,}4\,.$$

Значення звичайно ж співпали. Знайдемо $\sigma(X)$:

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{37{,}4} \approx 6{,}1\,.$$

Приклад 4. Знайти дисперсію та середньоквадратичне відхилення випадкової величини X з Прикладу 2.

Розв'язання. Знайдемо за формулою (7.7). Використовуючи (7.3) :

$$MX^2 = \int_a^b x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{18}\int_{-2}^{7} x^2\sqrt{x+2}\,dx = \begin{vmatrix} y = x+2 \\ dy = dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^9 (y-2)^2\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{18}\int_0^9 (y^2 - 2y + 1)\sqrt{y}\,dy =$$

[24] Або одним словом – "середньоквадратичним".
[25] σ – грецька буква, вимовляється *сігма*.

$$=\frac{1}{18}\left(\underbrace{\int_0^9 y^2\sqrt{y}dy}_{624,86}-2\underbrace{\int_0^9 y\sqrt{y}dy}_{97,2}+\underbrace{\int_0^9 \sqrt{y}dy}_{18}\right)=\frac{1}{18}\cdot 448,46\approx 24,91,$$

оскільки

$$\int_0^9 y^2\sqrt{y}dy=\int_0^9 y^{\frac{5}{2}}dy=\left.\frac{y^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=9}=\left.\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right|_{y=0}^{y=9}=$$

$$=\frac{2}{7}(9^{\frac{7}{2}}-0^{\frac{7}{2}})=\frac{2}{7}\cdot 2187=\frac{4374}{7}\approx 624,86.$$

Тоді дисперсія $DX=MX^2-(MX)^2=24,91-(3,4)^2=24,91-11,56=13,35$, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{DX}=\sqrt{13,35}\approx 3,65$.

Означення 4. Для довільної неперервної випадкової величини *X* можна розглянути випадкову величину

$$Z=\frac{X-MX}{\sigma(X)}, \tag{7.10}$$

яку називають *стандартною випадковою величиною*[26]. Про перехід від випадкової величини *X* до випадкової величини *Z* говорять "*перейти в Z-шкалу*".

Важливою властивістю отриманої випадкової величини *Z* є те, що вона є безрозмірною, що дає можливість (після переходу до *Z*-шкали) порівнювати випадкові величини, що мали різні одиниці вимірювання. Тому перехід в *Z*-шкалу часто використовують в практичних задачах контролю якості, надійності тощо, де варто очікувати, що спостерігаємо реалізацію випадкових величин, розподілених за нормальним законом розподілу. Отримані випадкові величини *Z* теж вважають нормально розподіленими (див. Тему 8).

[26] Тому що у всіх таких випадкових величин однакові – стандартні – $MZ = 0$, $DZ = 1$.

7.3. Початкові та центральні моменти. Асиметрія. Ексцес

Узагальнимо поняття математичного сподівання і дисперсії.

Означення 5. [Початковим] моментом [27] k-го порядку випадкової величини X називають її математичне сподівання k-го порядку:

$$\nu_k = \nu_k(X) = M\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx. \qquad (7.11)$$

Означення 6. Центральним моментом [28] k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го порядку відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX :

$$\mu_k = \mu_k(X) = M(X - MX)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k f_X(x)dx. \qquad (7.12)$$

Зауваження 1. Для дискретних випадкових величин для обох типів моментів мають місце простіші формули, аналогічні формулам для MX, DX :

$$MX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i\,; \qquad (7.11.1)$$

$$M(X - MX)^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^k p_i\,, \qquad (7.12.1)$$

а для неперервних випадкових величин, зосереджених лише на інтервалі $(a;\, b)$, для цих моментів теж є простіші формули, аналогічні формулам для MX, DX :

$$MX^k = \int_a^b x^k f_X(x)dx, \quad M(X - MX)^k = \int_a^b (x - MX)^k f_X(x)dx. \qquad (7.12.2)$$

Означення 5. Коефіцієнт асиметрії або просто асиметрія випадкової величини X це число, що позначають і знаходять за формулою

$$As = AsX = As(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}. \qquad (7.13)$$

---

[27] Позначається грецькою буквою ν, яка вимовляється *ню*.
[28] Позначається грецькою буквою μ, яка вимовляється *мю*.

● Це безрозмірна величина – тому це справді “коефіцієнт”.

Зауваження 2. Асиметрія характеризує те, наскільки симетрично випадкова величина X розподілена відносно свого середнього значення MX:

● якщо $AsX = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно свого математичного сподівання MX;

● якщо $AsX > 0$, то випадкова величина X несиметрично розподілена відносно свого середнього значення MX, а далеко відхиляється від MX в додатній бік набагато частіше, ніж далеко відхиляється від MX у від’ємний бік.

Означення 6. К о е ф і ц і є н т е к с ц е с у або просто е к с ц е с випадкової величини X це число, що позначається і обчислюється так:

$$Es = EsX = Es(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3. \qquad (7.14)$$

● Це теж безрозмірна величина – тому теж справді “коефіцієнт”.

Зауваження 3. Ексцес характеризує плосковершинність або гостровершинність кривої розподілу (тобто графіку щільності) випадкової величини X, порівняно з кривою розподілу стандартної нормально розподіленої випадкової величини (див. Означення 7 Теми 8):

● якщо $EsX = 0$, то випадкова величина X має дзвіноподібну криву розподілу, таку, як у кривої розподілу стандартної нормальної випадкової величини (див. Тему 8);

● якщо $EsX > 0$, то випадкова величина X має гостровершинну криву розподілу – набагато частіше приймає значення, близькі до свого середнього значення MX, ніж значення, що помітно відрізняються від MX.

Зауваження 4. У стандартної нормальної випадкової величини X відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} = 3$, тому в правій частині формули (7.13) віднімається 3 – щоб тоді $EsX = 0$ і саме з кривою розподілу стандартної нормальної випадкової X величини можна було б порівнювати задану.

7.4. Мода. Медіана

Означення 7. М о д а дискретної випадкової величини – це те її значення, яке має найбільшу ймовірність появи. Для неперервної випадкової величини м о д а – це точка максимуму щільності. Позначається *MoX*.

Якщо розподіл має моду, він зветься модальним. Якщо існує єдина мода, то розподіл випадкової величини називається одномодальним (або унімодальним); якщо є дві моди, то розподіл називається двомодальним (або бімодальним); якщо є багато мод, то розподіл називається багатомодальним (або полімодальним). Іноді зустрічаються такі розподіли випадкових величин, що мають посередині розподілу не максимальні, а мінімальні значення. Такі розподіли називають антимодальними.

Означення 8. М е д і а н а неперервної випадкової величини X – це таке її значення, яке поділяє навпіл розподіл випадкової величини X, тобто те значення MeX, для якого

$$P(X < MeX) = P(X > MeX) = 0{,}5 .$$

● Для дискретних випадкової величини медіана, як правило, не вводиться.

Зауваження 5. Геометрично, медіана – це абсциса точки, в якій площа, що обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, ділиться навпіл.

Питання та задачі до теми

1. Що називають математичним сподіванням випадкової величини X?
2. Які основні властивості математичного сподівання? Поясніть їх.
3. Що таке дисперсія випадкової величини X і що вона характеризує?
4. Які формули знаходження дисперсії існують?
5. Що таке середнє квадратичне відхилення і через що воно вводиться?
6. Початкові і центральні моменти – що це? Аналогом чого вони є?
7. Що таке асиметрія випадкової величини і яку інформацію вона несе?
8. Що таке ексцес випадкової величини і про що він може свідчити?
9. Що таке мода та медіана випадкової величини X?

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

X	1	2	3	4	5
P	0,15	0,1	0,35	p	0,25

Необхідно знайти: а) значення невідомої ймовірності p;

б) математичне сподівання MX, дисперсію DX;

в) ймовірності $P\{X<3\}$; $P\{1<X\le 4\}$; $P\{X\ge 2\}$.

Задача 2. Стрілець стріляє 3 рази. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,8. Для випадкової величини X = “число влучень” знайти математичне сподівання MX та дисперсію DX.

Задача 3. Серед 10 студентів 3 відмінника. Навмання обрали 3 студента. Для випадкової величини X = “число відмінників серед обраних студентів” знайти математичне сподівання MX та дисперсію DX.

Задача 4. Дискретна випадкова величина X може приймати лише два значення $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$, з ймовірностями p_1 та $p_2=1-p_1$ відповідно. Знайти закон розподілу випадкової величини X, якщо: а) p_1= 0,5, MX = 3,5, DX = 0,25; б) x_1 = 2, x_2 = 7, MX = 5; в) p_1= 0,2, MX = 4, $Mo\ X$ = 5.

Задача 5. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x+1}, & \text{при} \quad -1<x\le 7 \\ 0, & \text{при інших } x \end{cases}.$$

Знайти величину a, функцію розподілу $F_X(x)$, математичне сподівання MX, дисперсію DX та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Задача 6. Неперервну випадкову величину X задано щільністю:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0 \quad \text{і} \quad x>2 \\ \dfrac{3}{4}x(2-x), & \text{при} \quad 0<x\le 2 \end{cases}.$$

Обчислити MX, DX, $\sigma(X)$, AsX, EsX.

Задача 7. Знайти MoX та MeX для випадкової величини X з Прикладу 2.

Задача 8. Неважко зрозуміти, що $\nu_1=MX$; $\mu_2=DX$. Але при цьому $\mu_1\ne\sigma(X)$! А чому ж дорівнює μ_1?

Тема 8. Закони розподілу неперервних випадкових величин. Твірні та характеристичні функції

8.1. Рівномірний закон розподілу

Означення 1. Рівномірним на відрізку [a; b] називається розподіл такої неперервної випадкової величини X, всі значення якої лежать на відрізку (або інтервалі)[29] [a; b] і щільність якої всюди на [a; b] однакова.

● Позначають $X \sim \mathrm{U}(a; b)$ або $X \sim \mathrm{Uni}(a; b)$.

Отже, щільність та функція розподілу такої випадкової величини

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } \ x \in [a; b] \\ 0\ , & \text{при } x > b \end{cases} \tag{8.1}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } \ x \in [a; b]. \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$MX = \frac{a+b}{2}; \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}, \ \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{8.2}$$

8.2. Показниковий (експоненційний) закон розподілу

Означення 2. Неперервна випадкова величина X має показниковий (експоненційний) розподіл, якщо її щільність має вигляд (для $\lambda > 0$)[30]

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}. \tag{8.3}$$

Константа λ називається параметром показникового розподілу.

● Позначають $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Функція розподілу:

[29] Пригадаймо, що для неперервної випадкової величини включення чи ні окремої точки – несуттєве.
[30] λ – буква грецького алфавіту, вимовляється *лямбда*.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Числові характеристики :

$$MX = \frac{1}{\lambda}; \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (8.4)$$

Зауваження 1. В задачах часто потрібно оцінити невідомий параметр λ за відомими (знайденими) величинами $MX, DX, \sigma(X)$. Це зручно робити так:

$$\lambda = \frac{1}{MX} \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{1}{\sigma(X)}.$$

* 8.2.1. Елементи теорії надійності

Розглянемо певний елемент. Нехай він починає роботу в момент часу $t_0 = 0$, а в момент t відбувається відмова в його роботі. Позначимо через T неперервну випадкову величину – час безвідмовної роботи елементу, а через $\lambda > 0$ – інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу).

Означення 3. Ф у н к ц і є ю   н а д і й н о с т і *R(t)* називають функцію, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елементу протягом часу t :

$$R(t) = P(T > t).$$

Часто (як правило) тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, з функцією розподілу

$$F_T(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Означення 4. П о к а з н и к о в и м   з а к о н о м   н а д і й н о с т і називають таку функцію надійності *R(t)*, яка відповідає показниковому розподілу безвідмовної роботи елемента протягом часу *t*:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}.$$

Приклад 1. Час безвідмовної роботи приладу задано щільністю $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$. Знайти $P\{$прилад працюватиме без відмов 100 годин$\}$.

Розв'язання. Щільність задає показниковий розподіл, тому маємо показниковий закон надійності $R(t)=P(T>t)=1-P(T\le t)=e^{-\lambda t}=e^{-0{,}02t}$. Тому шукана ймовірність дорівнює:

$$R(100)=P(T>100)=e^{-0{,}02\cdot 100}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}\approx 0{,}135.$$

8.3. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу відіграє найважливішу роль в теорії ймовірностей, він найчастіше зустрічається на практиці. Головна його особливість полягає в тому, що він є граничним законом, тобто таким законом, до якого часто наближаються інші закони розподілу при типових умовах.

Означення 5. Нормальний розподіл (або розподіл Гауса) з параметрами a і σ^2 – це розподіл випадкової величини X, щільність якої має вигляд

$$\boxed{f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} \tag{8.5}$$

● Позначають $X \sim \mathrm{N}(a;\sigma^2)$. Входить два параметра: a та σ^2.

Функція розподілу :

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy.$$

Числові характеристики[31] :

$$MX=a; \qquad DX=\sigma^2; \qquad \sigma(X)=\sigma. \tag{8.6}$$

Тобто параметри нормального закону a і σ^2 – це його математичне сподівання MX і дисперсія DX відповідно. Як параметри a і σ^2 впливають на вигляд нормального розподілу?

Означення 6. Графік щільності нормального розподілу (8.5) називається нормальною кривою (або кривою Гауса).

[31] Їх можна знайти через характеристичну функцію, яка вводиться нижче. Це зроблено в кінці цієї теми (Приклад 4).

Ескіз графіка нормальної кривої наведено на рисунку 8.1 нижче. Це характерна дзвоноподібна крива. Вона симетрична відносно значення $x = a$, а її вершина має координати $\left(a; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, тому зміна параметру a призводить до зміщення нормальної кривої вправо чи вліво, а зміна параметру σ^2 призводить до її притискання або відтискання відносно осі OX.

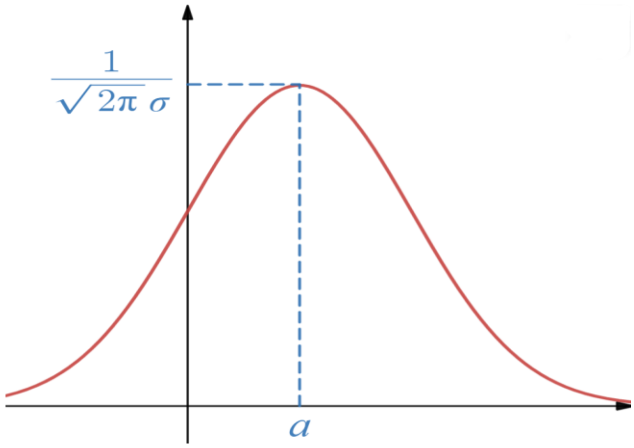


Рис. 8.1. Крива Гауса[32]

Означення 7. Якщо випадкова величина $X \sim \mathrm{N}(0; 1)$, то вона називається с т а н д а р т н о ю н о р м а л ь н о ю. Тоді її щільністю $f_X(x)$ буде функція Гауса, а функцією розподілу $F_X(x)$ буде т.зв. р о з ш и р е н а ф у н к ц і я Л а п л а с а[33]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Зауваження 2. Для стандартної нормальної випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(0; 1)$ має місце рівність $AsX = EsX = MoX = MeX = 0$.

Теорема 8.1. Для нормально розподіленої з параметрами a і σ^2 випадкової величини X (тобто $X \sim \mathrm{N}(a; \sigma^2)$)

$$P(b_1 < X < b_2) = \Phi\left(\frac{b_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b_1 - a}{\sigma}\right). \tag{8.7}$$

(тут $\Phi(x)$ – функція Лапласа)

[32] Крива Гауса визначена на $(-\infty; \infty)$, але при далеких від a значеннях вона дуже близька до осі OX.
[33] Від стандартної функції Лапласа відрізняється тим, що нижньою межею інтегрування є $-\infty$, а не 0.

Наслідок 1. Для стандартної нормальної випадкової величини (тобто для $X \sim \mathrm{N}(0;\, 1)$) ймовірність потрапити в заданий інтервал $(b_1; b_2)$ дорівнює

$$\boxed{P(b_1 < X < b_2) = \Phi(b_2) - \Phi(b_1)\,.} \qquad (8.7.1)$$

Далі, нехай випадкова величина $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$. Тоді з формули (8.7)

$$P(|X - a| < \delta) = P(-\delta < X - a < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Наслідок 2. Отже, маємо такі ймовірності відхилитися від середнього

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right); \qquad (8.8)$$

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(0;\, 1)$

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta). \qquad (8.8.1)$$

Підставимо тепер в отриману формули (8.8) значення $\delta = 3\sigma$. Будемо мати:

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973; \qquad (8.9)$$

– для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(0;\, 1)$

$$P(|X| < 3) = 2\Phi(3) = 0{,}9973. \qquad (8.9.1)$$

Отже, внаслідок проведення одного експерименту значення випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\, \sigma^2)$ з ймовірністю більшою за 0,997 потрапить в інтервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$, або ж, відповідно, з ймовірністю меншою за 0,003 не потрапить в цей інтервал. На практиці такою малою ймовірністю як правило нехтують і тому вважають, що виконується наступне правило:

Наслідок 3. Правило «трьох сигм» (“правило 3 σ”).

При одному спостереженні нормально розподіленої випадкової величини практичним інтервалом її можливих значень є інтервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Зауваження 3. З нерівності Чебишева (див. нижче) випливає, що для довільної випадкової величини *X*, з $MX = a,\ DX = \sigma^2$ має місце оцінка

$$P\{X \notin (a-3\sigma;\, a+3\sigma)\} = P\{|X-a| \ge 3\sigma\} \le \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1.$$

Тому на практиці інколи користуються правилом «трьох сигм» і для довільної випадкової величини, а не лише для нормально розподіленої.

Приклад 2. Монету було підкинуту 100 разів. Герб випав 32 рази. Чи можна вважати монету симетричною?

Розв'язання. Маємо схему Бернуллі зі 100 незалежних експериментів. Якщо монета симетрична, то ймовірність «успіху» = «монета випала гербом» в кожному з експериментів становить p = 0,5. Позначимо випадкову величину $X = \{$кількість «успіхів» в схемі Бернуллі$\}$, тоді *X* має біноміальний розподіл[34] і її числові характеристики $MX = np = 50;\ DX = npq = 25;\ \sigma = \sqrt{DX} = 5$.

Тоді, за правилом «трьох сигм», для симетричної монети практично можливими кількостями випадінь герба є значення з інтервалу (35; 65). Число 32 не входить в цей діапазон, тому монету не можна вважати симетричною.

8.4. Твірні функції

Для вивчення випадкових величин із невідомим розподілом використовують спеціальні функції, розглянуті нижче.

Розглядаємо цілочислову випадкову величину *X*, що набуває цілих невід'ємних значень з відповідними ймовірностями: $p_k = P\{X = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, причому $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1$.

[34] Забігаючи наперед, в описаній ситуації виконуються вимоги центральної граничної теореми, а значить випадкова величина *X* насправді матиме нормальний розподіл зі знайденими параметрами розподілу.

Означення 8. Твірною функцією[35] [розподілу] цілочислової випадкової величини X будемо називати вираз виду[36]:

$$z_X(y) = My^X = \sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k = p_0 + yp_1 + y^2 p_2 + \ldots + y^n p_n + \ldots \qquad (8.10)$$

де $y \in [-1;1]$ (точніше, $|y| \le 1$) – дійсна або комплексна змінна.

● Може бути, що деякі p_k в (8.10) дорівнюють 0. Якщо всі p_k, починаючи з деякого, дорівнюють 0, то вираз (8.10) називають *твірним многочленом*.

● Ряд (8.10) є степеневим рядом. А як відомо з курсу математичного аналізу, такі ряди мають гарні властивості – для них легко знайти інтервал збіжності, ці ряди диференціюються або інтегруються в точках збіжності.

Властивості твірних функцій

1. $z_X(y)$ визначена в кожній точці відрізку [–1; 1].

2. При $y = 1$ значення твірної функції $z_X(y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

3. **Формула для знаходження ймовірностей** через твірні функції

$$z'_X(0) = \left(p_0 + yp_1 + y^2 p_2 + \ldots + y^n p_n + \ldots\right)'\Big|_{y=0} = p_1 .$$

$$p_k = \frac{1}{k!} z_X^{(k)}(0), \qquad k = 0,1,\ldots,n,\ldots \qquad (8.11)$$

4. **Формула для знаходження моментів** через твірні функції

$$z'_X(1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k\right)'\Bigg|_{y=1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} p_k\right)\Bigg|_{y=1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = MX .$$

$$MX = z'_X(1); \qquad DX = z''_X(1) + z'_X(1) - \left(z'_X(1)\right)^2 .$$

[35] Англійською «*generating function*». Українською інколи вживають схоже слово «генератриса».

[36] Докладніше про твірні функції можна довідатися https://www2.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf (англійською) або https://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf (російською)

5. Часто буває так, що твірна функція деякої випадкової величини є одночасно рядом Маклорена певної відомої функції, тож це можна використати при вивченні властивостей випадкової величини.

6. **Критерій незалежності випадкових величин (через твірні функції).** Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ незалежні тоді і лише тоді, якщо

$$z_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(y) = z_{X_1}(y) \cdot z_{X_2}(y) \cdot \ldots \cdot z_{X_n}(y).$$

Застосування твірних функцій

Приклад 1. Нехай $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$. Її твірна функція дорівнює

$$z_X(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k = \sum_{k=0}^{n} y^k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (py)^k q^{n-k} = (py+q)^n .$$

Остання рівність – з формули біному Ньютона. Тоді за Властивістю 4

$$MX = z'_X(1) = \left((py+q)^n\right)'\Big|_{y=1} = np(py+q)^{n-1}\Big|_{y=1} = np(p+q)^{n-1} = np;$$

$$DX = np(n-1)p + np - (np)^2 = npq .$$

Приклад 2. Нехай $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Її твірна функція дорівнює

$$z_X(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda y)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda y} = e^{\lambda(y-1)} .$$

Тут передостання рівність – з формули ряду Маклорена для показникової функції. Тоді за Властивістю 4

$$MX = z'_X(1) = \left(e^{\lambda(y-1)}\right)'\Big|_{y=1} = \lambda e^{\lambda(y-1)}\Big|_{y=1} = \lambda$$

$$DX = z''_X(1) + z'_X(1) - \left(z'_X(1)\right)^2 = \lambda^2 e^{\lambda(y-1)}\Big|_{y=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

8.5. Характеристичні функції

Розглядаємо неперервну випадкову величину *X*, тобто задану своєю щільністю розподілу $f_X(x)$.

Означення 9. Характеристичною функцією [37] неперервної випадкової величини *X* називається функція

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx, \qquad (8.12)$$

де $t \in (-\infty; +\infty)$, а число i – уявна одиниця, тобто таке число, що $i^2 = -1$.

Для **дискретної** (не обов'язково цілочислової) випадкової величини *X* характеристичну функцію визначають так:

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \sum_{i=1}^{n} e^{itx_i} p_i . \qquad (8.12.1)$$

● Як відомо з курсу математичного/комплексного аналізу, формула (8.12) задає обернене перетворення Фур'є функції щільності розподілу $f_X(x)$.

Властивості характеристичних функцій

1. $\varphi_X(t)$ визначена і неперервна в кожній точці;

2. $\varphi_X(0) = Me^0 = M1 = 1$; $|\varphi_X(t)| \le 1$ при $t \in (-\infty; +\infty)$.

3. **Формула для знаходження моментів** через характеристичні функції.

Маємо, що $\varphi'_X(0) = \left(Me^{itX}\right)'\Big|_{t=0} = M\left(iXe^{itX}\right)\Big|_{t=0} = M(iX) = iMX$, звідки

$$\boxed{MX^n = \frac{1}{i^n}\varphi_X^{(n)}(0);} \qquad (8.13)$$

$$MX = \frac{1}{i}\varphi'_X(0); \quad DX = -\varphi''_X(0) + \left(\varphi'_X(0)\right)^2 . \qquad (8.13.1)$$

[37] Англійською «*characteristic function*».

4. Якщо випадкова величина X має характеристичну функцію $\varphi_X(t)$, то характеристична функція випадкової величини $Y = aX + b$ де a, b – константи:

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

5. **Критерій незалежності випадкових величин.**

Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні тоді і лише тоді, якщо:

$$\varphi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}(t).$$

6. Зв'язок між характеристичною функцією $\varphi_X(t)$ випадкової величини X і її щільністю розподілу $f_X(x)$ (пряме перетворення Фур’є функції $\varphi_X(t)$):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

7. Зв’язок між твірною і характеристичною функціями цілочислової дискретної випадкової величини X:

$$\lim_{y\to e^{it}} z_X(y) = \varphi_X(t).$$

Застосування характеристичних функцій

Приклад 3. Розглянемо випадкову величину X ~ N(0; 1). Знайдемо її характеристичну функцію і, через неї, числові характеристики:

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ dy = \dfrac{dx}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2}ity-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{2}ity-y^2+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{t^2}{2}}dy = e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2}dy = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ми виділили повний квадрат в показнику і використали формулу, відому як інтеграл Гауса або Ейлера-Пуассона:

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy .$$

Тоді за Властивістю 3 характеристичних функцій

$$MX = \frac{1}{i}\varphi'_X(0) = \frac{1}{i}\cdot\left.\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right|_{t=0} = 0;$$

$$DX = -\varphi''_X(0) + \left(\varphi'_X(0)\right)^2 = -\left.\left(-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right|_{t=0} + 0 = 1.$$

Приклад 4. Нехай випадкова величина X ~ N(a; σ^2). Знайти її характеристичну функцію.

Розв'язання. Розглянемо відповідну стандартну випадкову величину

$$Y = \frac{X-a}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0;\ 1),$$

тоді її характеристична функція $\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, але з іншого боку маємо $X = \sigma Y + a$, тоді за Властивістю 4

$$\varphi_X(t) = e^{ita}\varphi_Y(\sigma t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} . \tag{8.14}$$

Наслідок 4. Спосіб перевірки чи нормальний закон розподілу має випадкова величина.

Формулу (8.14) використовують для перевірки того, чи є деяка випадкова величина розподіленою за нормальним законом і з якими параметрами.

Зауваження 3. На практиці для перевірки того, чи "схожий" закон розподілу деякої випадкової величини на нормальну закон розподілу, перевіряють чи для неї $AsX = EsX = 0$.

Питання та задачі до теми

1. Наведіть приклади випадкової величини, яку можна вважати розподіленої за а) рівномірним неперервним; б) показниковим; в) нормальним законом розподілу
2. Скільки параметрів у показникового закону розподілу? В якому вигляді вони входять у щільність та у функцію розподілу?
3. Сформулюйте, яку випадкову величину називають розподіленою за нормальним законом розподілу. Наведіть приклади.
4. Як параметри нормального закону впливають на криву розподілу?
5. Яку випадкову величину називають стандартною? Як із нормально розподіленої випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\ \sigma^2)$ зробити стандартну випадкову величину?
6. В яких задачах використовують стандартні випадкові величини?
7. Чому дорівнюють AsX, EsX, MoX, MeX для випадкової величини $X \sim \mathrm{N}(a;\ \sigma^2)$?
8. Про що йде мова в «правилі трьох сигм»?
9. Дайте означення твірної функції, пригадайте її основні властивості.
10. Дайте означення характеристичної функції, наведіть її властивості.
11. Для яких випадкових величин доцільно використовувати твірну функцію, а для яких – характеристичну?

Задача 1. Розглянути випадкову величину $X \sim \mathrm{Geom}(0{,}4)$. Знайти її твірну функцію та, з її допомогою, числові характеристики MX і DX.

Задача 2. Розглянути випадкову величину $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Знайти її характеристичну функцію та, з її допомогою, числові характеристики MX і DX.

Задача 3. Для випадкової величини, розподіленої за вказаним законом розподілу, знайти:

а) MX і DX; б) $\mathrm{P}(1 \le X \le 3)$; в) MoX, MeX; г)* AsX, EsX.

1) $X \sim \mathrm{Uni}(1;\ 5)$; 2) $X \sim \mathrm{Exp}(2)$; 3) $X \sim \Pi(100;\ 0{,}1)$;

4) $X \sim \mathrm{N}(0;\ 1)$; 5) $X \sim \mathrm{N}(1;\ 4)$.

Тема 9. Випадкові вектори. Сумісні розподіли

9.1. Багатовимірні та двовимірні випадкові вектори

Припустимо, що на ймовірнісному просторі (Ω, *F,* P) визначено n випадкових величин: $X_1, X_2, ..., X_n$.

Для кращого розуміння, крім загального випадку, будемо розглянемо окремо двовимірний випадковий вектор. Отже, нехай X, Y – випадкові величини, що визначені на одному ймовірнісному просторі (Ω, *F,* P).

Означення 1. Випадковим вектором або n-вимірною випадковою величиною називають вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Означення 1.1. Випадковим вектором або двовимірною випадковою величиною називають вектор $Z = (X, Y)$.

Розподіл випадкового вектора $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ задається залежно від того, є випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ дискретними або неперервними.

Означення 2. Сумісна функція розподілу n випадкових величин $X_1, ..., X_n$ або n-вимірний розподіл випадкового вектора X – це :

а) для дискретних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ – функцію

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathrm{P}\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n\}; \tag{9.1.1}$$

б) для неперервних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ – функцію

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathrm{P}\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n\}. \tag{9.1.2}$$

Означення 2.1. Сумісна функція розподілу двох випадкових величин X та Y або двовимірний розподіл випадкового вектора Z – це:

а) для дискретних випадкових величин X, Y – функція

$$p(x, y) = \mathrm{P}\{X = x, Y = y\}; \tag{9.2.1}$$

б) для неперервних випадкових величин X, Y – функція

$$F_Z(x, y) = \mathrm{P}\{X \le x, Y \le y\}. \tag{9.2.2}$$

Зауваження 1. Замість фрази «сумісна функція розподілу» часто говорять просто «сумісний розподіл».

Властивості сумісної функції розподілу

1. $0 \le F_Z(x, y) \le 1$; $F_Z(-\infty, y) = F_Z(x, -\infty) = 0$; $F_Z(+\infty, +\infty) = 1$.
2. $F_Z(x, y)$ монотонно неспадна та неперервна зліва за кожною координатою;
3. З сумісної функції розподілу можемо отримати функції розподілу окремих координат випадкового вектору:

$$F_Z(x, +\infty) = \mathrm{P}\{X \le x\} = F_X(x);\\ F_Z(+\infty, y) = \mathrm{P}\{Y \le y\} = F_Y(y). \tag{9.3}$$

4. Геометричне тлумачення двовимірної функції розподілу. Значення функції $F_Z(x, y)$ дорівнює ймовірності того, що випадкова точка, що відповідає кінцю випадкового вектора Z, потрапить в напіввідкритий квадрат з вершиною в точці (x; y), тобто в заштриховану частину площини:

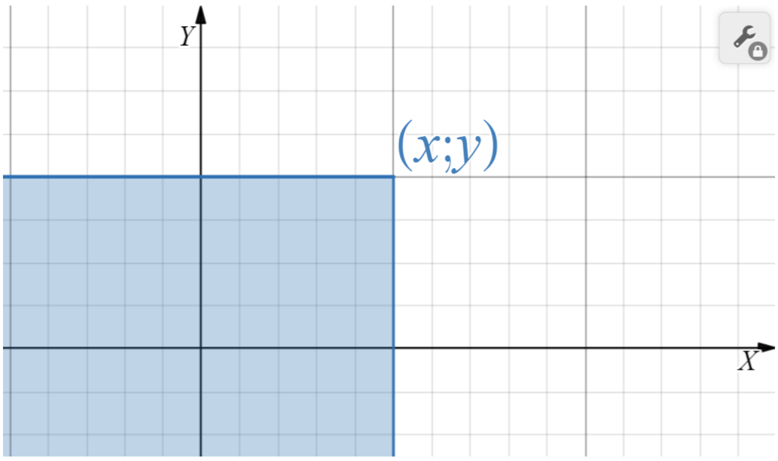
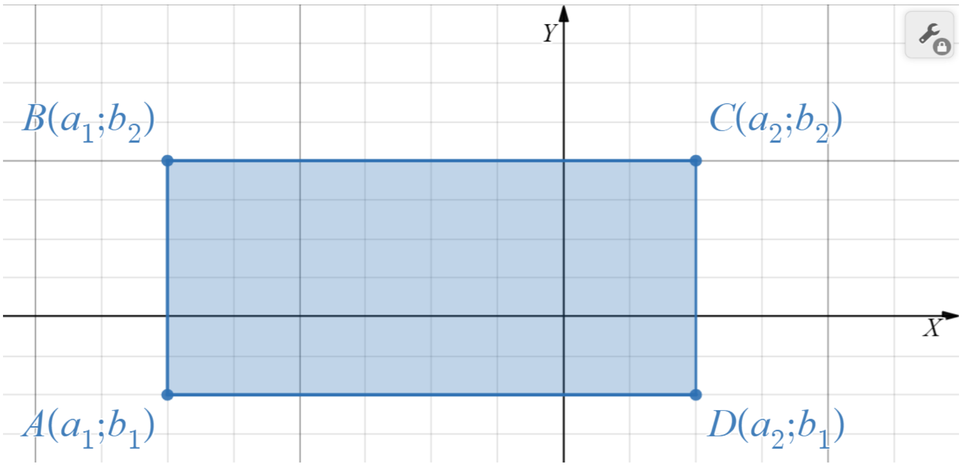


Рис. 9.1. Геометричне тлумачення двовимірної функції розподілу

Приклад 1. Нехай для випадкового вектору $Z = (X, Y)$ відома сумісна функція розподілу $F_Z(x, y)$. Знайти ймовірність того, що випадковий вектор $Z = (X, Y)$ потрапить в прямокутник *ABCD*, тобто $\mathrm{P}\{a_1 \le X \le a_2, b_1 \le Y \le b_2\}$.

Розв'язання. Використаємо геометричне тлумачення двовимірного розподілу. Тоді прямокутник *ABCD* утворюється, якщо від відкритого квадрату з вершиною в точці C відняти відкриті квадрати з вершинами в точках B і D та додати відкритий квадрат з вершиною в точці A:



Тому ймовірність того, що випадковий вектор $Z=(X,Y)$ потрапить в заданий прямокутник $ABCD$ дорівнює сумі відповідних значень $F_Z(x,y)$:

$$\mathrm{P}\{a_1 \le X \le a_2, b_1 \le Y \le b_2\} = F_Z(a_2,b_2) - F_Z(a_1,b_2) - F_Z(a_2,b_1) + F_Z(a_1,b_1).$$

9.2. Сумісна щільність. Ймовірність потрапити в область

Означення 3. Випадковий вектор $Z=(X,Y)$ називають абсолютно неперервним, якщо існує функція $f_Z(x,y)\ge 0$, така, що

$$F_Z(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_Z(s,t)\,ds\,dt. \qquad (9.4)$$

Функція $f_Z(x,y)$ називається сумісною щільністю розподілу випадкового вектору $Z=(X,Y)$ (або випадкових величин X та Y).

Зауваження 2. Якщо сумісна функція розподілу $F_Z(x,y)$ є двічі диференційованою в точці $(x; y)$, то сумісну щільність знаходять так:

$$f_Z(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_Z(x,y). \qquad (9.5)$$

Теорема 9.1. (ймовірність випадкового вектора потрапити в область)

Нехай випадковий вектор $Z=(X,Y)$ має сумісну щільність $f_Z(x,y)$. Тоді ймовірність того, що випадковий вектор $Z=(X,Y)$ потрапить в деяку область D знаходять за формулою :

$$\mathrm{P}\{Z\in D\}=\iint\limits_D f_Z(x,y)dxdy. \tag{9.6}$$

9.3. Функція розподілу та щільність компонент випадкового вектору

Нехай випадковий вектор $Z=(X,Y)$ має сумісну щільність $f_Z(x,y)$. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s,t)dsdt=F_Z(x,+\infty)=F_X(x).$$

Отримали функцію розподілу випадкової величини *X*. Далі, отримуємо

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s,t)dsdt\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x,t)dt \tag{9.7.1}$$

– щільність випадкової величини *X*.

Аналогічно можемо отримати функцію розподілу $F_Y(y)$ та щільність розподілу $f_Y(y)$ випадкової величини *Y*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_Z(s,t)dsdt=F_Z(+\infty,y)=F_Y(y),$$

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Z(s,y)ds. \tag{9.7.2}$$

Означення 4. Функції розподілу $F_X(x)$, $F_Y(y)$ та щільності розподілу $f_X(x)$, $f_Y(y)$ окремих компонент випадкового вектору $Z=(X,Y)$, що визначені за (9.3), (9.7) відповідно, називаються маржинальними (маргінальними) функціями розподілу та щільностями розподілу відносно відповідно сумісної функції розподілу $F_Z(x, y)$ та сумісної щільності розподілу $f_Z(x, y)$.

9.4. Незалежність випадкових величин

Для випадкових подій важливу роль відігравало поняття незалежності. Введемо тепер означення незалежності випадкових величин.

Означення 5. Випадкові величини *X* та *Y*, що визначені на одному й тому ж ймовірнісному просторі (Ω, *F*, P), називають н е з а л е ж н и м и, якщо для будь-яких *x* та *y* виконуються рівності:

а) для дискретних випадкових величин X та Y:

$$\mathrm{P}\{X = x, Y = y\} = \mathrm{P}\{X = x\} \cdot \mathrm{P}\{Y = y\}; \tag{9.8}$$

б) для неперервних випадкових величин X та Y:

$$\mathrm{P}\{X \le x, Y \le y\} = \mathrm{P}\{X \le x\} \cdot \mathrm{P}\{Y \le y\}, \tag{9.9}$$

або ж, використовуючи сумісну та маржинальні функції розподілу:

$$F_Z(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y). \tag{9.10}$$

Тоді з формул (9.5) та (9.10) маємо:

Теорема 9.2. (критерій незалежності)

Нехай $Z = (X, Y)$ – абсолютно неперервний випадковий вектор, з сумісною щільністю розподілу випадкових величин $f_Z(x, y)$.

Випадкові величини X та Y є незалежними тоді і лише тоді, коли для майже всіх[38] точок площини (x, y) має місце рівність:

$$f_Z(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y). \tag{9.11}$$

Теорема 9.3. (про спадковість незалежності)

Нехай X та Y – незалежні випадкові величини, а $f(x)$ та $g(x)$ – довільні невипадкові функції, що визначені на множини значень випадкових величин

[38] Строге формулювання: міра тих точок (*x*; *y*), для яких не виконується вказана рівність, дорівнює 0.

X та Y відповідно. Тоді випадкові величини $f(X)$ та $g(Y)$ теж є незалежними випадковими величинами.

9.5. Розподіл суми, різниці та відношення двох випадкових величин. Згортка функцій, крос-кореляція функцій, автокореляція

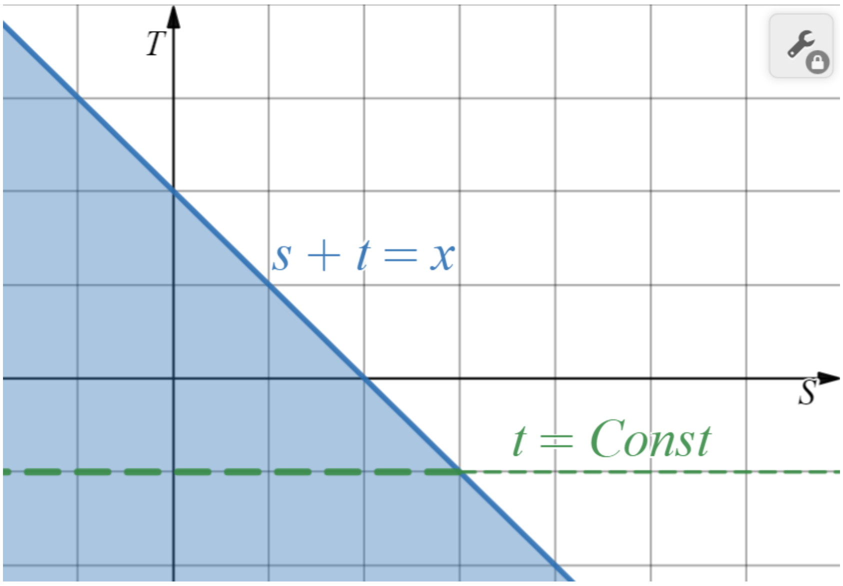
9.5.1. Розподіл суми двох випадкових величин

Нехай існує сумісна щільність $f_Z(x, y)$ випадкового вектору $Z = (X, Y)$. Розглянемо випадкову величину $V = X + Y$. Знайдемо її функцію розподілу:

$$F_V(x) = \mathrm{P}\{V \le x\} = \mathrm{P}\{X + Y \le x\} = \mathrm{P}\{Z \in \{(s,t):\ s + t \le x\}\} =$$

$$= \left| \textit{за} \quad \textit{формулою} \quad (9.6) \right| = \iint\limits_{s+t \le x} f_Z(s,t)\,ds\,dt =$$

Перейдемо від подвійного інтегралу до повторних. Для цього зобразимо область інтегрування та продовжимо інтегрування:



$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x-t} f_Z(s,t)\,ds \right) dt = \left| \begin{array}{l} u = s + t \Rightarrow du = ds \\ s = -\infty \Rightarrow u = -\infty \\ s = x - t \Rightarrow u = x \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f_Z(u-t,t)\,du \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u-t,t)\,dt \right) du.$$

Тепер знайдемо щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$:

$$f_V(x)=\frac{d}{dx}F_V(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(u-t,t)dt\right)du\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(x-t,t)dt,$$

$$f_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(x-t,t)dt. \qquad (9.12.1)$$

Аналогічним чином можемо показати, що щільність розподілу випадкової величини $V=X+Y$ можна також знайти так:

$$f_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(s,x-s)ds. \qquad (9.12.2)$$

9.5.2. Розподіл суми двох незалежних випадкових величин

Тепер припустимо, що випадкові величини X та Y є незалежними та мають щільності $f_X(x)$, $f_Y(y)$ та функції розподілу $F_X(x)$, $F_Y(y)$. Знайдемо щільність розподілу випадкової величини $V=X+Y$.

З формули (9.11) маємо:

$$f_Z(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

Далі, з формул (9.12.1) та (9.12.2) маємо формулу для щільності розподілу випадкової величини $V=X+Y$:

$$f_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t)f_Y(x-t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x-t)f_Y(t)dt. \qquad (9.13)$$

Зауваження 3. Якщо випадкові величини X та Y є невід'ємними, тоді формула для знаходження щільності їх суми (9.13) набуває вигляду:

$$f_{X+Y}(x)=\int_{0}^{+\infty}f_X(t)f_Y(x-t)dt=\int_{0}^{+\infty}f_X(x-t)f_Y(t)dt. \qquad (9.13.1)$$

Зауваження 4. Якщо X та Y є незалежними дискретними випадковими величинами, то для них формула для знаходження ймовірностей конкретних значень (аналог формули згортки (9.13) для дискретного випадку) має вигляд:

$$p_{X+Y}(k)=\mathrm{P}\{X+Y=k\}=\sum_i \mathrm{P}\{X=x_i\}\cdot\mathrm{P}\{Y=k-x_i\}. \qquad (9.13.2)$$

Приклад 2. Нехай X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на відрізках $[0;\,2]$ та $[0;\,3]$ відповідно, тобто зі щільностями

$$f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{при} \quad t\in[0;\,2]\\ 0\,, & \text{при інших } t\end{cases}; \qquad f_Y(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & \text{при} \quad t\in[0;\,3]\\ 0\,, & \text{при інших } t\end{cases}.$$

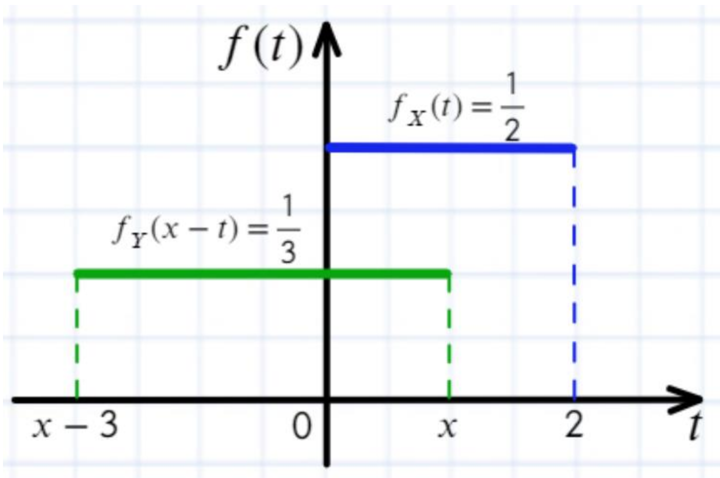
Знайти щільність розподілу випадкової величини $V=X+Y$.

Розв'язання. Зрозуміло, що випадкова величина V не може набувати від'ємних значень (бо і X, і Y – невід'ємні), та не може бути більшою за 5 (сума максимальних значень X та Y) тобто, щільність випадкової величини $V=X+Y$ має вигляд $\quad f_V(x)=f_{X+Y}(x)=0, \quad \text{при} \quad x\notin[0;\,5].$

При $x\in[0;\,5]$ щільність будемо знаходити за формулою (9.13) або (9.13.1):

$f_{X+Y}(x)=\int\limits_0^{+\infty} f_X(t)\,f_Y(x-t)dt.$ Тому розглянемо кілька випадків.

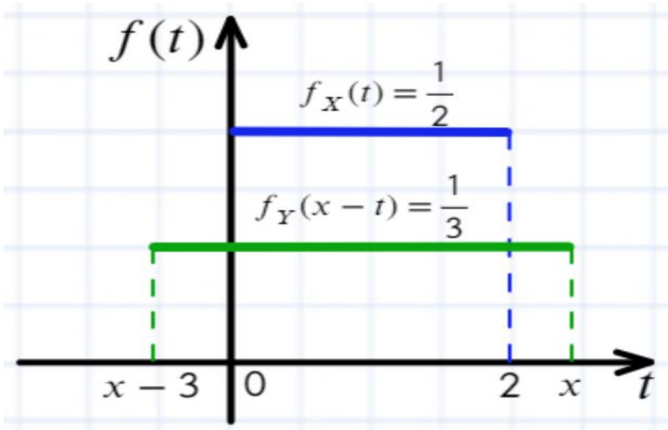
1 випадок. При $0\le x<2$ маємо такі графіки підінтегральних функцій:



За графіками бачимо, що добуток підінтегральних функцій відмінний від нуля лише при $t\in[0;\,x]$, тому в цьому випадку

$$f_{X+Y}(x)=\int\limits_0^{x} f_X(t)\,f_Y(x-t)dt=\int\limits_0^{x}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{x}{6}.$$

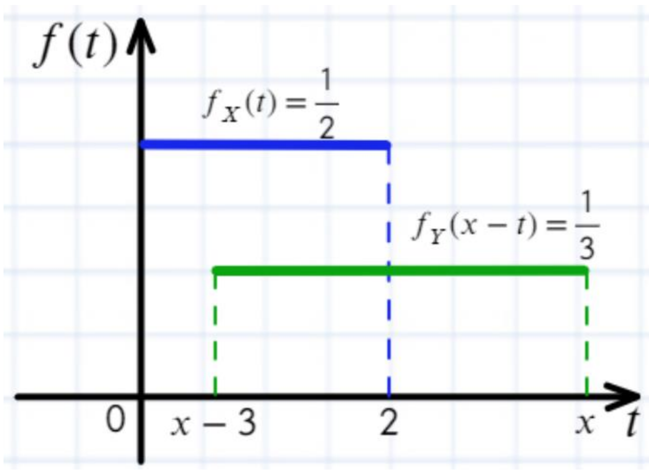
2 випадок. При $2\le x<3$ маємо такі графіки підінтегральних функцій:



Відповідно, їх добуток відмінний від нуля при $t\in[0;2]$, тому

$$f_{X+Y}(x)=\int_0^2 f_X(t)\,f_Y(x-t)dt=\int_0^2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

3 випадок. При $2\le x\le 5$ маємо такі графіки підінтегральних функцій:



Відповідно, їх добуток відмінний від нуля при $t\in[x-3;2]$, тому

$$f_{X+Y}(x)=\int_{x-3}^2 f_X(t)\,f_Y(x-t)dt=\int_{x-3}^2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{6}(2-x+3)=\frac{5-x}{6}.$$

В підсумку маємо таку щільність випадкової величини $V=X+Y$:

$$f_V(x)=f_{X+Y}(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\notin[0;5]\\ \frac{x}{6}, & \text{при} \quad x\in[0;2]\\ \frac{1}{3}, & \text{при} \quad x\in[2;3]\\ \frac{5-x}{6}, & \text{при} \quad x\in[3;5]\end{cases}.$$

9.5.3. Згортка та крос-кореляція, автокореляція

Означення 6. Функція $h(x)$, що утворена з двох функцій $f(x)$ та $g(x)$ за формулою (9.13), тобто визначена рівністю

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt,$$

називається з г о р т к о ю[39] ф у н к ц і й $f(x)$ та $g(x)$, та позначається значком $*$:

$$h(x)=(f*g)(x).$$

Наслідок 1. Таким чином, щільність розподілу суми двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює згортці їх щільностей.

Означення 7. Функція $h(x)$, утворена з функцій $f(x)$ та $g(x)$ рівністю[40]

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x+t)dt. \qquad (9.14)$$

називається к р о с - к о р е л я ц і є ю[41] (або в з а є м н о ю к о р е л я ц і є ю) ф у н к ц і й $f(x)$ та $g(x)$, та позначається значком $\star$:

$$h(x)=(f\star g)(x).$$

Наслідок 2. Щільність розподілу різниці двох незалежних випадкових величин X та Y заходиться як крос-кореляція їх щільностей $f_Y(y)$ та $f_X(x)$ (важливий порядок!):

$$f_U(x)=(f_Y\star f_X)(x),$$

де $U=X-Y$, тобто

$$f_U(x)=f_{X-Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,f_Y(t-x)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x+t)\,f_Y(t)dt. \qquad (9.15)$$

Деякі властивості згортки та крос-кореляції

1. $f*g=g*f$;
2. $(f\star g)(t)=(g\star f)(-t)$;

---

[39] Англійською "*convolution*".
[40] Для дійсного аргументу *t*.
[41] Англійською "*cross-correlation*".

3. $f(t) \star g(t) = f(-t) * g(t)$;

3.1. Якщо функція $f(x)$ – парна, то $f \star g = f * g$;

3.2. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ – парні, то $f \star g = g \star f$.

Означення 8. Крос-кореляція функції $f(x)$ з самою собою, зміщеною на певну величину аргументу, називається автокореляцією або автокореляційною функцією (абревіатура АКФ або ACF):

$$R_f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t-x) dt. \qquad (9.16)$$

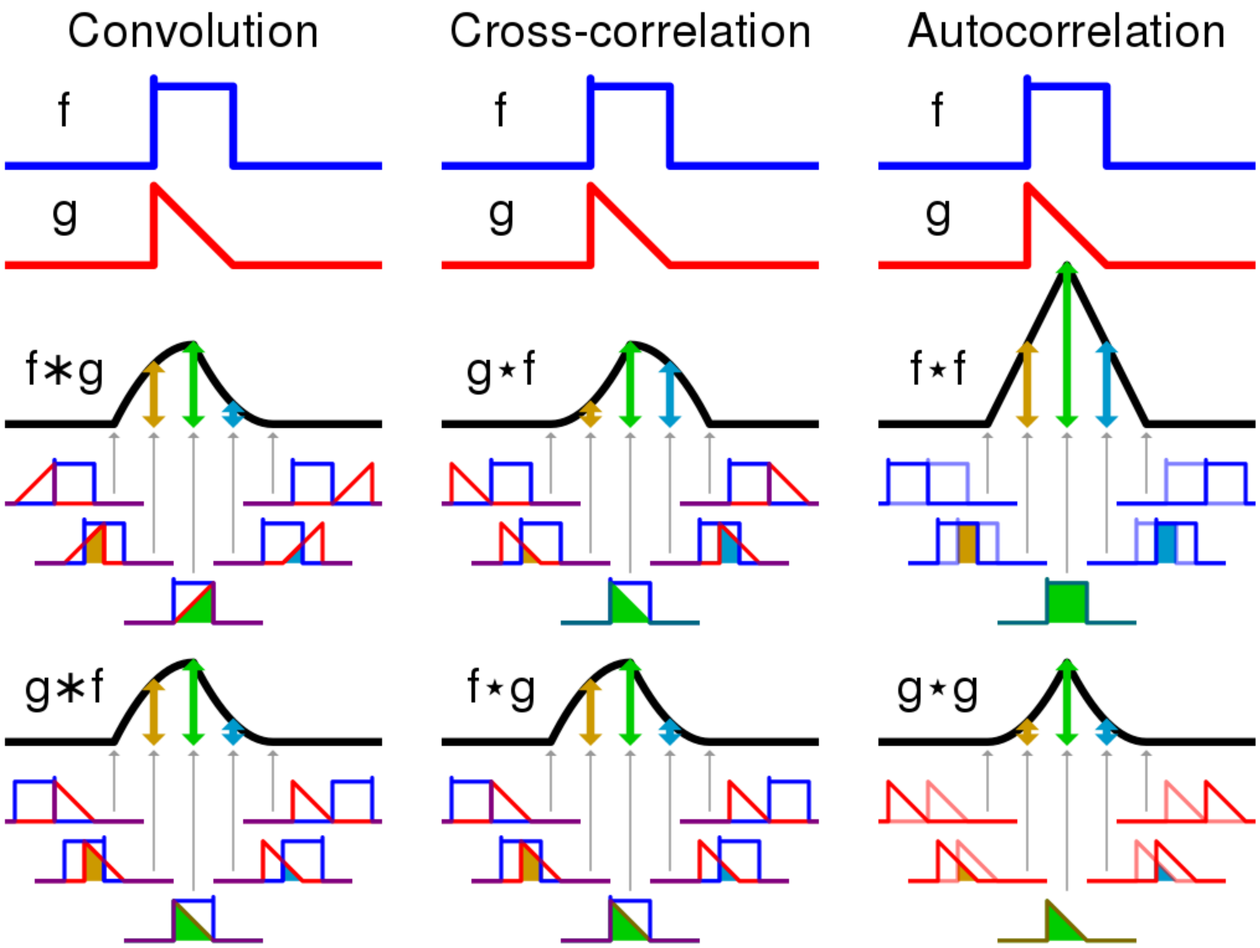


Рис 9.2. Візуальне порівняння згортки, крос-кореляції та автокореляції. Вважаємо, що висота f дорівнює 1. Знаходимо графічно значення кожної функції в п'яти точках (через площу заштрихованої фігури). Вертикальна симетрія функції f є причиною того, що $f * g$ та $f \star g$ співпадають.

9.5.4. Розподіл відношення двох випадкових величин

Нехай існує сумісна щільність $f_Z(x,y)$ випадкового вектору $Z=(X,Y)$. Розглянемо випадкову величину $V=\frac{X}{Y}$. Знайдемо за означенням та властивостями її функцію розподілу:

$$F_V(x)=\mathrm{P}\{V\le x\}=\mathrm{P}\left\{\frac{X}{Y}\le x\right\}=\mathrm{P}\left\{Z\in\left\{(s,t):\ \frac{s}{t}\le x\right\}\right\}=$$

розглянемо окремо випадки $t>0$ та $t<0$:

$$=\mathrm{P}\{Z\in\{(s,t):t>0,\ s\le xt\}\}+\mathrm{P}\{Z\in\{(s,t):t<0,\ s\ge xt\}\}=\left|\text{за}\quad(9.6)\right|$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{tx}f_Z(s,t)ds\right)dt+\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{tx}^{+\infty}f_Z(s,t)ds\right)dt.$$

Тепер знайдемо щільність розподілу випадкової величини $V=\frac{X}{Y}$:

$$f_V(x)=\frac{d}{dx}F_V(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{tx}f_Z(s,t)ds\right)dt+\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{tx}^{+\infty}f_Z(s,t)ds\right)dt\right)=$$

$$=\int_0^{+\infty}tf_Z(s,t)dt+\int_{-\infty}^{0}(-t)f_Z(s,t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,f_Z(s,t)dt.$$

Отже, щільність розподілу випадкової величини $V=\frac{X}{Y}$ має вигляд:

$$f_{\frac{X}{Y}}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,f_Z(s,t)dt.\qquad(9.17)$$

9.6. Коваріація. Дисперсія суми або різниці випадкових величин. Коефіцієнт кореляції

Означення 9. Величину

$$\mathrm{cov}(X,Y)=M\big((X-MX)\cdot(Y-MY)\big).\qquad(9.18)$$

називають к о в а р і а ц і є ю між випадковими величинами *X* та *Y*.

Властивості коваріації

1. Важлива формула для обчислення коваріації між X та Y:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY. \qquad (9.19)$$

2. Коваріація $\operatorname{cov}(X,Y)$ характеризує зв’язок (точніше – тісноту лінійного зв’язку) між двома випадковими величинами *X* та *Y*.

3. Коваріація між *X* та *Y* – це спільний центральний момент другого порядку двох випадкових величин *X* та *Y*.

4. $\operatorname{cov}(X,X)=DX$.

5. $\operatorname{cov}(X,C)=\operatorname{cov}(C,X)=0$, для *C – Const*.

6. Симетричність: $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.

7. Лінійність: $\operatorname{cov}(aX+b,Y)=\operatorname{cov}(X,aY+c)=a\operatorname{cov}(X,Y)$

8. Обмеженість: $|\operatorname{cov}(X,Y)|\le\sqrt{DX\cdot DY}$.

Означення 10. Випадкові величини *X* та *Y* називаються н е к о р е л ь о в а н и м и, якщо $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

9. Якщо випадкові величини *X* та *Y* незалежні, то $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Зауваження 3. Із незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість (тобто $\operatorname{cov}(X,Y)=0$), але не навпаки – некорельованість випадкових величин не свідчить про їх незалежність.

10. Дисперсія суми або різниці довільних випадкових величин дорівнює:

$$D(X\pm Y)=DX+DY\pm\operatorname{cov}(X,Y). \qquad (9.20)$$

10.1. Якщо ж випадкові величини *X* та *Y* незалежні, то

$$D(X\pm Y)=DX+DY. \qquad (9.20.1)$$

11. Коваріація $\operatorname{cov}(X,Y)$ має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей випадкових величин *X* та *Y*.

Означення 11. Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X та Y називають число

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}. \qquad (9.21)$$

Властивості коефіцієнту кореляції

1. $\rho(X,Y)$ – безрозмірна величина, що змінюється в межах

$$-1\le\rho(X,Y)\le 1.$$

2. $\rho(X,X)=1$.

3. $|\rho(X,Y)|=1$ тоді і лише тоді, коли випадкові величини X та Y пов'язані лінійним співвідношенням, тобто якщо існують невипадкові константи a та b такі, що $X=aY+b$.

4. $\rho(X,Y)$ характеризує тісноту лінійного зв'язку між випадковими величинами: чим ближче $|\rho(X,Y)|$ до одиниці, тим краще лінійна залежність $X=aY+b$ (або $Y=aX+b$) описує залежність між випадковими величинами.

Питання та задачі до теми

1. Наведіть означення випадкового вектора та сумісної функції розподілу кількох випадкових величин.

2. Які основні властивості сумісної функції розподілу? Поясніть їх.

3. Яку функцію називають сумісною щільністю розподілу випадкового вектору? Які властивості вона має?

4. Що таке маржинальні функція розподілу та щільність?

5. Наведіть означення незалежних випадкових величин.

6. Сформулюйте критерій незалежності випадкових величин.

7. Як знайти щільність суми випадкових величин, якщо відома їх сумісна щільність? А якщо випадкові величини – незалежні?

8. Як знайти щільність різниці випадкових величин, якщо відома їх сумісна щільність?

8. Наведіть означення згортки, крос-кореляції, автокореляції.

9. Сформулюйте означення коваріації двох випадкових величин та наведіть її основні властивості.

10. Наведіть означення коефіцієнту кореляції двох випадкових величин та наведіть його основні властивості.

Задача 1. X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на відрізках $[0; 5]$ та $[-3; 3]$ відповідно. Знайти щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$. Обчислити MV та DV.

Задача 2. X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметрами 2 та 5 відповідно: $X \sim \text{Exp}(2)$; $Y \sim \text{Exp}(5)$. Якою є щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y$? Знайти MV, DV.

Задача 3. Нехай X, Y, Z – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметрами 2, 5, 7 відповідно, тобто $X \sim \text{Exp}(2)$; $Y \sim \text{Exp}(5)$, $Z \sim \text{Exp}(7)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $V = X + Y + Z$ та обчислити її числові характеристики MV, DV.

Порада: скористайтесь результатом Задачі 2 та формулою (11.6).

Тема 10. Закони розподілу, пов'язані з нормальним законом розподілу. Граничні теореми теорії ймовірностей

В процесі практичного використання отриманих результатів виявилось, що нормальний закон розподілу, та деякі інші, пов'язані з ним розподіли, дуже часто зустрічаються на практиці. Розглянемо ці розподіли.

10.1. Гамма-функція. Гамма-розподіл

Означення 1. Гамма–функція (або інтеграл Ейлера II роду) – це інтеграл, що залежить від параметру α :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \,. \qquad (10.1)$$

Властивості гамма-функції

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ при $\alpha > 0$.

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4) Якщо α – напівціле число (тобто кратне 1/2), то $\Gamma(\alpha)$ можна обчислити:

4.1) Якщо n – ціле додатне число, то

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} \qquad (10.1.1)$$

4.2) Якщо $\alpha = n + 1/2$, де n – ціле додатне число, то

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}. \qquad (10.1.2)$$

Приклад 1. Виведемо формулу (10.1.2) з властивостей 2) і 3). Спочатку

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,; \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

В загальному випадку, для $\alpha = n + 1/2$, де n – ціле додатне число:

$$\Gamma(\alpha)=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\underbrace{n-\frac{1}{2}}_{\alpha-1}+1\right)=(\alpha-1)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=(\alpha-1)\Gamma\left(\underbrace{n-\frac{3}{2}}_{\alpha-2}+1\right)=$$

$$=(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\underbrace{\ldots}_{\substack{\text{продовжуємо, доки}\\ \text{аргумент гамма-функції}\\ \text{стане рівним } 1/2}}=(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

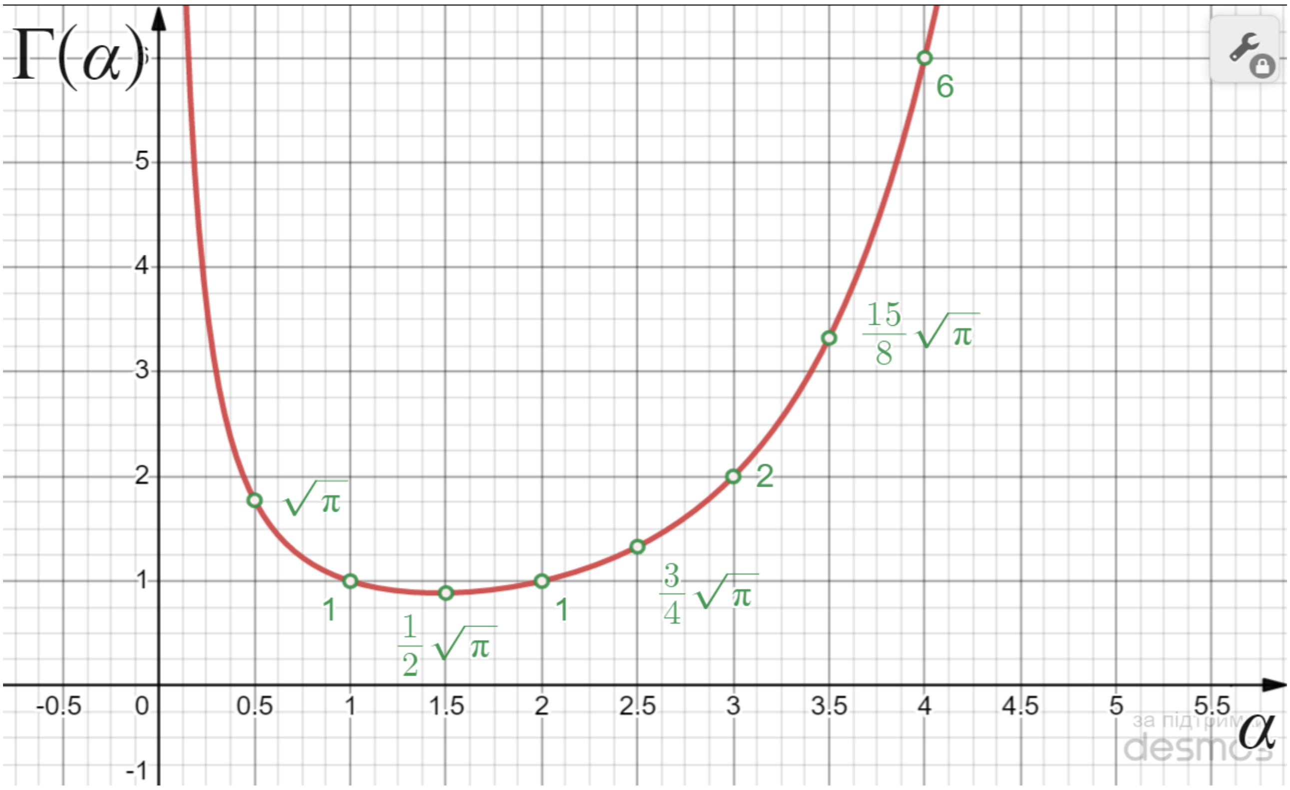


Рис. 10.1. Графік гамма-функції (α > 0) з вказаними ординатами деяких точок

Означення 2. Неперервна випадкова величини X має г а м м а - р о з п о д і л, якщо її щільність ($\alpha>0,\ \lambda>0$)

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ Cx^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}.$$

- Позначають $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$.

Константу C в означенні знаходять з умови нормування (6.4):

$$C=\frac{1}{\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx}=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.$$

Звідки: при $\alpha = 1$ константа $C = \lambda$; при $\alpha = 2$ константа $C = \lambda^2$.

Функція розподілу гамма-розподілу $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy, & \text{при} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Числові характеристики гамма-розподілу $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$MX = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \qquad \sigma(X) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}.$$

Зауваження 1. В прикладних задачах параметр α часто позначають літерою k, а параметр $1/\lambda$ позначають літерою θ і розглядають гамма-розподіл з параметрами k і θ – $\Gamma(k, \theta)$.

Зауваження 2. При цілих значеннях параметру $k = \alpha$ (і при $\theta = 1/\lambda$) гамма-розподіл з параметрами α і λ називають розподілом Ерланга з параметрами k і θ.

Зауваження 3. При $\alpha = 1$ гамма-розподіл стає показниковим розподілом з параметром λ : $\Gamma(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$.

Зауваження 4. Якщо $X_1, \ldots, X_k$ – незалежні випадкові величини з однаковим показниковим розподілом з одним і тим же параметром λ, тобто $X_1, \ldots, X_k \sim \text{Exp}(\lambda)$, тоді їх сума $X_1 + \ldots + X_k$ розподілена за гамма-розподілом з параметрами $\alpha = k$ та λ.

10.2. Розподіл хі-квадрат (Пірсона)

Означення 3. Нехай є k незалежних випадкових величин $Y_1, \ldots, Y_k$, кожна з яких розподілена нормально з параметрами 0 і 1. Тоді розподіл випадкової величини

$$X = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2 \tag{10.2}$$

називають розподілом[42] χ^2 (або Пірсона) з k ступенями свободи.

● Позначають $X \sim \chi^2(k)$ або $X \sim \chi_k^2$.

● Розподіл $\chi^2(k)$ має один параметр k – число степенів свободи.

Зауваження 5. Число ступенів свободи (або вільності) k є абстрактним поняттям, що визначає в даному випадку умови незалежності величин Y_i. Наявність будь-якої залежності між випадковими величинами Y_i зменшує число ступенів свободи k. Якщо випадкові величини Y_i пов'язані одним лінійним співвідношенням, наприклад, $\sum_{i=1}^{k} Y_i = n\overline{Y}$, то число ступенів свободи зменшиться на одиницю: $k-1$.

Щільність розподілу випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$ та її графік :

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{якщо} \quad x \ge 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \end{cases}.$$

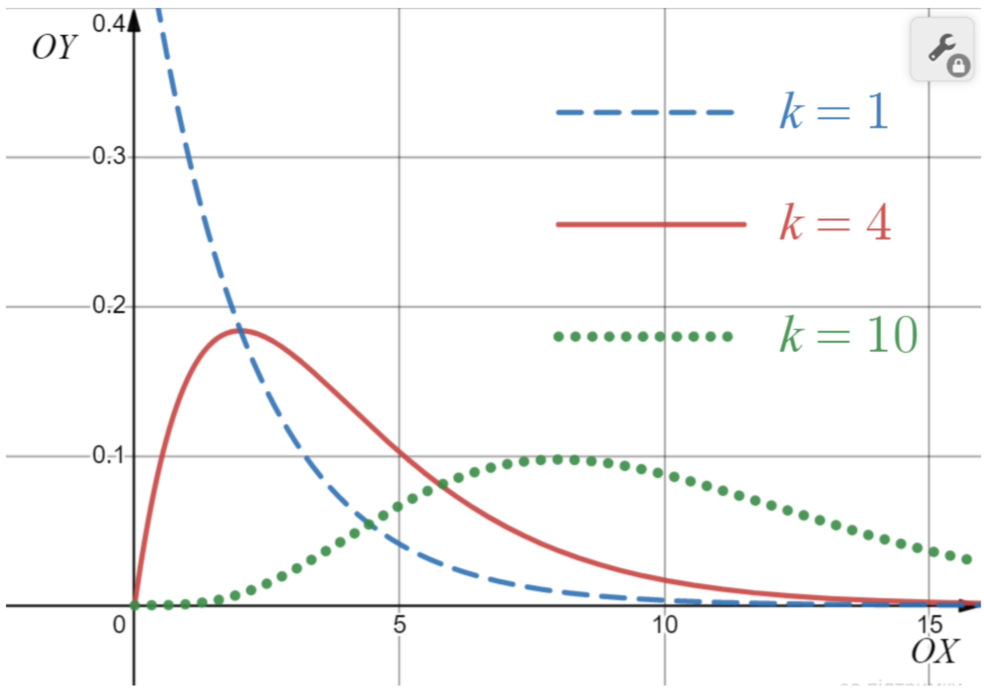


Рис. 10.2. Крива розподілу $\chi^2(k)$ для різного числа ступенів свободи k

[42] Вимовляють: χ^2 – *хі-квадрат*.

Константу C в означенні щільності розподілу хі-квадрат знаходять з умови нормування (6.4): $$C = \frac{1}{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Функція розподілу випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$ має вигляд :

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^x y^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dy, & \text{якщо} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Числові характеристики випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$:

$$MX = k, \quad DX = 2k, \quad \sigma(X) = \sqrt{2k}. \tag{10.3}$$

Зауваження 6. Розподіл хі-квадрат є окремим випадком гамма-розподілу:

$$\chi^2(k) = \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Зауваження 7. При $k = 2$, тобто для випадкової величини $X = Y_1^2 + Y_2^2$, де незалежні випадкові величини Y_1, Y_2 ~ N(0; 1), отримуємо показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1/2$, тобто $\chi^2(2) = \text{Exp}(0{,}5)$.

Зауваження 8. Із збільшенням числа ступенів свободи розподіл $\chi^2(k)$ наближається до нормального N(k; 2k). При k > 30 практично не відрізняється.

Означення 4. α - квантиль розподілу $\chi^2(k)$ (або квантиль рівня α) – це таке значення на осі абсцис (яке позначають, як правило, так: $\chi^2_{\alpha,k}$), що для випадкової величини $X \sim \chi^2(k)$ виконується:

$$P(X \leq \chi^2_{\alpha,k}) = \int\limits_0^{\chi^2_{\alpha,k}} f_X(y)dy = \alpha. \tag{10.4}$$

Геометрично, α-квантиль $\chi^2_{\alpha,k}$ – це таке значення x, для якого площа заштрихованої криволінійної трапеції дорівнює α:

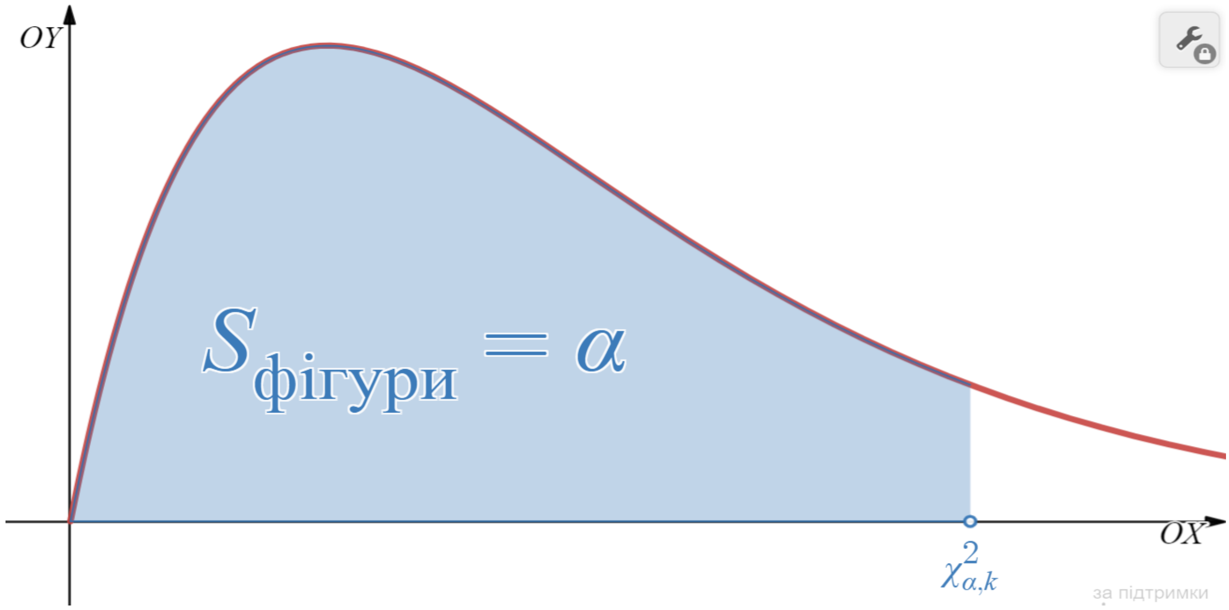


Рис. 10.3. Геометрична інтерпретація α – квантилю розподілу хі-квадрат

● Квантилі розподілу $\chi^2(k)$ залежать від 2 параметрів – рівня значущості α і числа ступенів свободи k; ці квантилі є табульованими (див. Таблицю 3).

10.3. Розподіл Стьюдента

Означення 5. Розглянемо k + 1 незалежну випадкову величину $Y_0,\ldots,Y_k$, розподілених нормально з параметрами 0 і 1. Тоді про випадкову величину

$$X = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i^2}} = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2(k)}} \qquad (10.5)$$

говорять, що вона має розподіл Стьюдента (або t–розподіл) з k ступенями свободи.

● Позначають $X \sim t(k)$ (або $X \sim T(k)$) .

● Розподіл $t(k)$ залежить від параметра k – числа ступенів свободи.

Щільність розподілу випадкової величини $X \sim t(k)$ та її графік :

$$f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

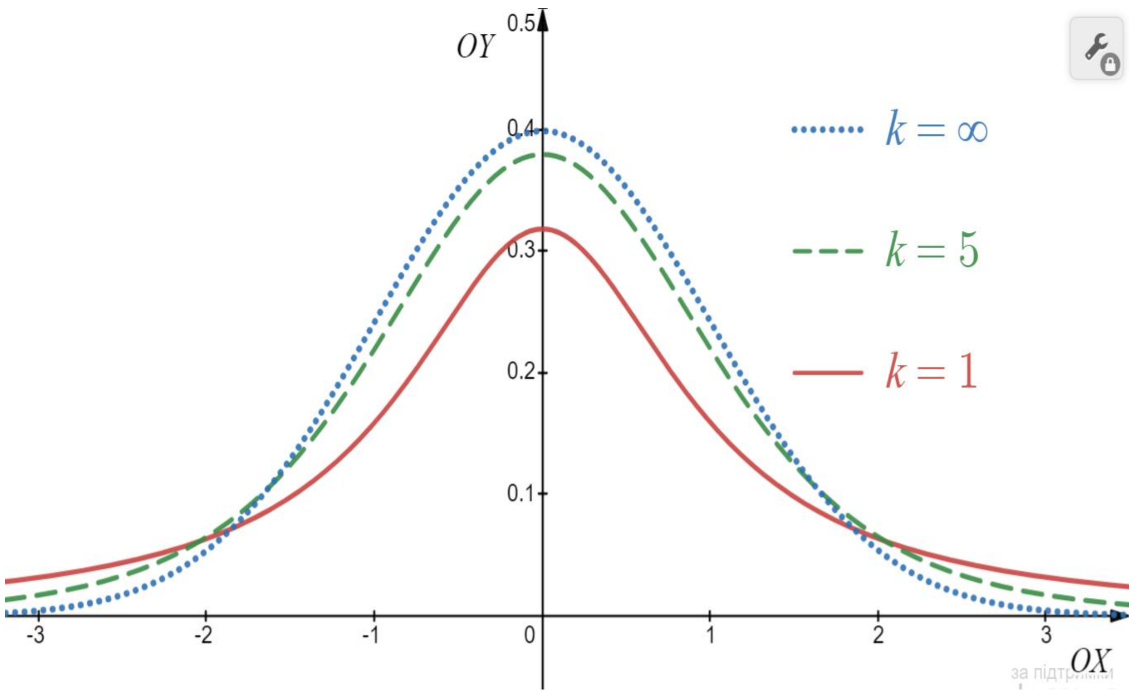


Рис. 10.4. Крива розподілу Стьюдента при різних значеннях k

Функція розподілу випадкової величини $X \sim t(k)$ має вигляд :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(y)dy = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dy\,.$$

Числові характеристики випадкової величини $X \sim t(k)$ (при $k > 2$):

$$MX = 0,\ DX = \frac{k}{k-2},\ \sigma(X) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}. \tag{10.6}$$

Зауваження 9. При $k = 1$ маємо окремий випадок розподілу Стьюдента – розподіл Коші (з параметрами 0 та 1), що має таку щільність:

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,.$$

● Позначають $X \sim$ C(0; 1).

● Розподіл Коші – приклад закону розподілу з «важкими хвостами»[43]. Графік щільності розподілу Коші (лінія, що відповідає $k = 1$) можна на Рис. 10.4 порівняти із кривою стандартного нормального розподілу (лінія, що

[43] Так називають закони розподілу, у яких дуже великі за модулем значення зустрічаються з достатньо високою ймовірністю.

відповідає $k = \infty$) – тоді стане зрозумілішим поняття «важкі хвости». У розподілу Коші не існує ні математичного сподівання, ні моментів вищих порядків.

Зауваження 10. Із збільшенням числа ступенів свободи розподіл $t(k)$ наближається до нормального N(0; 1). При $k > 30$ практично не відрізняється.

Означення 6. α – квантиль (або квантиль рівня α) розподілу Стьюдента – це таке значення $t_{\alpha,k}$, що для випадкової величини $X \sim t(k)$

$$P\left(X \le t_{\alpha,k}\right) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t)dt = \alpha . \qquad (10.7)$$

● Розподіл Стьюдента симетричний відносно 0, тому

$$P\left(X \le t_{\alpha,k}\right) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t)dt = \alpha = \int_{-t_{\alpha,k}}^{\infty} f_X(t)dt = 1 - P\left(X < -t_{\alpha,k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\left(X < -t_{\alpha,k}\right) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad -t_{\alpha,k} \quad \text{це } (1-\alpha)\text{-квантиль.}$$

Отже квантилі розподілу Стьюдента мають таку властивість симетрії:

$$t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k} . \qquad (10.7.1)$$

Зауваження 11. Для розподілу Стьюдента часто розглядають двосторонні квантилі – таке значення t (що дорівнює квантилю $t_{\alpha/2,k}$), що для $X \sim t(k)$ ймовірність того, що X за модулем не перевищить це значення, дорівнює α :

$$P\left(|X| \le t_{\alpha/2,k}\right) = \int_{-t_{\alpha/2,k}}^{t_{\alpha/2,k}} f_X(t)dt = \alpha .$$

Геометрично, двосторонні α-квантилі – це таке додатне значення $t_{\alpha/2,k}$, що площа заштрихованої на рисунку криволінійної трапеції дорівнює α:

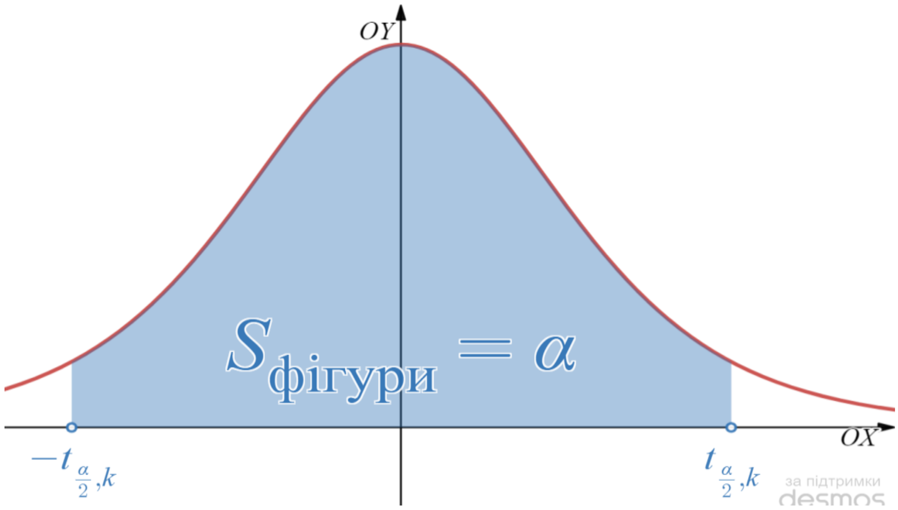


Рис. 10.5. Двосторонні квантилі розподілу Стьюдента

Також розглядають односторонні α-квантилі – відповідно, нижній (лівий) $t_{\alpha,k}$ та верхній (правий) $t_{1-\alpha,k}$ – причому, в силу симетрії розподілу Стьюдента, вони рівні за модулем, але протилежні за знаком: $t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}$.

Односторонні квантилі знаходять через площу «хвостів» розподілу із умов $P\left(X \le t_{\alpha,k}\right) = \int\limits_{-\infty}^{t_{\alpha,k}} f_X(t)dt = \alpha$ або ж $P\left(X > t_{1-\alpha,k}\right) = \int\limits_{t_{1-\alpha,k}}^{\infty} f_X(t)dt = \alpha.$

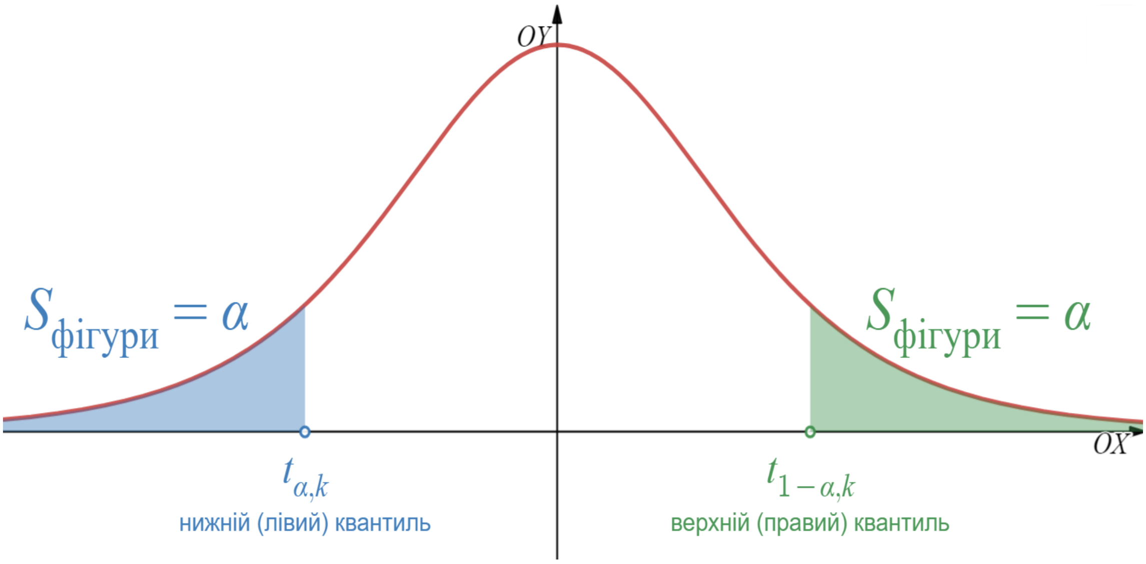


Рис. 10.6. Односторонні квантилі розподілу Стьюдента

● Квантилі розподілу $t(k)$ залежать від 2 параметрів – рівня значущості α і числа ступенів свободи k ; ці квантилі є табульованими (див. Таблицю 4).

Зауваження 12. Для випадкової величини *X*, розподіленої за стандартним нормальним розподілом N(0, 1) поняття α-квантилю u_α вводять аналогічно:

$$P\left(X \le u_\alpha\right) = \int_{-\infty}^{u_\alpha} f_X(t)dt = \alpha ,$$

і в силу симетрії кривої Гауса, як правило, розглядають двосторонні α-квантилі, які позначають $\pm u_{\alpha/2}$ і знаходять за таблицею функції Лапласа з рівності:

$$P(|X| \le u_{\alpha/2}) = P(X \le u_{\alpha/2}) - P(X < -u_{\alpha/2}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{u_{\alpha/2}} f_X(y)dy - \int_{-\infty}^{-u_{\alpha/2}} f_X(y)dy = \int_{-u_\alpha}^{u_{\alpha/2}} f_X(y)dy = 2\int_{0}^{u_{\alpha/2}} f_X(y)dy = \alpha .$$

Звідки маємо формулу для знаходження:

$$\boxed{\Phi(u_\alpha) = \int_{0}^{u_{\alpha/2}} f_X(y)dy = \frac{\alpha}{2}} \tag{10.8}$$

Зауваження 13. Інформацію про згадані та багато інших розподілів, їх означення, властивості, числові характеристики та зв’язки між собою можна знайти в зручному інтерактивному вигляді (англійською мовою) за цим посиланням: http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html

10.4. Граничні теореми теорії ймовірностей

Історично теорія ймовірностей зародилася як результат роздумів над спостереженнями результатів багатьох випадкових подій. І хоча результат окремо взятої події передбачити наперед виявилось неможливим, проте було помічено, що результати великої кількості випадкових подій є досить сталими. Такі результати отримали назву граничних теорем теорії ймовірностей.

Ці теореми поділяються на дві великі групи теорем: результати типу “закону великих чисел” та результати типу “центральної граничної теореми”.

10.4.1. Результати типу закону великих чисел

Теорія ймовірностей і математична статистика базуються на тому, що на практиці при спостереженні багатьох випадкових дослідів за певних умов простежуються певні закономірності. Теореми, пов'язані з дослідженням цих умов і закономірностей, об'єднують під назвою закон великих чисел (ЗВЧ).

В подальшому будемо використовувати функцію індикатор (ще говорять індикаторна функція)

$$I_{\{X\in A\}}=1_{\{X\in A\}}=\begin{cases}0\,, \text{якщо } X\notin A\\ 1\,, \text{якщо } X\in A\end{cases}$$

та її властивість :

$$M\left(I_{\{X\in A\}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{X\in A\}}f_X(x)dx=\int_A f_X(x)dx=P\{X\in A\}. \qquad (10.9)$$

Нерівність Маркова.

Якщо невід'ємна випадкова величина X має обмежене математичне сподівання MX , то для будь-якого $\varepsilon>0$

$$P\{X\geq\varepsilon\}\leq\frac{MX}{\varepsilon}. \qquad (10.10)$$

Для довільної випадкової величина X, що має обмежене математичне сподівання MX , для будь-якого $\varepsilon>0$ виконується

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{M|X|}{\varepsilon}. \qquad (10.10.1)$$

Нерівність Чебишева.

Якщо випадкова величина X має обмежені математичне сподівання MX і дисперсію DX, то для будь-якого $\varepsilon>0$ (оцінка зверху)

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (10.11.1)$$

Нерівність Чебишева часто використовують для оцінки ймовірності протилежної події (оцінка знизу):

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (10.11.2)$$

Доведення. Нерівність Маркова. Використовуючи означення та властивості математичного сподівання та функцію індикатор, маємо

$$MX = M\left(X \cdot I_{\{X<\varepsilon\}} + X \cdot I_{\{X\geq\varepsilon\}}\right) = M\left(X \cdot I_{\{X<\varepsilon\}}\right) + M\left(X \cdot I_{\{X\geq\varepsilon\}}\right) \geq$$
$$\geq M\left(X \cdot I_{\{X\geq\varepsilon\}}\right) \geq M\left(\varepsilon \cdot I_{\{X\geq\varepsilon\}}\right) \geq \varepsilon \cdot M\left(I_{\{X\geq\varepsilon\}}\right) = \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\},$$

і з останньої нерівності виражаємо (10.10).

Нерівність Чебишева. Аналогічно попередньому доведенню

$$DX = M(X - MX)^2 = M\left((X - MX)^2 \cdot I_{\{|X-MX|<\varepsilon\}} + (X - MX)^2 \cdot I_{\{|X-MX|\geq\varepsilon\}}\right) =$$
$$= M\left((X - MX)^2 \cdot I_{\{|X-MX|<\varepsilon\}}\right) + M\left((X - MX)^2 \cdot I_{\{|X-MX|\geq\varepsilon\}}\right) \geq$$
$$\geq M\left((X - MX)^2 \cdot I_{\{|X-MX|\geq\varepsilon\}}\right) \geq M\left(\varepsilon^2 \cdot I_{\{|X-MX|\geq\varepsilon\}}\right) \geq$$
$$\geq \varepsilon^2 \cdot M\left(I_{\{|X-MX|\geq\varepsilon\}}\right) = \varepsilon^2 \cdot P\{|X - MX| \geq \varepsilon\},$$

і з останньої нерівності виражаємо (10.11.1).

Приклад 2. Для X ~ N(a; σ^2) порівняємо оцінку відхилення від MX за нерівністю Чебишева з оцінкою за правилом трьох сигм.

Нехай $\varepsilon = 3\sigma$, тоді за нерівністю Чебишева (10.11.2) (для X ~ N(a; σ^2))

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89.$$

За правилом 3σ $P\{|X - a| < 3\sigma\} = 0{,}9973$. Для нормального закону розподілу «правило 3σ» точніше. Але для інших законів розподілу нерівність Чебишева відіграє важливу роль.

Приклад 3. Середньоквадратичне відхилення помилки вимірювання курсу літака дорівнює 2º. Вважаючи математичне сподівання помилки рівним нулю, оцінити ймовірність того, що помилка при даному вимірюванні буде

а) менше 5°; б) від 3° до 6° .

Розв'язання. а) За умовою маємо: $MX = 0$, $DX = 4$, $\varepsilon = 5$.

Тоді за нерівністю Чебишева $P\{|X| \leq 5\} \geq 1 - \frac{4}{5^2} = 0{,}84.$

б) За нерівністю Чебишева, з одного боку: $P\{|X|\le 6\}\ge 1-\frac{4}{6^2}=0{,}89$;

з іншого боку $P\{|X|\le 3\}\ge 1-\frac{4}{3^2}=0{,}56$.

Тому можемо оцінити шукану ймовірність:

$$P\{3\le |X|\le 6\}=P\{|X|\le 6\}-P\{|X|\le 3\}\approx 0{,}89-0{,}56\approx 0{,}33.$$

Теорема 10.1. Закон великих чисел в формі Чебишева

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – незалежні та існує таке число *C*, що $DX_i \le C$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Наслідок до теореми 10.1.

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$– незалежні, мають однакові $MX = a$ і обмежені DX_i. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Тобто в умовах цього наслідку середнє арифметичне випадкових величин за ймовірністю збігається до математичного сподівання.

Теорема 10.2. Закон великих чисел в формі Маркова

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно незалежні, а їх дисперсії задовольняють умові $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i=0.$ Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-MX_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

***Теорема 10.3. Посилений закон великих чисел в формі Колмогорова**

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – незалежні, мають скінченні MX_i та DX_i. Якщо $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{DX_i}{i^2} < \infty$, то

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - MX_i \right) = 0 \right\} = 1.$$

***Теорема 10.4. Посилений закон великих чисел в формі Бореля**

Нехай маємо n незалежних експериментів за схемою Бернуллі, ймовірність “успіху” дорівнює p. Нехай випадкова величина X_n – це кількість “успіхів” з n експериментів. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \sup_{k \ge n} \left| \frac{X_k}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Еквівалентна форма твердження цієї теореми:

$$P\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = p \right\} = 1.$$

10.4.2. Результати типу центральної граничної теореми

Головна особливість нормального закону розподілу полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при умовах, що дуже часто зустрічаються. Це твердження центральної граничної теореми (ЦГТ). ЦГТ доводить, що сума досить великого числа незалежних (або слабко залежних) випадкових величин, (при деяких нежорстких обмеженнях) приблизно підкоряється нормальному закону, і це виконується тим точніше, чим більша кількість випадкових величин додається. Більшість випадкових величин, що зустрічаються на практиці (наприклад, помилки вимірювань) можуть бути представлені як суми великої кількості порівняно малих складових – елементарних помилок, кожна з яких викликана дією окремої причини, що не залежить від інших.

Теорема 10.5. (Центральна гранична теорема в формі Ляпунова)

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні, однаково розподілені, мають однакові скінченні $MX = a$ і $DX = \sigma^2$. Тоді при $n \to \infty$ закон розподілу нормованої центрованої випадкової величини

$$X^H = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sqrt{n}\sigma}$$

прямує до нормального з параметрами 0 і 1 :

$$X^H \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{N}(0; 1). \quad (10.12)$$

● Випадкову величину X^H називають а с и м п т о т и ч н о н о р м а л ь н о ю.

Наслідок ЦГТ. Якщо незалежні випадкові величини $X_1, \ldots, X_n$ однаково розподілені і мають однакові $MX = a$ і $DX = \sigma^2$, то при $n \to \infty$ закон розподілу суми випадкових величин $X_1, \ldots, X_n$, тобто випадкової величини $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, прямує до нормального закону з параметрами $MS_n = na$ і $DS_n = n\sigma^2$:

$$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{N}(na; n\sigma^2). \quad (10.13)$$

● Таким чином, нормальний розподіл виникає тоді, коли є сума багатьох незалежних (або слабко залежних) випадкових величин, порівняних за ступенем свого впливу на розсіювання суми.

На практиці таки випадки зустрічаються дуже часто: похибки виміру параметрів, помилки спостереження розподілені за нормальним (або близьким до нормального) законом; такі помилки можуть бути представлені у вигляді суми багатьох елементарних помилок, кожна з яких пов’язана з окремою, практично незалежною від інших, причиною.

● При додаванні величин з однаковим законом розподілу закон розподілу суми можна вважати нормальним, якщо $n > 10$. Однак, практично можна використати центральну граничну теорему і при кількості доданків менше 10.

Приклад 4. Нехай маємо 100 незалежних випадкових величин X_i ~ Uni(0; 12). Який наближений закон для їх суми $Y = X_1 + \ldots + X_{100}$?

Розв'язання. Оскільки всі сто X_i ~ Uni(0; 12), то за формулою (8.1)

$$MX = \frac{a+b}{2} = \frac{12+0}{2} = 6; \quad DX = \frac{(12-0)^2}{12} = 12,$$

а за Наслідком ЦГТ (10.11) $Y = X_1 + \ldots + X_{100} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(nMX;\, nDX)$, тобто

$$Y = X_1 + \ldots + X_{100} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{N}(600; 1200).$$

Зауваження 14. Теореми Муавра-Лапласа і Пуассона (див. Тему 4) – окремі випадки застосування ЦГТ.

Питання та задачі до теми

1. Що називають гамма-функцією та які її властивості?
2. Який розподіл називають гамма-розподілом та які властивості він має?
3. За яких умов виникає розподіл хі-квадрат?
4. Що таке квантиль розподілу? В чому його геометричний сенс?
5. За яких умов виникає розподіл Стьюдента?
6. В чому сенс тверджень типу закону великих чисел?
7. В чому полягає твердження центральної граничної теореми?

Задача 1. Нехай маємо 60 незалежних випадкових величин:

а) X_i ~ Bi(20; 0,35); б) X_i ~ П(40; 0,02).

Який наближений закон розподілу для їх суми $Y = X_1 + \ldots + X_{60}$?

Задача 2. Нехай маємо 100 незалежних випадкових величин, розподілених за вказаним законом розподілу Пуассона: X_i ~ П(40; 0,02).

Яким є наближений закон розподілу для їх суми $Y = X_1 + \ldots + X_{100}$?

Додаток 1. Таблиці математичної статистики

Таблиця 1. Значення функції Гауса, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

Таблиця 3. Квантилі (критичні точки) розподілу χ^2 (Пірсона).
Наведені значення $\chi^2_{\alpha,k}$, тобто такі значення, що задовольняють умові

$$P\left(\chi^2(k) \le \chi^2_{\alpha,k}\right) = \alpha \quad \text{або} \quad P\left(\chi^2(k) \ge \chi^2_{\alpha,k}\right) = 1 - \alpha .$$

Ступенів свободи *k*	**Рівень значущості α**						
	0,01	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,995**
1	0,0002	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	6,6349	7,8794
2	0,0201	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	9,2103	10,5966
3	0,1148	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	11,3449	12,8382
4	0,2971	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	13,2767	14,8603
5	0,5543	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	15,0863	16,7496
6	0,8721	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	16,8119	18,5476
7	1,2390	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	18,4753	20,2777
8	1,6465	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	20,0902	21,9550
9	2,0879	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	21,6660	23,5894
10	2,5582	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	23,2093	25,1882
11	3,0535	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	24,7250	26,7568
12	3,5706	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	26,2170	28,2995
13	4,1069	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	27,6882	29,8195
14	4,6604	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	29,1412	31,3193
15	5,2293	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	30,5779	32,8013
16	5,8122	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	31,9999	34,2672
17	6,4078	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	33,4087	35,7185
18	7,0149	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	34,8053	37,1565
19	7,6327	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	36,1909	38,5823
20	8,2604	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	37,5662	39,9968
21	8,8972	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	38,9322	41,4011
22	9,5425	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	40,2894	42,7957
23	10,1957	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	41,6384	44,1813
24	10,8564	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	42,9798	45,5585
25	11,5240	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	44,3141	46,9279
26	12,1981	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	45,6417	48,2899
27	12,8785	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	46,9629	49,6449
28	13,5647	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	48,2782	50,9934
29	14,2565	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	49,5879	52,3356
30	14,9535	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	50,8922	53,6720

Таблиця 4. Квантилі (критичні точки) розподілу Стьюдента. Наведені значення $t_{\alpha,k}$ та $t_{\alpha/2,k}$, що задовольняють умові

$$P\left(t(k) \le t_{\alpha,k}\right) = \alpha \quad \text{або} \quad P\left(|t(k)| \le t_{\alpha/2,k}\right) = \alpha.$$

Число ступенів свободи *k*	Рівень значущості *α* для односторонньої (правої) області t_α,k							
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
	Рівень значущості *α* для двосторонньої області t_α/2,k							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

<u>Правило роботи</u> <u>з Таблицею 1 і Таблицею 2:</u> в стовпчику стоять **цілі** і **десяті** цифри числа x, а в рядочку – **соті** цифри числа x. Значення функції знаходиться на перетині відповідного рядку з відповідним стовпцем.

Наприклад, обчислимо значення функцій Гауса і Лапласа від x = 1,63. Маємо $\varphi(1{,}63) = 0{,}1057$; $\Phi(1{,}63) = 0{,}4484$.

<u>За Таблицею 2</u> знаходять α–квантилі u_α нормального N(0;1) розподілу:

$$P(|X| > u_\alpha) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Властивості функції Гауса (Таблиця 1)

1. $\varphi(x) > 0$;
2. $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$;
3. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, тобто функція Гауса є парною;
4. $\varphi(x) \approx 0$ при $x \geq 4$ або $x \leq -4$.

Властивості функції Лапласа (Таблиця 2)

1. $\Phi(x) > 0$ при $x > 0$;
2. $\Phi(\infty) = 0{,}5$; $\Phi(-\infty) = -0{,}5$;
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, тобто функція Лапласа є непарною;
4. $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \geq 4$; $\Phi(x) \approx -0{,}5$ при $x \leq -4$.

Властивості квантилів розподілу χ^2 (Таблиця 3)

При k > 30 розподіл $\chi^2(k)$ практично не відрізняється від нормального N(k; 2k). Тобто для таких k для знаходження необхідних квантилів можна і варто, перейшовши спочатку до стандартної випадкової величини за формулою (7.9), використовувати таблицю функції Лапласа (Таблиця 2).

Властивості квантилів розподілу Стьюдента (Таблиця 4)

При k > 30 розподіл $t(k)$ практично не відрізняється від нормального N(0; 1).

Предметний покажчик

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ЦУЛ, 2010. – 424 с.

2. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. У 2 ч. – Ч. І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

3. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика. – К: ВПЦ “Київський університет”, 2007. – 494 с.

4. Крикун І.Г. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. – Миколаїв: НУК, 2017. – 148 с.

5. Лебєдєв Є. О., Шарапов М. М. Курс лекцій з теорії ймовірностей. – К.: Норіта-плюс, 2007. – 168 с.

6. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі. – Дніпропетровськ: ІМА-Прес, 2014. – 556 с.

7. Klenke A. Probability theory: a comprehensive course (3nd ed.). – New York, Berlin: Springer, 2020. – 716 p.

Додаткова та практикуми

7. Глеч С. Г., Ледяєв С. Ф., Ольшанська І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – 176 с.

8. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Высшая школа, 2004. – 406 с. (*російською мовою*)

9. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язання задач. – К.: ЦУД, 2007. – 576 с.

10. Слюсарчук Ю. М., Хром'як Й. Я., Джавала Л. Л., Цимбал В. М. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси: навч. посіб. – Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2015. – 364 с.

11. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Знання, 2007. – 556 с.

Довідники та практичне застосування

12. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с. (*російською мовою*)

13. Горбань І. І. Теорія ймовірностей та математична статистика для наукових працівників і інженерів. – К., 2003. – 244 с.

14. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Наука, 1985. – 640 с. (*російською мовою*)

15. Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. І. Теоретико-імовірносні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.

16. Walpole R. E., Myers R. H., Myers S. L., Ye K. Probability & statistics for engineers & scientists (9nd ed.). – Boston: Prentice Hall, 2012. – 812 p.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

18. http://fizma.net/index.php?idi=alg/imov

19. https://www.twirpx.com/files/science/mathematics/tvms/

20. http://www.freebookcentre.net/Mathematics/Probability-Theory-Books.html

21. https://www.coursera.org/learn/probability-theory-foundation-for-data-science

22. https://www.coursera.org/learn/probability-intro

23. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/18378/1/5%20Кушлик-Дивульська.pdf

24. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Teoria_veroatnosty_mat_stat.pdf

25. http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/32487/1/Michael%20Akritas_2016.pdf

26. https://math.buet.ac.bd/public/faculty_profile/files/835598806.pdf

27. https://wwwhome.ewi.utwente.nl/~meijertmj/opgaven3/ReaderProb.pdf

28. Різні розподіли http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html

Навчальне видання

Крикун *Іван Григорович*

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів ступеня освіти «Бакалавр»
спеціальності 111 «Математика»
освітніх програм «Математика» та
«Комп'ютерна математика та інтелектуальний аналіз даних»

Підписано до друку **.**.20**
Формат 60 х 84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. *
Тираж ** прим. Зам. *
Донецький національний університет імені Василя Стуса
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018